~~43-7-A = N. 24~~

96-4-15
MED. 6468

Digitized by Google

0.61.1
Ac 1 h

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNÉE MDCCLVIII.

A BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXV.

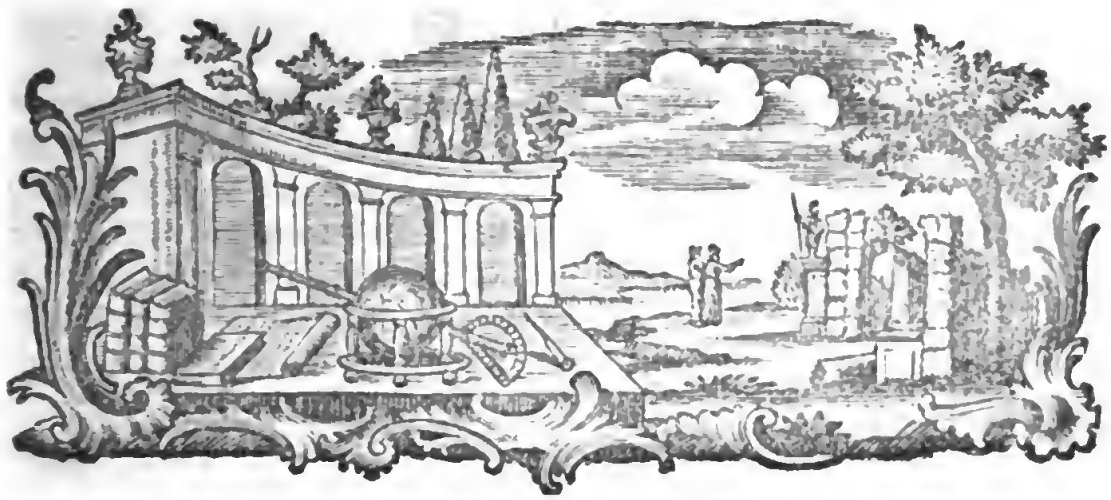
Imprimé
par Ordre de l'Académie.

Digitized by Google

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

* *
*



DES EFFETS
DU SEL ALCALI DU SEL COMMUN
SUR LE REGULE D'ANTIMOINE.

PAR M. MARGGRAF.

Traduit de l'Allemand.

I.

On ſçait que le Régule d'Antimoine eſt la partie métallique de ce minéral, qu'on nomme en Latin *Antimonium*, & en Allemand *Spiesglaſſ.* L'Antimoine eſt compoſé de cette partie métallique qui forme le Régule, & de ſouffre. Le Régule peut être ſéparé du ſouffre par pluſieurs voyes différentes, comme par d'autres métaux, par des ſels, & auſſi par des terres alicalines. Dans le premier cas, la partie métallique de l'Antimoine conſerve toujours un peu d'impureté qui provient du métal employé pour ſa ſépa-

ration; mais dans les autres, elle devient plus pure, & plus propre aux travaux nets que l'on entreprend avec la partie métallique propre de l'Antimoine. Mais, comme l'on n'obtient jamais que peu de cette ſubſtance métallique par l'addition des ſels, on a encore une autre voye de la ſéparer de ſon ſouffre, ſavoir de brûler l'Antimoine, & de le réduire enſuite avec des matieres combuſtibles. C'eſt de cette voye que je me ſuis ſervi pour obtenir la partie métallique de l'Antimoine néceſſaire pour les travaux en queſtion. Je n'explique pas ici ce que c'eſt que le ſel alcali du ſel commun. On peut voir ce que j'en ai dit dans deux autres Mémoires que j'ai lûs à cette Académie, l'un *ſur la meilleure maniere de ſéparer la ſubſtance alcaline du ſel commun*, l'autre deſtiné à prouver *que les partie alcaline ſeparée du ſel de cuiſine eſt un ſel alcali réel, & non une terre alcaline.* Je donnerai ici à ce ſel le nom de *ſel alcali natif.*

II. Pour me procurer donc un Régule d'Antimoine auſſi pur qu'il étoit poſſible, j'ai ſuivi la méthode de *Kunckel.* J'ai pris quelques livres d'Antimoine crud; je les ai fait fondre encore une fois, dans un creuſet net bien fermé, à un tel degré de feu que l'Antimoine a pu entrer dans un flux clair; & après l'avoir laiſſé réfroidir, j'ai ſéparé la partie ſupérieure de cet Antimoine fondu, qui étoit pour la plûpart remplie de ſcories en forme de bulles, qui procédent des métaux étrangers, ſans compter qu'elle renferme encore ſouvent d'autres parties qui n'appartiennent pas proprement à l'Antimoine. J'ai pris de l'Antimoine ainſi purifié, ſeize onces; je les ai pulvériſé, j'ai calciné cet Antimoine pulvériſé ſur un têt de terre plat & non verniſſé, donnant d'abord un feu lent que j'augmentois enſuite peu à peu, jusqu'à le rendre un feu aſſez fort d'incandeſcence: ce que j'ai fait durer tant qu'à la fin l'Antimoine ſe ſoit changé en une cendre d'un blanc griſâtre. Au reſte tout Chymiſte exercé dans un ſemblable travail n'ignore pas les précautions qu'il faut obſerver dans la calcination de l'Antimoine: ainſi je n'ai pas beſoin de les indiquer.

III. Je pris quatre onces de cette poudre d'Antimoine calciné, je les mêlai exactement avec ſix dragmes de ſel de tartre, & trois dragmes

de

de charbons pulvériſés; enſuite je fis fondre ce mêlange pendant une bonne heure dans un creuſet conique auquel le couvercle étoit ſoigneuſement adapté & luté. Après le réfroidiſſement du vaiſſeau, je trouvai dans ſa partie inférieure qui ſe termine en pointe, lorsque les ſcories eurent été ſéparées, un beau Régule d'Antimoine, peſant une once, ſept dragmes, & vint grains.

IV. Je joignis à toute cette quantité de Régule une once de ſel alcali natif, m'étant toujours ſervi pour ces travaux d'un ſel bien dégagé de l'humidité qui pourroit y reſter, & tout à fait ſec. Je commençai par mêler la moitié du ſel alcali avec le Régule; je mis ce mêlange dans un creuſet conique, & je le couvris avec l'autre moitié du ſel. L'ouverture du vaiſſeau étoit garnie d'un couvercle qui s'y adaptoit exactement; je lutai au mieux les jointures avec un lut fait d'argille & de ſable, ou de ſable & de creuſet brûlé; je l'expoſai à un feu véhément de fuſion, & fis fondre le mêlange pendent l'eſpace d'environ une heure; après quoi je briſai le vaiſſeau, au fond duquel je trouvai un Régule d'Antimoine couvert de ſcories vertes non tranſparentes. Ces ſcories en ayant été ſéparées, le Régule peſoit une once, ſix dragmes, & ſept grains. Je fis fondre de nouveau ce Régule avec une once & demie de ſel alcali natif: en procédant de la maniere ſusdite, les ſcories furent encore d'un verd tranſparent, cependant un peu plus clair, & le Régule qui ſe trouvoit deſſous peſa une once, cinq dragmes, & ſix grains. Il étoit beaucoup plus beau, & plus blanc à la vuë que le précédent.

V. Je mêlai encore une fois ce dernier Régule avec parties égales de ſel alcali natif, procédant avec les vaiſſeaux & le feu de la maniere ci-deſſus indiquée, pendant une heure & demie, le feu ayant été pouſſé jusqu'à l'incandeſcence. Après que le creuſet réfroidi eut été briſé, j'eus un fort beau Régule d'Antimoine, brillant & difficile à caſſer, qui peſoit une once, deux dragmes, & ſeize grains. Il n'étoit couvert d'aucune ſcorie; mais je trouvai que le creuſet étoit percé en trois ou quatre endroits vers le bas, au deſſus de la pointe, & le ſel

s'étoit ſans doute échapé par là; de ſorte que le Régule étoit tout à fait ſans ſcories, & couvert ſeulement d'une ſubſtance blanche cryſtalline qui reſſembloit à ce qu'on nomme la neige de Mars, & qui n'étoit réellement autre choſe que les fleurs cryſtallines de l'Antimoine. Le déchet conſidérable du Régule venoit donc de ce que le creuſet s'étoit percé; & on ne pouvoit attribuer cet accident qu'à la partie de caillou qui entroit dans le mêlange de l'argille dont le creuſet avoit été fait; ce qui arrive aſſez ſouvent. Cependant le Régule étoit fort beau, brillant, & en grains clairs.

VI. Malgré le déchet que le Régule d'Antimoine avoit ſouffert, je pris ce Régule déjà tant de fois purifié par l'addition du ſel natif, & je le mêlai de nouveau avec parties égales du même ſel; je fis fondre ce mêlange de la maniere ſusdite, & au bout d'une heure & demie, je trouvai le Régule d'Antimoine couvert d'une ſcorie verte, plus transparente que la précédente. Lorsqu'elle eut été ſéparée, le Régule peſoit une once, une dragme & demie. Il étoit beaucoup plus beau, plus brillant, ſe réduiſoit en grains beaucoup plus clairs, & ces grains étoit plus difficiles à briſer que dans tous les travaux précédens. Quand je l'eus pilé avec un peu de mercure courant & d'eau froide, il s'amalgama aiſément avec le mercure; ce qui n'eſt pas propre au Régule ordinaire d'Antimoine.

VII. La plus grande malléabilité que le Régule d'Antimoine avoit acquis, auſſi bien que ſa plus grande diſpoſition à s'amalgamer avec le mercure, dont le §. précédent vient de faire mention, m'engagerent à continuer les fuſions de ce Régule avec le ſel alcali natif, mais en y joignant une de ces Terres qu'on nomme vitrescibles, c'eſt à dire, une terre de caillou nette. Je pris donc le dernier Régule que j'avois produit, je le mêlai avec une demi-once de ſable blanc de Freyenwalde bien net, qui n'eſt autre choſe qu'un vrai & pur caillou, j'y ajoûtai une once de ſel alcali natif; je mêlai le tout le plus exactement qu'il étoit poſſible en le broyant dans un mortier de verre, dont je m'étois toujours ſervi pour cela; enſuite j'exécutai la fuſion de la maniere qui a été

pluſieurs

pluſieurs fois rapportée; & j'obtins par là, après le réfroidiſſement & la ſéparation du produit, un Régule encore plus beau, couvert d'une ſurface vitrée d'un verd pâle, qui en le briſant donnoit des grains fort fins, lesquels réſiſtoient conſidérablement à l'action du marteau. Le poids de ce Régule étoit d'une once & une dragme. Je le fis fondre auſſitôt avec l'addition d'une once de ſel alcali natif, ſans y joindre de ſable. Après avoir procédé de la maniere ſusdite pendant une heure de tems, les ſcories ſalines qui en tombant avoient couvert le Régule, ſe trouverent déjà d'un verd plus foncé; mais le Régule lui-même étoit du plus beau brillant, & en le briſant paroiſſoit fort fin partout. Il peſoit une once & un ſcrupule. Il eſt à remarquer que le ſel alcali natif employé dans ces travaux ſucceſſifs ſortoit à chaque fois plus verd du Régule, lorsqu'il étoit fondu ſeul avec lui, que lorsqu'on mêloit cet alcali avec du ſable; ce qui eſt aiſé à comprendre, puisque le ſable étant diſſous par l'alcali, empêche le Régule d'en être auſſi fortement attaqué.

VIII. Je joignis encore à ce Régule peſant une once & un ſcrupule, dix dragmes de ſel alcali natif, & cinq de ſable blanc; je mêlai le tout exactement, & je travaillai ce mêlange à un feu violent de fuſion, de la maniere déjà ſouvent indiquée; aprés quoi, les ſcories ayant été enlevées, j'obtins un Régule plus beau que le précédent; il peſoit ſept dragmes & demie, & étoit couvert d'une ſcorie de beau verre tranſparent verd; il réſiſtoit auſſi mieux au marteau que le précédent. Je le fis fondre encore une fois avec ſix dragmes du ſable ſusdit, & trois dragmes d'alcali natif, employant par conſéquent une plus grande quantité de ſable qu'auparavant. Je trouvai alors ſur la ſurface du Régule un verre fort clair, dont la couleur étoit auſſi d'un verd clair; & aprés avoir ſéparé cette ſcorie vitrée, le Régule peſoit encore ſept dragmes & demie, n'ayant ainſi perdu que cinq grains. Il étoit avec cela beaucoup plus difficile à briſer que tous les précédens; mais, au moyen d'un peu d'eau, il ſe laiſſoit fort aiſément amalgamer avec le mercure.

IX.

IX. Cette couleur verte des ſcories qui ſont produites dans toutes les fuſions précédentes, me parut une choſe remarquable; & ſachant bien qu'on ne pouvoit l'attribuer, ni au ſel alcali natif, ni au ſable, je ne pus me diſpenſer de croire, que ce verd étoit tiré du Régule même par le ſel alcali natif. Je m'imaginai en conſéquence qu'un alcali du régne végétal produiroit le même effet, mais il s'en falut beaucoup. Car, bien que je priſſe une portion de ce Régule ſimple d'Antimoine dont il a été parlé §. III. & que je la fiſſe fondre d'abord une couple de fois avec du ſel de tartre pur, & enſuite avec le même ſel & du ſable, en faiſant la fuſion comme ci-deſſus, j'obtins à la vérité dans le premier cas, c'eſt à dire, par la fuſion avec le ſimple ſel de tartre, une ſcorie qui tiroit un peu ſur le verd ſale; mais, en réiterant les fuſions, tant avec le ſeul ſel ſusdit, qu'avec ce ſel & le ſable, je ne pûs plus obſerver aucune trace de couleur verte dans les ſcories, quoique d'ailleurs le Régule devint d'un grain fort fin, & s'amalgamât pareillement en quelque maniere avec le mercure.

X. Je remarquerai encore en paſſant, que M. Pott, dans la premiere Partie de ſa *Lithogeognoſie*, p. 14. fait auſſi mention d'un Régule d'Antimoine qui s'amalgame de même avec le Mercure. On prend quatre parties d'Antimoine, deux parties de limaille de fer, & une partie de craye pulvériſée; on fait fondre ce mêlange, & on obtient un Régule d'Antimoine qui s'amalgame tout de ſuite en le broyant avec le mercure & un peu d'eau. Mais, comme l'addition du fer fait que ce Régule d'Antimoine eſt compoſé, & de l'ordre de ceux auxquels on donne le nom de martial, j'ai fait fondre par curioſité les mêlanges ſuivans ſans l'addition du fer, & j'ai trouvé que la ſimple craye, quoiqu'elle ne diſſolve pas tout le Régule d'Antimoine, en diſſout au moins une partie. En effet, quatre onces d'Antimoine & une once de craye pulvériſée, étant mêlées enſemble, & expoſées à couvert à un feu véhément pendant une demi-heure, après qu'on a briſé le creuſet réfroidi, donnent un peu de Régule, qui ne peſe exactement que deux onces, deux dragmes, & ſept grains, & qui eſt couvert par deſſus d'une ſcorie tirant ſur le rouge ſemblable à ce qu'on nomme (*Rohſtein*).

Ayant

Ayant fait fondre enſuite deux onces d'Antimoine avec deux dragmes de craye, j'obtins un Régule d'Antimoine d'un beau brillant, qui peſoit une dragme & cinq grains, & qui étoit couvert d'une ſubſtance aſſez reſſemblante à l'Antimoine. On doit remarquer ici que ce mêlange qui étoit fort diſpoſé à entrer en flux, perçoit aiſément le creuſet, de ſorte qu'il faloit prendre garde de lui donner un feu plus doux qu'au précedent; autrement tout ſe ſeroit échapé à travers le creuſet pendant la fuſion.

XI. J'augmentai le poids de la craye, en mêlant quatre onces d'Antimoine pulvériſé avec deux onces de craye auſſi pulvériſée; je fis fondre ce mêlange à un feu véhément pendant une heure; & après avoir laiſſé refroidir le creuſet, & l'avoir briſé, je trouvai que le mêlange s'étoit fort bien fondu, la ſurface étant applatie, & reſſemblant à l'Azur de cuivre. La ſcorie reſſembloit à ce qu'on nomme *Rohſtein*, & quand on la gratoit avec le couteau, elle paroiſſoit rougeâtre. Je n'ai pas trouvé le moindre Régule d'Antimoine dans ce mêlange. Ayant enſuite encore mêlé la ſcorie ſusdite avec une demi-once de limaille de fer, & ayant procédé à la fuſion de la même maniere, j'obtins un beau Régule d'Antimoine, qui étoit de nouveau couvert d'une ſcorie rougeâtre, ſemblable à du *Rohſtein*.

RAPPORT
DE QUELQUES EXPÉRIENCES
FAITES SUR LA PIERRE QU'ON NOMME LAPIS LAZULI
PAR M. MARGGRAF.

Traduit de l'Allemand.

I.

Le *Lapis Lazuli* eſt une pierre bleue, tirant ſur le violet, d'une médiocre dureté, marquée de veines blanches, & le plus ſouvent de points minéraux-métalliques, qui reſſemblent à de l'or, mais, qui, examinés de plus près, repréſentent un marcaſſite de ſouffre dans ſa forme cubique. On y trouve auſſi ſouvent des taches blanches brillantes; mais qui, pareillement, quand on y fait plus d'attention, ne ſont autre choſe qu'un talc délié & luiſant. Quelques endroits de cette pierre, quand on la frappe contre l'acier, jettent des étincelles, tandis que le reſte n'en donne point. Elle n'eſt d'ailleurs, ni trop dure, ni trop molle; on peut la polir médiocrement; il y en a quelques endroits qui entrent en efferveſcence avec l'eau forte, & d'autres qui ne le font pas. Suivant quelques Auteurs il s'y trouve de l'or; ce que je ne voudrois pas non plus abſolument nier: mais je ne crois pas qu'il y en ait toujours, & dans toutes, les eſpeces de cette pierre. Quand elle eſt d'un beau bleu, on la regarde comme une choſe rare; elle ſert à divers ouvrages méchaniques, & c'eſt un ingrédient de Médecine qui entre dans ce qu'on nomme *Confection d'Alkermes*. Les Peintres la vantent auſſi pour la préparation de ce beau bleu d'Outremer, qui eſt le plus durable de tous.

II. *Pomet*, dans ſon *Dictionnaire des Drogues*, eſt à mon avis celui qui fournit le plus de particularités au ſujet de cette pierre, par rapport

rapport à ce qui la concerne extérieurement. D'autres Auteurs en ont fait mention par ci par là, tantôt en s'accordant entreux, tantôt avec quelques différences, auxquelles je ne crois pas devoir m'arrêter beaucoup ici, renvoyant les amateurs aux ſources mêmes. Ces ſources ſont, outre *Pomet* que j'ai déjà indiqué, *Kunckel*, dans l'addition concernant les Pierres précieuſes qu'il a jointe à ſon *Ars vitriaria*, *Imperatus* dans ſon *Hiſtoire naturelle* en Latin, Liv. IV. ch. 40. Liv. XXII. ch. 40. & Liv. XXXIII. ch. 10. *Matthiole*, *Jerome Cardan* dans ſon Traité *de Miſtis*, Liv. V. & *Agricola*, *de Natura foſſilium*, Liv. VI. ch. 17. On peut y joindre *le Franc Jouailler*, & *Baccone* dans le *Muſaeo di Fiſica e di Experienſe*, à Cap. 280. En parcourant ces Auteurs, & ſurtout *Imperiali*, *Matthiole*, *Cardan*, *Agricola*, & *le Jouailler*, on ſera aiſément convaincu qu'il n'y a pas grand fruit à en tirer. Quant au reſte, cette pierre, autant que je puis le ſavoir, nous vient de l'Ile de Chypre par Veniſe, & auſſi de la Perſe; & ſelon le Pere du Halde, dans ſa Deſcription de la Chine, on la trouve en grande quantité dans ce Royaume.

III. Dans le *Henckelius Redivivus*, p. 71. & dans les petits Ecrits minéralogiques du même Auteur publiés après ſa mort, p. 404. & 471. le *Lapis Lazuli* eſt mis au rang des minieres de cuivre; & on le trouve placé de même dans les Elémens de la Chymie métallurgique de M. *Gellert*, p. 44. & dans la Minéralogie de *Wallerius*, p. 130. & 131. Il y a encore d'autres Auteurs qui paroiſſent être dans la même opinion, ſans croire pourtant qu'il entre beaucoup de matiere de cuivre dans le *Lapis Lazuli*. Pour moi je penſe qu'il eſt arrivé ici un des cas auxquels on applique le mot *Errare humanum*, qui conſiſte en ce que l'on aura pris des morceaux de *Lapis Lazuli*, qui n'étoient pas nets, & où ſe trouvoient les points d'un jaune couleur d'or dont nous avons parlé; & alors il eſt poſſible que ces morceaux ayent été mêlés avec un peu de marcaſſite de cuivre, de ſorte qu'il étoit aiſé d'y rencontrer quelques traces de cuivre. Quant à moi, dans tous les morceaux de *Lapis Lazuli*, ſur leſquels j'ai travaillé, je n'ai trouvé aucune trace de cuivre;

& la ſuite ſera ſuffiſamment voir que ce marcaſſite du cuivre n'eſt autre choſe qu'un pyrite de ſouffre dans lequel il y a du fer.

IV. L'opinion qui vient d'être indiquée dans le §. précédent, ſavoir que le *Lapis Lazuli* contient du cuivre, auſſi bien que ſa belle couleur bleue, & le peu de connoiſſance qu'on a eu jusqu'à préſent de ſes parties eſſentielles, ſont autant de motifs qui m'ont engagé à faire de ce corps l'objet de divers eſſais, pour parvenir, autant qu'il me ſeroit poſſible, à la découverte de la vérité. Je vais rapporter ici ces eſſais avec ſincérité, en laiſſant à tous ceux qui ſont juges compétens ſur ces matieres, la liberté de ranger cette pierre dans quelle claſſe ils le jugeront à propos.

V. Je viens donc au fait, c'eſt à dire, à l'examen de la pierre en queſtion. La premiere choſe à laquelle je penſai, fut de me procurer une quantité de *Lapis Lazuli* nette, ſans points jaunes métalliques, & à laquelle il n'y avoit guères de matiere blanche de la mine qui fut attachée. A' la fin j'en trouvai de telle que je la deſirois. Je la briſai avec un mrrteau en petites pieces, & je ſéparai auſſi exactement qu'il étoit poſſible les particules minérales & métalliques brillantes qui ſe trouvoient répandues par ci par là, auſſi bien que les parties blanches ſemblables à de la pierre, en ſorte qu'il ne me reſta que les parties bleues de cette pierre ſur lesquelles je me propoſois de faire mes Expériences; & je fis en effet les ſuivantes.

VI. Je pilai une quantité de ce *Lapis Lazuli* dont j'avois choiſi la matiere bleue, & je n'employai pas pour cet effet un mortier de cuivre, ou de fer, qui auroit pu rendre ſuſpectes les Expériences que j'aurois faites enſuite, parce que, vû la dureté de la pierre, il n'auroit pû manquer en pilant de ſe détacher des parties métalliques du mortier, qui ſe ſeroient mêlées à la pierre; mais je me ſervis d'un mortier de verre des plus forts, & il faloit qu'il fut tel pour que la pierre, en la pilant, ne le briſât pas. Encore pris-je la précaution d'enveloper ces parties bleues du *Lapis Lazuli*, dans du papier épais de pluſieurs doubles,

doubles, ſur lequel j'appliquai enſuite les coups de marteau, & ayant mis ainſi ces petis morceaux en d'autres plus petits autant qu'il m'étoit poſſible, je les réduiſis à la fin en une pouſſiere tout à fait déliée.

VII. Je pris une demi-dragme de ce *Lapis Lazuli* ainſi pilé, & l'ayant mis dans un verre net & bien bouché avec un bouchon de liege, je verſai deſſus une demi-once d'eſprit de ſel ammoniac fort & très net, comme étant le plus pur des eſprits urineux. Je bouchai exactement le verre avec un bouchon de liege, & laiſſai d'abord le tout au froid pendant vint quatre heures; après quoi je l'expoſai à une douce digeſtion, Ici je ne pus point remarquer que l'eſprit urineux eût attiré quoi que ce ſoit de la couleur bleuë; ce qui a pourtant coûtume d'arriver & d'être d'abord ſenſible, quand les minieres contiennent du cuivre, & reſſemblent d'ailleurs au *Lapis Lazuli.* Je calcinai pareillement une portion de cette pierre pulvériſée, ſur un têt placé ſous la mouffle; & j'obſervai que ſa couleur bleue ne ſouffroit aucune altération par ce moyen. Je verſai ſur cette pierre calcinée de l'eſprit urineux ſusdit dans la même quantité, & les choſes ſe paſſerent comme auparavant, n'ayant pû m'appercevoir que cet eſprit ſe fût teint le moins du monde de la couleur bleuë; ce qui me conduiſit à cette concluſion néceſſaire, c'eſt que le *Lapis Lazuli* ne contient aucun cuivre.

VIII. Je pris encore un demi lot de la pierre pilée comme il a été dit §. VIII. & l'ayant mis dans un verre net à col étroit, que je pouvois boucher exactement, je le mêlai avec une once, ou deux lots, d'un eſprit de vitriol net, qui avoit été fait par le mêlange d'une partie d'huile de vitriol rectifiée, avec trois parties d'eau pure. Ce mêlange commença un peu à frémir, & donna à peu prés une odeur comme fait un mêlange de limaille de fer & d'huile de vitriol, quand on le délaye avec de l'eau.

Je verſai auſſi ſur deux dragmes de la même pierre pulvériſée une once d'eſprit de nitre ordinaire, qui à la vérité n'avoit pas été concentré, mais qui ne laiſſoit pas d'être fort & pur; & ayant remué ce mê-

 lange,

lange, il entra pareillement en efferveſcence, & même avec un peu plus de force. Enſuite je mêlai un demi-lot de la pouſſiere ſusdite avec une once d'eſprit de ſel commun de Glauber, qui étoit très fort, & rectifié ſur le ſel commun; & l'efferveſcence fut la même que celle du mêlange précédent, accompagnée d'une odeur qui ſentoit tout à fait le foye de ſouffre. Tous ces mêlanges furent enſuite ſoumis à une forte digeſtion; mais ils y demeurerent dans un état d'inconſiſtance, & tout blancs, ſans qu'on pût y obſerver d'autre couleur. Cependant le *Lapis Lazuli* y avoit perdu toute ſa teinture bleüe. Je filtrai là deſſus toutes ces extractions, & j'en fis l'objet des Expériences ſuivantes.

IX. Je pris de la ſolution de cette pierre, faite avec l'eſprit de vitriol, & j'en verſai goutte à goutte ſur une plaque de fer poli; mais je ne pus point remarquer que la plaque eût ſouffert la moindre imprégnation de cuivre, ce qui arrive néanmoins dès qu'on diſſout du cuivre dans l'acide du vitriol. Je mêlai la même ſolution avec de l'eſprit de ſel ammoniac aqueux, jusqu'à une ſaturation complette; aprés quoi j'y verſai encore un peu de cet eſprit urineux. Mais, dans toute cette opération, je n'ai pas trouvé le moindre veſtige de cuivre contenu dans le *Lapis Lazuli;* & s'il y en avoit eu, il ſe ſeroit d'abord trahi par la belle couleur bleue que la ſolution auroit éte obligée de prendre. Je procédai de la même maniere avec les deux autres ſolutions ſusmentionnées de cette pierre, qui avoient été faites avec l'acide du nitre, & celui du ſel commun; & il ne ſe manifeſta pas plus d'indices d'un cuivre contenu dans la pierre. Néanmoins, en verſant ſur cette ſolution de l'eſprit urineux il s'en précipita une pouſſière blanche; & la ſolution faite avec l'acide du nitre en fournit une plus grande quantité; mais, en y verſant de nouveau davantage d'acide nitreux, elle rentra d'abord en ſolution. Je me mis là deſſus à éprouver toutes ces ſolutions, chacune à part, avec de la leſſive faite d'alcali & de ſang; & en ayant ſaoulé ces ſolutions, je remarquai que celle qui avoit été faite avec l'acide du nitre, ſe précipitoit mieux que toutes les autres, d'une belle couleur bleüe; ce qui prouve qu'elle renferme un petit nombre

de

de particules de fer: & cela arrive d'une maniere plus ſenſible encore, quand on s'eſt ſervi de ces petits morceaux de *Lapis Lazuli*, où il y a des points d'un jaune couleur d'or, ces points n'étant autre choſe que de petits pyrites de ſouffre.

Quand on verſe dans les ſolutions de cette pierre faite avec l'acide du nitre & celui du ſel commun un peu d'acide de vitriol, il ſe précipite à la fin quelque choſe de ſelénitique; ce qui prouve qu'une terre calcaire s'y trouve mêlée. En effet, de l'union d'une ſemblable terre avec l'acide du vitriol, il doit toujours réſulter un produit ſelénitique.

X. Je répétai toutes les Expériences qui viennent d'être rapportées dans les §§. VIII. & IX. avec le *Lapis Lazuli* calciné; & toutes les circonſtances furent aſſez les mêmes, excepté que les acides ſusmentionnés n'entrerent pas en efferveſcence avec cette pierre calcinée; que la ſolution faite avec l'eſprit de ſel paroiſſoit fort jaune; & que la leſſive de ſang ſusmentionnée ſe précipitoit d'une couleur fort bleüe. Au reſte, une choſe qui eſt encore digne de remarque, c'eſt que toutes les ſolutions de la pierre calcinée faites avec les trois acides ſusdits devenoient entièrement gélatineuſes; au lieu que les ſolutions faites avec la pierre crüe demeuroient déliées & fluides: à quoi il faut ajouter qu'avec la pierre calcinée l'acide du ſel commun attire plus de matiere ferrugineuſe, que ne le font les autres, au lieu qu'avec la pierre crue, c'eſt l'acide du nitre qui produit cet effet.

XI. Autant que les autres Expériences que j'ai encore faites avec la même pierre, ont pu me permettre de le découvrir, elle contient auſſi une terre gypſeuſe, ou ſelénitique, c'eſt à dire, une terre compoſée du mêlange de la terre calcaire avec l'acide du vitriol, ou ce qu'on appelle autrement, flux de ſpath. En effet, ayant pris un morceau de *Lapis Lazuli* cru, peſant quatre onces, lequel n'étoit point ſéparé de l'eſpece de terre blanche que l'environne, mais étoit encore tel que je l'avois reçu, parſemé de taches blanches, parmi leſquelles il n'y en avoit pourtant point de jaunes, je le briſai par morceaux, & l'expoſai

poſai dans un creuſet à fondre à un feu qui n'étoit pas trop fort. Là il commença à jetter un fort bel éclat, à la façon de ce qu'on nomme les *Heſperi*, & rendit l'odeur qu'ils ont coutume de rendre. Lorsque j'augmentai le feu, ce bel éclat d'un blanc bleuâtre diſparut, & la pierre entra en incandeſcence. L'ayant laiſſée dans cet état encore une demi-heure, je ſecouai cette pierre embraſée dans un vaiſſeau de terre bien brûlée, neuf & bien net, rempli d'environ une livre & demie d'eau diſtillée. Après que le tout fut réfroidi, je tirai la pierre hors de l'eau, je la fis ſécher, & répétai l'opération conduite jusqu'à l'incandeſcence. J'éteignis de nouveau cette pierre dans la même eau qui avoit auparavant ſervi à cet uſage, & je réitérai cetravail encore ſix ou ſept fois. Après avoir fait écouler l'eau, je fis ſécher les morceaux de pierre, qu'il fut enſuite très aiſé de mettre en pouſſiere. Là deſſus je filtrai l'eau qui avoit été rendüe fort trouble par la pierre qu'on y avoit éteint à pluſieurs repriſes. Je verſai dans cette eau filtrée, une leſſive alcaline tout à fait nette, ou une ſolution de ſel de tartre nette, & alors il ſe précipita auſſitôt une pouſſiere blanche. Je continuai à verſer de cette leſſive alcaline auſſi longtemps que la précipitation dura. A la fin j'édulcorai bien la pouſſiere précipitée, & l'ayant examinée ſuivant toutes les régles de l'art, je trouvai que ce n'étoit autre choſe qu'une vraye terre calcaire. J'examinai le liquide qui s'en étoit ſéparé, en le faiſant évaporer & cryſtalliſer, & j'en tirai un vrai tartre vitriolé. Je ne pus donc tirer d'autre concluſion de tout ceci, que celle qui a déjà été indiquée à la fin du §. IX. ſçavoir qu'il doit ſe trouver dans cette pierre une ſubſtance calcaire, & auſſi, ſuivant la derniere Expérience qui vient d'être rapportée, une ſubſtance gypſeuſe. Ce qui tient du caillou ſe découvre de ſoi-même, puisque cette pierre, lors même qu'elle eſt la plus pure, donne du feu en divers endroits, quand on la frappe contre l'acier.

XII. J'ai déjà remarqué à la fin du §. VII. que cette pierre ne change point ſa couleur bleue en la calcinant. Et c'eſt là ſans doute l'indice d'un vrai *Lapis Lazuli*, comme divers Auteurs l'ont déjà remarqué. Cette pierre ſe diſtingue par là des minieres de cuivre bleues,

bleues, & des terres bleues comme, par exemple, de la terre d'*Eckertsberg*, &c. Car celles-ci perdent tout à fait leur couleur bleüe, quand on leur donne une incandeſcence modérée; au lieu que notre pierre conſerve la ſienne à un feu aſſez conſidérable. Ayant ſoumis pendant une demi-heure un morceau de *Lapis Lazuli* d'un très beau bleu dans un creuſet fermé à une forte incandeſcence, ſon bleu demeura tout auſſi beau. Un autre morceau, mis dans un creuſet à fondre fermé & luté, & tenu à un feu véhément de fuſion pendant une heure, s'étoit fondu en une maſſe écumeuſe d'un noir tirant ſur le jaune, où l'on voyoit par ci par là quelques taches bleuâtres. Un autre morceau d'un beau bleu, ayant été traité de même, & cela devant le ſoufflet le plus fort, ſe fondit entierement en une ſorte de verre blanchâtre, qui montroit pourtant encore en pluſieurs endroits quelques reſtes de ſon bleu foncé. On reconnoit par tout ceci, non ſeulement la conſtance avec laquelle la couleur bleüe réſiſte au feu, mais encore que cette pierre eſt une compoſition ou un mêlange; puisque, ni la chaux pure, ni le caillou pur, ni le flux de ſpath pur, n'entrent en fuſion, & que cela ne leur arrive qu'après l'addition de quelque autre matiere.

XIII. Pour m'aſſurer mieux de l'exiſtence des particules de fer, dont j'ai déjà fait mention dans mon §. X. je mêlai une dragme & demie de ſel ammoniac avec une dragme de *Lapis Lazuli* pulvériſé, & auparavant calciné. En pilant ces matieres enſemble, il en ſortit quelque odeur urineuſe. Je mis là deſſus ce mêlange dans une petite retorte, & je le fis ſublimer à un feu véhément; enſuite, après le réfroidiſſement, je trouvai que le Salmiac s'étoit ſublimé d'un beau jaune dans le cou de la retorte, comme ce qu'on nomme les fleurs martiales de ſel ammoniac. Le réſidu paroiſſoit encore d'un beau bleu; il tiroit ſur le violet, & peſoit juſte une dragme. Je le leſſivai avec une quantité convenable d'eau diſtillée; je filtrai l'eau qui avoit repoſé deſſus, & j'y verſai goutte à goutte un peu de leſſive alcaline; alors il ſe précipita une bonne quantité d'une pouſſiere blanche, qui étoit une terre calcaire. Après que ce ſublimé eut été diſſous dans l'eau, & qu'il eut

repoſé quelque tems, il s'en précipita encore, mais en fort petite quantité, une pouſſiere couleur d'orange, comme une ocre de fer.

XIV. Je mêlai encore une dragme & demie de cette pierre pulvériſée & calcinée avec autant de fleurs de ſouffre pures, & je ſublimai pareillement ce mêlange par degrés dans une petite retorte garnie à laquelle on avoit adapté un récipient, & à la fin je conduiſis le feu jusqu'à une forte incandeſcence. Mais, dans tout ce travail, je ne remarquai aucun changement, ni dans le ſouffre qui s'étoit élevé, ni dans le réſidu. Celui-ci paroiſſoit encore d'un beau bleu, & n'avoit été altéré d'ailleurs en rien. Il en fut à peu près de même, lorsque je ſublimai deux dragmes de cette pierre pulvériſée avec parties égales de Mercure ſublimé corroſif, en procédant de la maniere ſusdite. Le Mercure ſublimé monta dans ſa forme cryſtalline ordinaire, & je ne trouvai point qu'il s'en fut révivifié quoi que ce ſoit. Ce qui étoit demeuré dans la retorte n'avoit ſouffert aucune altération, & paroiſſoit encore d'un fort beau bleu. La même choſe arriva auſſi avec un mêlange de pierre calcinée & pulvériſée jointe à parties égales de cinnabre pur; ces deux matieres ayant été pilées enſemble, & ſublimées de la maniere ſusdite, le cinnabre ne fut point révivifié, & le réſidu demeura d'un fort beau bleu.

XV. Une partie de ſel de tartre pur avec deux parties de ce *Lapis Lazuli* pulvériſé, ayant été mêlées, miſes dans un creuſet à fondre couvert & bien luté, & expoſées pendant une heure à un feu de fuſion violent, ſe changerent en une maſſe poreuſe d'un verd jaunâtre. Parties égales de cette pierre & de ſel de tartre, exactement mêlées enſemble, & traitées de la même maniere, produiſirent une maſſe fondue, pareillement poreuſe, blanchâtre, & recouverte d'une autre matiere poreuſe jaunâtre.

XVI. Trois parties d'un Nitre pur mêlées avec une partie de notre *Lapis Lazuli* pulvériſé, & conduites au feu par degrés jusqu'à l'incandeſcence, ſe fondirent d'abord tout à fait tranquillement; le feu ayant

ayant été augmenté, la pierre conſerva ſa couleur bleüe; à un feu plus fort encore, le mêlange s'épaiſſit intérieurement, jusqu'à ce qu'à la fin il en réſulta une maſſe griſe. L'ayant jettée toute chaude dans de l'eau diſtillée, elle donna à cette eau une couleur bleue tirant ſur le verd, mais qui s'évanouit dans le cours d'une nuit, l'eau ayant recouvré toute ſa clarté. Dans ce travail le nitre eſt pour la plus grande partie alcaliſé; ce qui paroit non ſeulement en ce que cette eau a un goût alcalin fort, mais auſſi en ce qu'avec les acides elle éprouve un grand frémiſſement. Quant à la couleur bleue de cette pierre, elle s'étoit tout à fait perdue.

XVII. Pour eſſayer ſi cette pierre bleüe donneroit de la couleur à la matiere qu'on appelle fritte de verre, je mêlai une demi-dragme de ſel de tartre pur avec une dragme de caillou pulvériſé, & dix grains de pierre bleue auſſi pulvériſée, & je fis fondre le tout dans un creuſet couvert jusqu'à la vitrification. Ce mêlange entra dans une fuſion claire, & j'obtins un beau verre tranſparent couleur de citron. Je mêlai encore une demi-dragme d'alcali minéral, qui avoit été dégagé de ſon humidité naturelle, avec une dragme de caillou pulvériſé, & dix grains de *Lapis Lazuli*, & l'ayant mis en fuſion à un feu véhément, comme ci-deſſus, cela donna un verre tranſparent aſſez blanc dont la ſurface ſupérieure réfléchiſſoit les rayons de lumiere d'une couleur rougeâtre. Une dragme de Borax calciné ayant encore été fondue avec dix grains de *Lapis Lazuli*, à couvert comme les mêlanges précédens, le produit en fut un beau verre couleur de chryſolithe. Il n'y a donc dans toutes ces opérations aucune trace de cuivre à découvrir; mais elles donnent plutôt lieu de conjecturer l'exiſtence d'une ſubſtance martiale déliée dans cette pierre.

EXAMEN CHYMIQUE
D'UNE
MINE D'ARGENT LAMELLEUSE,
OU
D'UNE ESPECE DE LIEGE MINERAL QU'ON TROUVE, QUOIQU'EN TRE'S PETITE QUANTITÉ, DANS LES MINES DE DOROTHÉE ET CAROLINE, SUR LE HAVT HARTZ.

PAR M. LEHMANN.

Traduit de l'Allemand.

Il ſeroit à peu près impoſſible de faire une enumération exacte de toutes les manieres différentes que la Nature employe pour minéraliſer les métaux dans leurs mines, & de toutes les formes variées ſous leſquelles elle nous les préſente. Il eſt à la vérité déraiſonnable de multiplier les eſpeces ſans néceſſité, & de répandre en inventant de nouveaux noms de nouveaux embarras dans la Minéralogie qui n'eſt que trop difficile par elle-même. Cependant il n'eſt pas toujours poſſible d'éviter cet inconvénient; & il ne peut même qu'aller en augmentant, dès là qu'on découvre preſque d'année en année de nouveaux mêlanges de matieres minerales, qu'on n'avoit point connu auparavant, & qu'il faut tâcher de rapporter à quelcune des claſſes déjà reçues. Le Mineur, qui ne ſe met en peine que de la maniere dont il peut venir à bout de tirer du ſein de la terre les minieres qu'elle renferme, eſt pour l'ordinaire content, quand celle qu'il vient de détacher a de l'éclat & de la peſanteur. S'il lui tombe ſous la main quelque choſe d'inconnu, & qui lui paroiſſe mériter une attention particuliere, il le montre à ceux qui ſont prépoſés à ſon travail; mais ceux-ci n'ont guères d'autre expédient, que de mettre la maſſe à l'épreuve: ſi le

ſi le produit en eſt avantageux, elle eſt réputée bonne, & la miniere nouvellement découverte reçoit un nom, fondé communément ſur la reſſemblance avec d'autres minieres connues. Je ne m'arrêterai point à rapporter ici pluſieurs exemples de cet ordre; on connoit aſſez toutes les minieres différentes dont les noms (*) ont été déduits du rapport qu'elles paroiſſent avoir avec du ſuif, de la viande, du cuir, du lin, du papier, du liege, &c. J'aime mieux décrire ici une eſpece de miniere d'argent d'un ordre particulier & d'un produit aſſez riche, qui ſe préſente fort rarement, & qui, autant que je puis le ſçavoir, n'a encore été trouvée que dans la fameuſe Mine de *Clausthal* dans le *Hartz* ſupérieur, qui porte le nom de *Dorothée & Caroline.* Elle y a été appellée *Blätter-Ertzt*, ou *Berg-Zunder*, comme qui diroit *Miniere en feuilles*, ou *Amorce minérale.*

Pour commencer par l'Hiſtoire de ce minéral, il y a plus de vint ans que la découverte en a été faite dans la Mine *Dorothée;* & ce fut le Docteur *Prückmann* défunt, grand Fabricateur de nouveaux noms, qui m'envoya cette matiere il y a quinze ans paſſés, ſous le nom de *Bergzunder.* Peu de mois après, il me fit encore un autre envoi de la même matiere; & il l'appelloit *miniere mercurielle.* Les choſes en demeurerent là jusqu'au temps où j'allai moi-même viſiter le *Hartz*, & me rendis en particulier à *Clausthal.* Je trouvai alors cette miniere déſignée par le nom de *Blätter-Erzt*, en partie dans ces deux mines en les viſitant, en partie dans l'endroit où l'on ſépare les minieres de parties hétérogenes avec le marteau, & auſſi dans les Collections de quelques amis. Comme on ne trouve pas cette matiere en fort grande abondance, & qu'elle eſt avec cela fort legere; il me fut aſſez difficile, & ce ne fut pas ſans fraix que j'en vins à bout avec le ſecours de mes amis, d'en raſſembler quelques onces; & c'eſt cette petite proviſion qui m'a mis en état de faire les expériences dont je vais rendre compte. Un homme très verſé dans la Minéralogie, & qui eſt Receveur Royal

(*) En Allemand *Bergtalck, Bergflachſ, Bergfleiſch, Bergkork, Bergpapier, Bergleder*, &c.

& Electoral des Dixmes des mines, M. *Schlemm*, eut en même tems la bonté de me faire préſent d'un echantillon curieux de cette miniere qui mérite que j'en faſſe ici la deſcription. Elle eſt du poids d'environ deux livres, & conſiſte dans un mêlange de *Quartz*, de *Fluſſ-Spath*, & de *Spath* calcaire, dont une partie s'eſt unie ſolidement, & l'autre eſt plutôt cryſtalliſé; à quoi ſe trouvent jointes diverſes autres matieres minérales tenant du plomb, du ſouffre, & du cuivre, dont les unes ſont cubiques, tandis que les autres ſont comme pénétrées & fondues enſemble.

C'eſt ſur cette eſpece de pierre, & ſur les minéraux qui s'y trouvent mêlées, qu'en partie repoſe notre *miniere en feuïlles*, tout à fait friable, en ſorte qu'on peut aiſément la détacher avec les doits, & en partie elle eſt entremêlée & éparſe dans les cavités de cette Pierre. Cette Miniere en feuïlles peut donc être définie *une eſpece de Mine contenant de l'argent, friable, d'un rouge obſcur, flexible, legère, ſurnageant au deſſus de l'eau, colorant les doits, conſiſtant en petites feuïlles trés minces, qui repoſent les unes ſur les autres, mêlée d'un Saffran de fer talqueux tirant au rouge, avec diverſes particules déliées de Spath, de Quartz, & de Galene, &c. répandues entre ces feuïlles, comme ſi elles en avoient été arroſées.*

Il paroit par cette deſcription que le nom impoſé à cette matiere étoit en effet celui qui lui convenoit le mieux, au moins celui de *Blätter-Ertzt*. Car, pour celui de *Bergzunder*, je ne trouve d'autre reſſemblance entre cette miniere & de l'amorce, ſinon que l'une & l'autre ſont fort legères, qu'en les expoſant à la chandelle elles ſe conſument, & qu'elles colorent les doits: car, quand on fait attention à leur ſtructure particuliere, la reſſemblance s'évanoüit; à quoi il faut ajoûter qu'avec quelque force qu'on batte du feu au deſſus de cette matiere, il n'y prend point, & qu'en la brûlant, elle ne ſe réduit pas en cendres. On la rencontre dans le creux des mines, poſée ſur d'autres minieres, par exemple, ſur la galene, ou la mine de plomb compacte (*Bleiſchweig*) ſur le quartz, le ſpath, le marcaſſite de ſouffre, & d'autres pierres pareilles

pareilles à celles dont j'ai donné ci-deſſus la deſcription; & ces feuilles legères ſemblent s'être attaché au deſſus des endroits où repoſent ces couches minérales ou pierreuſes.

Il ne m'eſt pas connu d'ailleurs que perſonne ait encore entrepris de les décrire, & d'en faire l'objet de ſes recherches.

Je devrois peut-être commencer par rapporter cette matiere à une claſſe déterminée; mais je ſuis obligé d'avouer que la choſe n'eſt guères faiſable, vû la différence qui ſe trouve entr'elle & toutes les autres minieres d'argent connues. Il y a plutôt deux eſpeces pierreuſes, avec leſquelles elle auroit un plus grand rapport; ce ſont celles qu'on nomme *liege minéral*, & *papier minéral*, ou bien le fin *cuir minéral*, dont parle *Wallerius*. A' la couleur près la reſſemblance avec ce dernier eſt aſſez grande; ce ſont également des feuilles déliées qui repoſent les unes ſur les autres, & parmi leſquelles ſe trouvent diſperſées des particules de ſpath & de quartz. Mais, comme le fin cuir minéral ne fond pas de lui-même au feu, cela fait déjà une différence des plus notables, & qui ne permet plus de rapporter le minéral en feuilles à cette eſpece. A' l'egard du liege minéral, notre matiere lui reſſemble en ce que l'un & l'autre ſe fondent par eux-mêmes à un feu médiocre en une maſſe noire; comme cela a déjà été obſervé par le célébre *Henckel*, pag. 396. de ſes petits Ecrits Minéralogiques, & par M. *Wallerius*, pag. 191. de ſon *Régne minéral*, en parlant du liege minéral de *Dannemor*. Mais nous nous retrouvons arrêtés ici par la contexture de nos feuilles, ſans compter que jusqu'ici on n'a point encore trouvé que le liege minéral contint de métal. Neanmoins, comme les couleurs ſont une choſe contingente, qu'on peut en dire autant du tiſſu irrégulier des fibres du liege minéral, auſſi bien que de toutes les figures différentes des productions cryſtallines, & même qu'il n'eſt pas eſſentiel à ces matieres de contenir du métal, comme le font les autres matrices métalliques, je ſerois porté à croire que notre miniere en feuilles, vû la conformité qu'elle fait paroître au feu avec le liege minéral, peut être rangée ſous cette eſpece de concrétion pierreuſe. Mais quelles ſont à préſent les parties conſtituantes de cette miniere?

Avant

Avant que d'entrer dans le détail des Expériences qui répandent du jour ſur cette queſtion, il eſt à propos de rapporter quels ſont les préparatifs dont je les ai fait précéder. On a déjà vû ci-deſſus que ce n'étoit qu'avec beaucoup de peine, à grands fraix, & en implorant l'aſſiſtance de mes amis, que j'avois pû parvenir à en acquérir quelques onces: encore étoient-elles fort mêlées de quartz, de ſpath, de cailloux, & d'autres matieres ſemblables. Je commençai par ſéparer les pieces les plus conſidérables de cette matiere avec beaucoup de ſoin. Je pris enſuite de l'eau diſtillée, où je jettai tout le reſte, & le lavai, afin d'en ſéparer toutes les parties étrangeres qui ſe précipiterent au fonds; & de cette maniere je parvins à n'avoir que du minéral en feuilles tout pur, que je fis ſécher, pour l'employer à mes Expériences. Il n'y avoit pourtant pas eu moyen de ſéparer par cette voye toutes les particules déliées qui ſe trouvoient répandues entre les feuilles. L'eau ne cauſa la ſolution d'aucune partie de cette matiere; ſeulement elle la rendit toute fort molle, & comme bourbeuſe; mais après le deſſéchement elle ſe réunit, & prit une conſiſtance fort ſolide.

Voici préſentement le détail des travaux auxquels je l'ai ſoumiſe.

Je commençai par la ſublimation. Je mis pour cet effet un ſcrupule de cette miniere dans une retorte de verre garnie, & l'expoſai à un feu découvert, que je continuai jusqu'à fondre la retorte. Il n'en réſulta qu'une trace fort foible de ſouffre; & rien du tout n'avoit paſſé dans le récipient. Quoique le feu n'eût pas duré au delà de trois quarts d'heure, cette miniere s'étoit pourtant fondue & attachée au fonds de la retorte en une maſſe noire de l'eſpece des ſcories, qui en la rompant parut brillante & métallique, comme on la voit dans les mines à demi fondues dans les fonderies. Un ſcrupule de cette miniere avec deux ſcrupales d'arſenic blanc cryſtallin, traité de la maniere précédente, n'a rien fait paſſer dans le récipient. L'arſenic s'étoit ſublimé de couleur d'orange, avec une odeur très forte de ſouffre; & la miniere, comme dans l'Expérience précédente, s'étoit fondûe enſemble au fond en une maſſe tout à fait ſemblable à celle dont il a été fait mention.

Cette

Cette miniere avec du ſalmiac purifié, parties égales, ſavoir un ſcrupule de chacun, ne ſe dégagerent point de leur urineux pendant qu'on les broyoit enſemble; mais durant la ſublimation il y eut environ deux grains de ſel volatil urineux ſec qui paſſerent par deſſus. Le reſte du ſublimé étoit de couleur d'orange, avec un peu de ſublimé blanc; mais la miniere s'étoit fondue dans la retorte, tout comme dans les deux Expériences déjà rapportées.

Un ſcrupule de la même miniere avec une dragme de Mercure ſublimé, ayant été traités de la même maniere, le Mercure gagna le haut ſous la figure blanche cryſtalline; mais enſuite, quand le feu eût été fort augmenté, vinrent quelques grains de pur cinnabre, la miniere s'étant fonduë ſous l'apparence d'une éponge, d'un brun obſcur, mais étant expoſée à l'air elle s'y écoula d'abord.

Les Expériences dont je viens de rendre compte, me firent voir d'une maniere ſuffiſante, que cette miniere étoit très aiſée à fondre. Je pouſſai donc plus loin mes travaux, pour me mettre exactement au fait de ce qu'elle contenoit de métallique. Pour cet effet j'en peſai exactement deux dragmes, je les pilai dans un mortier de verre bien net, les mis enſuite ſur un beau têt d'épreuve neuf, que je couvris avec un autre. Après cela je plaçai le tout dans un fourneau d'épreuve ſous une mouffle, je donnai tout doucement le feu, & je l'augmentai inſenſiblement, jusqu'à ce que j'eus apperçu que mon têt s'embraſoit extérieurement, & que les particules déliées de ſpath répandues ſur la miniere ne rendoient plus de pétillement. J'ôtai alors le têt de deſſus, & me mis à remuer la miniere tout de ſuite. Cette précaution étoit indiſpenſablement néceſſaire; car, ſi j'avois donné la chaleur trop vîte, ſans remuer continuellement, rien n'eſt plus certain que ce que cette miniere, ſi aiſée à fondre par elle-même, ſe ſeroit réunie en un clin d'oeil en une maſſe, & que par là tout mon travail auroit été à pure perte; ſans compter qu'avec une proviſion auſi petite que la mienne, j'aurois eu tort de négliger des eſſais où il en entroit un demi-lot. Pendant que cela grilloit, je levois de tems en tems le têt, & je re-

marquois une forte odeur de ſouffre; la miniere au commencement devint jaune, & à la fin, quand tout fut entierement calciné, elle paroiſſoit d'un gris de cendres. Malgré mon attention à remuer continuellement, elle s'étoit pourtant un peu fondue enſemble; mais on ne laiſſoit pas de pouvoir la broyer fort aiſément dans un mortier de verre: après quoi elle peſoit encore une dragme, deux ſcrupules & demi, de ſorte que toute la manoeuvre avoit cauſé un demi ſcrupule de déchet. Je pris de cette miniere ainſi calcinée une drachme, ou un quintal d'eſſai, que je mêlai avec huit drachmes de graine de plomb; je remis le tout ſur un têt bien net dans le fourneau d'épreuve, afin de l'y faire bouïllir convenablement. Mais, quelques ſoins & quelques peines que j'y apportaſſe, cette matiere demeura longtemps ſans vouloir ſe mêler & entrer en flux; ſeulement le plomb pouſſé au feu chaſſoit principalement la miniere vers le bord, ce qui venoit de ce ſaffran de fer tenant du talc qui s'y trouve, comme nous le verrons mieux plus bas. Cependant, à force de remuer avec un crochet ardent, & d'augmenter la chaleur, j'amenai les choſes au point que la miniere entrât dans le plomb, mais ſans une véritable réunion, & ſeulement en morceaux. J'y ajoûtai encore quatre drachmes de la même graine de plomb, je donnai le feu, & cela fit une fuſion claire, déliée, & dans laquelle la miniere avoit fort bien pénétré le plomb. Je laiſſai réfroidir le têt, & charger la fuſion de ſcories, que je verſai dehors, & j'obtins neuf drachmes de plomb bien fondu. Les ſcories étoient d'un brun très foncé. Je pris de nouveau ce plomb fondu, & le mis piece à piece ſur une coupelle bien embraſée, je l'y pouſſai, & je trouvai après avoir déduit l'argent qui avoit été caché dans le plomb granulé, que cette miniere contenoit quinze lots & un ſcrupule d'argent pur par quintal; mais, ayant voulu effectuer une nouvelle ſéparation par l'acide du nitre, je n'apperçus aucun indice d'or. La quantité d'argent contenu dans cette miniere que je viens d'exprimer, méritoit ſans contredit une attention particuliere. A préſent on demandera, s'il faut l'attribuer à la miniere même, ou aux particules de galene de plomb qui ſe trouvent répanduës entre les feuïlles, & qu'on ne peut venir à bout d'en

ſéparer,

ſéparer, même en les lavant? Je ſuis aſſuré que c'eſt de la miniere même que cela procéde. Car, premièrement, il y avoit ſi peu de cette galene déliée ſur les feuïlles que cela ne ſuffiſoit pas pour faire aller d'abord la miniere à fond dans l'eau. En ſecond lieu, ce n'étoit que la pure galene; & l'on ſait que c'eſt bien tout ſi elle donne quatre à cinq lots d'argent au quintal. Troiſièmement, on ne pouvoit remarquer, ni dans la miniere même, ni tout à l'entour, aucuns indices d'un métal noble. J'avois, en quatrième lieu, ſi bien choiſi & ſi exactement lavé ma miniere auparavant, qu'il ne pouvoit aſſurément y être reſté que très peu de matiere étrangère; d'où s'enſuit que ce grain conſidérable d'argent doit être le produit des feuïlles mêmes de la miniere. Mais ce qui m'a encore plus convaincu, que ces feuïlles étoient réellement la matrice de l'argent ſusdit, c'eſt l'épreuve à laquelle je les ai ſoumiſes par le moyen des acides diſſolvans; on y voit manifeſtement qu'il n'exiſte point d'argent natif dans notre miniere. Il eſt à propos, ce me ſemble, que je rapporte ici ces épreuves en peu de mots.

Je pris un ſcrupule de miniere ſur lequel je verſai une dragme & demie d'acide de ſalpetre net. Ce mêlange ſe mit ſur le champ à bruire avec force, il en ſortit des vapeurs, & il s'éleva dans le verre. Au bout d'environ ſix minutes le bruit ceſſa, & il ne ſembloit pas que la ſolution dût aller plus loin; mais, quand elle eut paſſé une nuit dans la digeſtion la plus douce, le matin la plus grande partie ſe trouva diſſoute, & il ne reſtoit rien au fond qu'une terre déliée blanche, qui, après l'écoulement de la liqueur & le deſſéchement, peſoit huit grains. Ce ne pouvoit être une terre alcaline; car autrement elle ſe ſeroit diſſoute dans l'acide du ſalpetre. Si c'avoit été une pure terre ſélénitique, elle n'auroit pas manqué de ſe diſſoudre, lorsque j'en ai fait bouïllir pendant longtemps & avec force deux grains dans une once d'eau diſtillée bien nette; & avec l'huile de tartre par défaillance elle auroit dû ſe précipiter comme une terre calcaire, ce qu'elle n'a pas fait. Ce n'étoit point non plus de l'argent diſſous & précipité comme une lune cornue; car premierement l'argent, du moins autant que j'ai pu l'obſerver, n'eſt pas engagé auſſi profondément dans cette miniere; en ſe-

cond lieu, mon acide de nitre étoit certainement pur, & ſans aucun acide de ſel commun; troiſièmement, cette terre demeuroit d'un beau blanc même en plein air, au lieu que l'argent cornu a coutume de devenir bleuâtre en un inſtant. En un mot, c'étoit une terre déliée argilleuſe, formée par le mêlange d'une quantité de talc blanc avec du quartz délié; & c'eſt là dedans qu'on trouve, après les eſſais indiqués, l'argent qui y eſt contenu.

La même miniére, avec de l'eau régale faite de ſept parties d'acide du nitre & d'une partie de ſel ammoniac dépuré, offrit à tous égards les mêmes phénomenes. Après que j'eus ſéparé par la filtration ces deux acides des terres blanches ſusdites, l'alcali ne vint à bout d'en précipiter qu'une très petite quantité de particules de fer de couleur jaune; & en verſant ſur l'une & l'autre de la leſſive de ſang, elles devinrent d'un beau bleu.

L'huile de vitriol attaqua en un inſtant cette miniere avec violence, & cauſa une odeur déſagréable fort reſſemblante à celle du foye de ſouffre; ce qui venoit ſans doute des particules déliées de ſpath calcaire répandues ſur la miniere en feuïlles. Cependant ces deux phénomenes ceſſerent bientôt; & bien que j'euſſe verſé deſſus encore trois parties d'eau diſtillée, & que je les euſſe mis enſuite à une digeſtion convenable, je ne trouvai pourtant par la précipitation avec un alcali rien qu'une quantité extrêmement petite de cette terre blanche friable, que ne peut être qu'une terre calcaire déliée diſſoute, ou une terre d'alun; mais il y en avoit ſi peu qu'il étoit impoſſible de la ſoumettre à aucunes épreuves.

De l'huile de tartre par défaillance très nette, verſée ſur cette terre, & miſe en digeſtion dans un ſucrier de verre bien couvert, n'attaqua point non plus la miniere; & après la filtration & la cryſtalliſation, on n'apperçut que quelques cryſtaux de tartre vitriolé, qui peuvent aiſément être le produit des particules déliées de marcaſſites de ſouffre répandues entre les feuïlles.

Une

Une leſſive d'alcali cauſtique, que je prépare de deux parties de ſel de tartre, & d'une partie de chaux vive, ayant été diſſoute dans trois parties d'eau diſtillée, & verſée ſur cette miniere, elle ſe troubla à la vérité un peu, mais il ne parut pas que la miniere en fut conſidérablement attaquée. Ainſi je mis le tout à digérer ſur un fourneau chaud, & après l'y avoir laiſſé trois jours, je le filtrai.

La miniere ne parut avoir ſouffert aucun changement, ni dans ſa couleur, ni dans ſa texture, excepté qu'elle s'étoit gonflée, & étoit devenue plus gluante. Après trois fois vint-quatre heures de digeſtion ſur un fourneau chaud jour & nuit; cette miniere ſe montra à la vérité encore inaltérable dans ſa forme, mais fort réduite en bouïllie, & toute ſa ſurface étoit couverte de cryſtaux de tartre vitriolé, étroitement unis enſemble. Je les ſéparai autant qu'il étoit poſſible, je trouvai un ſcrupule qui étoit le produit d'une dragme de miniere avec une once de cette leſſive. Que perſonne ne croye qu'une auſſi grande quantité d'acide vitriolique ait pû être attirée de l'air dans cette leſſive alcaline, dans un eſpace de temps auſſi court, la choſe n'eſt pas poſſible; mais cette leſſive a réellement diſſous qnelque quantité de la matiere de marcaſſite de ſouffre contenue dans la miniere, & s'eſt chargée d'une portion de ſon acide vitriolique. Ayant encore fait une digeſtion de trois jours avec une ſemblable leſſive ſur un fourneau chaud, & y ayant fait ſuccéder la filtration, je voulus précipiter la liqueur filtrée avec du vinaigre diſtillé de l'acide du nitre &c. mais il ne ſe précipita rien. Lorsque j'eus fait enſuite évaporer une partie de cette liqueur filtrée, il ne ſe fit point non plus de cryſtalliſation; d'où il s'enſuit que cette forte leſſive alcaline ne s'étoit imprégnée que de quelques particules vitrioliques. L'eſprit de ſel ammoniac n'eut pas plus de force ſur cette miniere, & il ne l'attaqua point du tout.

Il en fut de la terre calcinée ſous la mouffle comme de la terre crûe avec les diſſolvans acides, c'eſt à dire qu'elle commença par bruire une couple de minutes, & que ſa ſolution extraite par l'acide du vitriol ſe précipita avec la leſſive de ſang en une couleur d'outremer admi-

 rable;

rable; tandis que la ſolution par l'acide du nitre ſe précipite d'un bleu foncé, & que celle par l'acide du ſel eſt jaunâtre.

L'huile de tartre par défaillance précipita un peu de terre friable blanche de l'extraction par l'acide vitriolique.

L'huile de tartre précipita de celle qui avoit été faite par l'acide du ſel, quelque choſe qui étoit d'un gris de cendre foncé, & qui, après la filtration, l'édulcoration, & le deſſéchement, parut d'un bleu ſale; & ce n'étoit autre choſe que du fer précipité par l'alcali qu'on avoit continué à verſer deſſus. Mais, après un entier deſſéchement, cela paroiſſoit d'un blanc jaunâtre.

De l'acide du ſalpetre il ſe précipita une pouſſiere blanche friable par l'affuſion d'un alcali.

Je n'eus pas beſoin de procéder à la vitrification de cette miniere, puiſqu'elle avoit déjà montré ſon verre ſemblable à du recrément de fer, lorsque je l'avois réduite en ſcories avec le plomb.

Mais ce que je fis encore, ce fut de faire cuire cette terre calcinée en y mêlant un peu d'eau, & de la faire ſécher, comme on a coûtume de le faire avec une argille doucement calcinée.

Tel eſt donc le petit nombre d'eſſais que j'ai pû faire ſur cette miniere d'argent qui n'eſt pas encore bien connue; & la mince proviſion que j'en avois, ne m'a pas permis d'aller plus loin. Il réſulte néanmoins avec aſſez d'évidence de tout ce que j'ai rapporté; que *cette miniere eſt compoſée d'une terre argilleuſe déliée, mêlée avec ce qu'on nomme ſaffran de Mars talqueux & avec du ſouffre; de façon que ces différentes matieres réunies s'arrangent en feuilles poſées les unes ſur les autres, & qu'entre ces feuilles il ſe répand des particules déliées de marcaſſites de ſouffre, de plomb, de chaux, & de flux de ſpath, avec quelque peu de quartz; cette miniere etant comme une matrice qui reçoit l'imprégnation métallique de l'argent.* Ce ſont là en effet les différentes obſervations que j'ai eu lieu de faire dans les eſſais dont j'ai rendu compte juſqu'ici.

La

La terre argilleuſe ſe manifeſte ſenſiblement, par la maniere dont cette miniere en forme crue s'amollit dans l'eau, tient enſemble, & prend une forte conſiſtance en ſéchant. On peut même ajoûter que cette terre blanche qu'on en ſépare par l'eau régale & l'acide du ſalpetre ſe montre réellement en partie comme une terre argilleuſe blanche pure.

On découvre *le ſaffran de fer*, en partie dans cette terre blanche tenant du talc, qui ſe trouve ſous la terre blanche, & qui ſe précipite auſſi de l'extraction de cette terre calcinée avec l'acide du ſalpetre par le moyen de l'acide du ſel commun. La couleur même de cette miniere reſſemble tout à fait à celle du ſaffran de fer; les doigts en ſont colorés tout de même; & quand on en ſépare le fer, elle demeure comme un talc délié blanc; ſans compter qu'en général elle eſt fort commune dans toute cette contrée de montagnes.

Les indices *du ſouffre* exiſtent dans la ſublimation de cette miniere, tant par elle-même qu'avec le Mercure ſublimé, l'arſenic, &c. ou même ſimplement par l'odeur qu'elle rend lorsqu'on la brûle à la chandelle. Mais cette odeur eſt ſurtout extrêmement forte lorsqu'on fait calciner la miniere ſous une mouffle.

Les petites particules de marcaſſite répandües entre les feuïlles s'apperçoivent au Microſcope.

On y voit auſſi le *ſpath calcaire*, qui ſe manifeſte outre cela par le bruiſſement avec les acides, & par le précipité qui en tombe au moyen d'un alcali.

Le *ſpath fuſible* eſt encore très ſenſible au Microſcope; & on ne le voit pas moins diſtinctement dans la terre blanche qu'on obtient par le moyen de l'acide du nitre & de l'eau régale. Il ſe montre auſſi ſuffiſamment par le petillement qui ſe fait entendre, lorsque la miniere commence à griller. On obſerve en même tems la petite quatité *de quartz* qui s'y trouve, & qui ne s'altere pas dans ce feu médiocre.

La

La galene de plomb ſaute en quelque ſorte aux yeux dans le Microſcope.

Et quant à la préſence de *l'argent* contenu dans la miniere, le produit en fait foi d'une maniere inconteſtable.

L'énumération de ces parties conſtituantes de notre miniere ainſi juſtifiée, ſert encore à prouver ſans réplique pourquoi à un feu modéré elle ſe convertit en une eſpece de métal à demi fondu (*Stein*). Tout métal à demi fondu, ce qu'on nomme *Pierre de fonde*, eſt un compoſé de miniere, de marcaſſites, & de terre alcaline, fondus enſemble, & qui forment une maſſe en apparence à demi-métallique; & c'eſt ce qui ne manque point d'arriver à notre miniere, toutes les fois qu'on la travaille tant par elle-même qu'avec des ſels moyens, parce que la Nature y a déjà mis tout le mêlange qui eſt requis pour la production de la pierre de fonde.

Je pourrois en bonne conſcience terminer ici ce Mémoire; mais je demande la permiſſion d'ajoûter encore en deux mots mes idées ſur la génération de cette miniere. C'eſt une choſe connue qu'à l'égard d'un grand nombre d'effets naturels, mais ſurtout preſque dans tous ceux qui appartiennent au Régne minéral, on ne ſauroit former de concluſions qu'*a poſteriori*, c'eſt à dire, après avoir appris à connoitre les corps en les décompoſant & en les réduiſant à leurs parties conſtituantes. Or j'ai commencé par remarquer que notre miniere ne ſe trouve que ſur les cavités des mines & dans des endroits pierreux. Je ſoupçonne donc que l'eau qui coule ſous terre diſſout cette terre argilleuſe déliée, dont il y a toujours une bonne quantité dans les mines, & qu'elle la charrie inſenſiblement au deſſus de ces cavités. Les autres matieres indiquées ci-deſſus, particules de marcaſſites de ſoufre, de ſpath, de quartz, &c. s'introduiſent enſuite dans cette miniere tandis qu'elle ſe forme, ou s'y attachent après ſa formation.

Sur cette premiere couche argilleuſe mince il s'en arrange dans la ſuite une nouvelle de la même maniere, & cela forme ſucceſſivement

les

Digitized by Google

les feuïlles de cette miniere. Dans la ſuite, ou peut-être en même temps, les exhalaiſons métalliques qui s'élevent de deſſous terre, auront imprégné ces feuïlles d'argent, & en auront fait une matrice auſſi riche de ce métal; à quoi la galene du plomb pourra auſſi avoir contribué en quelque choſe, quoique trés modiquement. Ce ne ſont là cependant que des conjectures qui ne paſſent pas les bornes de la vraiſemblance, & qu'il faut par conſéquent bien ſe garder de donner pour des vérités démontrées; car il demeure toujours inconteſtable, qu'aucun eſprit créé ne ſauroit pénétrer dans l'intérieur de la Nature, & que nous ſommes trop heureux quand nous pouvons en bien voir l'écorce.

RECHERCHES
HISTORIQUES ET CHYMIQUES
SUR
LE COPAL,
TEL QUE LES APOTICAIRES ET LES EPICIERS LE VENDENT ORDINAIREMENT ICI.

PAR M. LEHMANN.

Traduit de l'Allemand.

I.

Quelque loin qu'on ſoit déjà parvenu dans l'examen des corps qui appartiennent aux trois Régnes de la Nature, il s'en faut bien non ſeulement que leur connoiſſance puiſſe être cenſée parfaite, mais même que l'on ait une hiſtoire naturelle exacte & ſuffiſante de la plûpart de ces corps; de ſorte que l'on eſt bien éloigné d'avoir découvert leurs parties conſtitutives, & d'être au fait de leur génération. Je choiſirai aûjourdhui pour échantillon & pour preuve de ce que j'avance, un ſeul ſujet; & ce ſera ce qu'on nomme ici *Gomme de Copal* dans les Apoticaireries, & chez les Epiciers.

II. La *Gomme de Copal*, telle qu'elle ſe débite dans le Commerce, qu'on nomme auſſi *Copal Oriental*, & que *Breynius* déſigne par les noms de *Succinum Indicum* & *Beninenſe*, eſt, conformément aux Experiences que j'ai faites ſur cette matiere, *une eſpece de bitume d'une couleur, tantôt jaune tirant ſur l'or, tantôt blanche, ou brunâtre, qu'on trouve en morceaux informes, tantôt plus, tantôt moins pure, & qui reſſemble à bien des égards à l'ambre.*

Ainſi les principales propriétés de ce corps ſe réduiſent aux ſuivantes. 1. Qu'il

1. Qu'il n'a qu'une peſanteur médiocre, en quoi conſiſte une de ſes conformités avec l'ambre; auſſi bien qu'en ce que

2. il va à fond dans l'eau.

3. Sa couleur varie, la plûpart des morceaux étant d'un jaune couleur d'or, quelquefois plus obſcur, quelquefois plus clair; & dans ce dernier cas ils ont une belle tranſparence. Il y en a pourtant auſſi de plus blancs, qui ſont alors à peine clairs, ou même qui n'ont point du tout de tranſparence: mais d'autres au contraire ont la clarté du verre, & ne lui cédent pas en tranſparence.

4. Les morceaux de *Copal* n'ont pas une figure déterminée; tantôt ils ſont gros, tantôt petits, & de diverſes figures, ronds, anguleux, allongés, &c.

5. Certains morceaux ſont parfaitement purs, tandis que d'autres ſont entourés & enduits de terres de toute eſpece, comme de l'argille blanche, de la terre graſſe, ou quelquefois ils ſont entremêlés de ſable fin.

6. Dans un grand nombre de pieces on trouve toutes ſortes de choſes, comme il y en a de renfermées dans l'ambre, en particulier des fourmis, des mouches, de petits ſcarabées, de la terre de mouſſe, &c. Il m'eſt arrivé même, en briſant quelques unes de ces pieces, de trouver au milieu une cavité qui contenoit quelques gouttes d'une eau claire, qui avoit le goût un peu ſalé.

7. Le *Copal* ne rend de ſoi-même aucune odeur; mais, quand on l'a tenu pendant quelque temps dans la main, on ſent une odeur agréable, & qui n'eſt pas trop forte.

8. On n'apperçoit non plus aucun goût particulier, quand on le met dans la bouche; mais il ſe laiſſe briſer fort aiſément ſous la dent, à l'exception d'une ſorte particuliere, qu'on rencontre quelquefois au milieu des autres morceaux, qui eſt tout à fait blanche, & pour la plûpart ſans aucune tranſparence; on peut le tailler en lames avec le couteau comme de la corne, mais, comme la corne auſſi, on ne ſauroit le mettre en pouſſiere ſous les dents.

9. En frottant le *Copal*, il devient fort électrique, & garde ſon électricité pendant un eſpace de tems aſſez conſidérable. Il ne la perd pas même, quand on le brûle à la chandelle; & en le brûlant ainſi, cela en fait un corps noir comme de la ſuye.

10. Du reſte le *Copal* ſe laiſſe travailler comme l'ambre; ſeulement il eſt plus tendre, ce qui l'empêche de pouvoir recevoir toujours un auſſi beau poli.

III. Les circonſtances qui viennent d'être rapportées ſervent à diſtinguer notre Copal d'un autre corps qui porte le même nom, mais qui n'eſt en effet qu'une Gomme réſine, laquelle, ſuivant le témoignage des Voyageurs & des Droguiſtes, découle d'un arbre du Canada, des Iles Antilles, & de quelques autres contrées d'Amérique, quand il ſe fait des fentes à cet arbre, qui, à cauſe de cela porte le nom de *Planta Copalifera*, que pluſieurs regardent comme le véritable nom de ſon eſpece. En attendant, cette conformité de nom a été cauſe que la plûpart des Droguiſtes ont regardé tout le Copal comme un produit végétal. Le premier que je ſache qui l'ait rapporté aux eſpeces du ſuccin, & encore n'a-ce été que dans le titre de ſon Ecrit, c'eſt feu M. le Docteur *Sendel*, qui, dans une Lettre au célébre *Breynius*, qu'il a intitulée *de Succino Indico*, a rempli un petit nombre de pages de diverſes remarques ſur le *Copal*, & conclut en ces termes: *Pſeudoſuccinum hocce reſinam potius eſſe judicavi, cui tamen magna gummatis portio eſſet adjuncta.* Cela fait voir qu'il prenoit effectivement le *Copal* pour un produit du régne végétal. On trouve cette Lettre jointe à celle de *Breynius*, *de melonibus petrefactis Montis Carmel.*

Quant aux Anciens, ils paroiſſent avoir eu notre *Copal* en vue lorsqu'ils ont parlé du *Succinum Africanum*, puisque dans ces derniers tems il n'a pas été poſſible de découvrir ſur toutes les côtes d'Afrique la moindre trace du ſuccin proprement dit, ou de l'ambre. *Pline*, au Chapitre 2. du XXXVII Livre de ſon *Hiſtoire Naturelle*, indique divers lieux de l'Afrique où ce ſuccin doit ſe trouver; & *Agricola* n'a fait autre choſe que copier fidèlement ce paſſage dans le 15 Chapitre du

du IV Livre de ſon Traité *de la nature des foſſiles*. *Wittich*, dans ſon Livre des pierres bézoardiques, indique la *Gomme de Copal*, ſans expliquer ce que c'eſt. *Ferrandus Imperatus*, dans ſon *Hiſtoire Naturelle*, Liv. XIV. Ch. 8. prend le *Gummi animae* pour une eſpece de ſuccin. *Valentin*, dans ſon *Muſaeum Muſaeorum*, dit que c'eſt *Reſina odoris fragrantis ad Olibanum accedentis*, & ajoute qu'elle vient d'un arbre, *ex arbore Copalifera*, que *Plücknet* a décrit Tab. LVI. Fig. 1. C'eſt donc proprement:

RHUS V. *Copalinum*. Linn. Spec. Plant. p. 266.

— *Foliis pinnatis integerrimis, petiolo membranaceo articulato.* Royen. Lugd. Bat. Linn. Mater. Medic. 152.

— *Elatior foliis impari pinnatis, petiolis membranaceis articulatis.* Gronov. Virg. 149.

— *Obſoniorum ſimilis Americana, gummi candidum fundens, non ſerrata, foliorum rachi, medio alata.* Plucknet, Almag. 318. Tab. LVI. Fig. 1.

Wormius dit dans ſon *Muſaeum* que le *Copal* vient de l'arbre *Copalifera*, d'où procede le *Gummi animae*. Il ſe trompe, car celle-ci eſt

Courbatils: *Hymenaea*. Hort. Cliffort. 484. Hort. Upſal 305. Linn. Mat. Med. 515.

Ceratia diphyllos antegoana, ricini maſoris fructu nigro, ſiliqua grandi incluſo. Plucknet, Almag. 96. Tab. LXXXII. Fig. 2.

Arbor ſiliquoſa ex qua Gummi Elemi elicitur. C. B. Pinac. 404.

Cet arbre croit principalement dans le Breſil, & dans quelques Isles de l'Amérique. M. le Profeſſeur *Cartheuſer*, dans ſa *Materia Medica*, l'appelle *Jetaiba*.

Pomet, dans ſon *Hiſtoire des Drogues*, dit que le *Copal Oriental* eſt une réſine claire & tranſparente, d'un jaune couleur d'or, qui découle des tiges de certains arbres d'une médiocre groſſeur, qui portent des feuilles ſemblables à celles du noyer, & des fruits comme les concombres. Ceux-ci doivent avoir la couleur brune des chataignes, & contenir une farine d'un goût agréable. Outre les propriétés ſus-

dites, le même Auteur exige que le Copal ſe laiſſe piler, qu'il ſe fonde au feu, & qu'il ait à peu près l'odeur de l'encens. Mais il ajoûte qu'on en obtient rarement de cette ſorte, & que cela eſt cauſe qu'on ſe ſert du Copal d'Amérique, qui découle de la tige & des branches de certains arbres qui reſſemblent au Peuplier noir. Ces arbres croiſſent en grande quantité ſur les Montagnes des Isles Antilles, d'où les pluyes & les torrens les emportent, & les conduiſent dans les lits des eaux courantes. Ainſi *Pomet* prend le *Copal* pour un produit du régne végétal, & non pour une eſpece de ſuccin, parce qu'il n'a pas une odeur auſſi agréable. *Lemery*, qui lui donne le nom particulier de *Pan Copal*, répéte d'ailleurs les mêmes choſes, & preſque avec les mêmes termes, dans ſon *Dictionnaire des Drogues*. Ainſi l'un & l'autre avoüent quon tire le *Copal* des eaux & du lit des rivieres. Seroit-il arrivé ici la même choſe qu'avec les Anciens, le *Boccone*, & d'autres, qui ont pris le vrai ſuccin pour une réſine coagulée dans l'eau, & venant des pins, ſapins, & autres arbres qu'on trouve ſur les côtes de la Mer Baltique.

Hartmann, au ſecond Chapitre de ſon *Hiſtoire du Succin*, eſt en doute, ſi on le trouve en Afrique, & s'exprime ainſi: *Si non alius error Succinum Orientale progenuit, reſina Copal Succinum mentiri aptiſſima, hoc nomine ab Officinis Pharmaceuticis adoptata.*

Tout ce qui vient d'être rapporté, fait aſſez voir qu'il reſte encore beaucoup d'incertitudes, tant par rapport au lieu natal de notre *Copal* qu'au ſujet de ſa génération. Ce qu'il y de plus vraiſemblable, c'eſt de s'en tenir à ce que le Docteur *Sendel* a dit, que la plus grande partie du *Copal*, ou de ce qu'on nomme *Succinum Indicum*, nous vient d'Afrique, & en particulier des contrées autour de *Benin*, Province ſituée ſur la côte d'or de Guinée. Ce rapport eſt confirmé par notre digne Confrère, M. *Marggraf*, qui a parlé lui-même à un homme venu des lieux d'où l'on tire le *Copal*, lequel lui a aſſuré que pour le trouver on eſt obligé de creuſer fort avant dans le ſable ſur les côtes de la mer. Je n'ai garde de le conteſter; tout au contraire je

ſuis

ſuis dans l'idée qu'on en découvre de la même maniere en divers autres endroits. M. *de la Condamine*, dans la Rélation de ſes Voyages jusqu'à l'intérieur de l'Amérique Méridionale, raconte que les Indiens de ces endroits ſe ſervent de Copal, en guiſe de chandelles, après l'avoir envelopé dans des feuïlles de Bananier, ou de Pliſang. On eſt auſſi bien aſſuré qu'il en vient en abondance du ſemblable des Iles Antilles, comme on l'a vu dans les paſſages ci-deſſus allégués de *Pomet* & de *Lemery;* ce qui eſt confirmé par les rélations de pluſieurs autres Auteurs. Je ne ſaurois pourtant dire ſi M. de la *Condamine* a eu en vue notre *Succinum Indicum*, ou la Gomme réſine indiquée plus haut; mais je conjecture que c'eſt du premier qu'il veut parler, parce que l'expérience m'a a appris, que quand on l'a une fois allumé, il brûle tout de ſuite, en jettant une flamine aſſez claire jusqu'à ce qu'il ſoit entièrement conſumé. Et pourquoi la Nature ne produiroit-elle pas ſous le ſept ou huitième degré de latitude méridionale la même ſubſtance qu'on trouve à de ſemblables degrés de latitude ſeptentrionale?

IV. Au milieu de cette diverſité de circonſtances incertaines, & de cette contrariété dans les récits, tant des Auteurs qui nous ont laiſſé des deſcriptions de cette matiere, que de ceux qui nous en donnent aujourdhui, je me trouve dans l'impoſſibilité de fournir là deſſus quelque choſe de complet. Il eſt cependant néceſſaire de ſavoir à quel régne ce corps appartient. C'eſt ce que les Expériences chymiques pourront mettre en évidence. Sans m'arrêter donc davantage, je vais rapporter celles que j'ai faites moi-même *ſur le Copal, tel qu'on le trouve dans nos Apoticaireries & chez les Epiciers.* Mais je dois remarquer dès l'entrée, que je m'en ſuis procuré de diverſes Apoticaireries d'ici, & des principaux Magazins des Epiciers, & que j'en ai employé de pluſieurs eſpeces, ſans me mettre en peine du haut prix auquel on en vendoit quelques unes. J'ai examiné chaque ſorte à part, & j'ai choiſi à chaque fois les morceaux les plus purs pour mes Expériences. J'appelle morceaux les plus purs, ceux qui ſont le moins entourés de parties hétérogenes, dans lesquels il n'y a point d'inſectes renfermés, & qui ſont exempts du mêlange de terre, de ſable, &c.

De

De tels morceaux ſont par conſéquent d'une clarté tranſparente, d'un jaune couleur d'or, & d'une ſubſtance compacte. Après avoir pris ces précautions, j'ai trouvé que tout le Copal que nous avons ici eſt de la même nature, ſans qu'il y ait d'autre différence que celle qui vient du degré de pureté. Car, pour ce qui regarde la groſſeur des morceaux, la couleur plus ou moins haute, & la figure des différentes pieces, ce ſont là des choſes purement contingentes. Je vais donc commencer par rapporter ce qui concerne la ſolution de ce corps dans les divers diſſolvans qui peuvent agir ſur lui.

V. Les Atteliers de pluſieurs Artiſtes, & en particulier des Peintres & des Verniſſeurs, montrent déjà combien de voyes on a employé pour diſſoudre le *Copal*, & le faire entrer dans la préparation d'un vernis clair. Je ne me ſuis point attaché à ce deſſein dans mes travaux. Mais perſonne que je ſache ne s'eſt encore donné la peine de rechercher à quel régne de la nature le Copal devoit être rapporté. Or c'eſt à quoi j'ai fait le plus d'attention dans le petit nombre de mes eſſais; j'ai ſoigneuſement examiné les effets que les divers diſſolvans faiſoient ſur cette ſubſtance, pour en conclurre quelle eſt la place qu'on doit lui accorder dans les claſſes des productions naturelles. Pour cet effet j'employai d'abord des acides concentrés du régne minéral.

1. Une dragme de Copal pilé bien menu, ſur laquelle on verſe *de l'huile de vitriol blanche* pure, teint l'acide du vitriol concentré, & le rend en un clin d'oeil d'un brun foncé; puis, quand on le met à digérer à un feu doux, il ſe diſſout tout à fait en peu de temps. Quand on fait enſuite l'abſtraction de cette ſolution dans une retorte de verre au feu de ſable, elle s'éleve avec des vapeurs jaunes, & ſort en gouttes d'un rouge brun; & la choſe en effet ne ſauroit être autrement. Il ſe ſublime dans le cou de la retorte environ trois ou quatre grains d'un beau ſouffre jaune; & au fond de la retorte il demeure deux grains d'une maſſe noire, brillante, & legere comme de l'écume.

2. Une dragme de Copal réduite en pouſſiere déliée avec une once *d'acide de ſel commun* fumant, que j'avois diſtillé moi-même par le moyen

moyen de l'huile de vitriol diſtillée & duement rectifiée, ne fut point attaquée; mais le Copal ſurnagea, & à une chaleur douce, l'eſprit fuma, laiſſant le Copal ſans aucune altération.

3. Une dragme de Copal entier avec une once *d'acide du nitre* que j'avois moi-même préparé, & duement rectifié, ne vouloit pas au commencement ſe laiſſer attaquer; mais, ayant été mis à une digeſtion d'abord aſſez douce, qui fut conduite à la fin jusqu'à bouïllir au feu de ſable, tout entra dans une belle ſolution claire, d'un jaune couleur d'or; de façon néanmoins qu'après le réfroidiſſement, il s'en ſépara une ſubſtance gluante jaune, & comme de l'éponge, qui ſurnageoit.

4. Une dragme de Copal avec une once & demie *d'eau régale* préparée de ſept parties d'acide du nitre, & d'une partie de ſel commun, ne ſe laiſſoit point du tout attaquer, pas même en bouïllant au feu de ſable; mais à la fin presque toute l'eau régale s'étoit envolée; & ce qui reſtoit formoit un corps gluant d'un brun clair.

5. Le *vinaigre diſtillé*, ni *l'acide des fourmis*, ne produiſirent non plus aucun effet ſur notre gomme. De même une *eau pure diſtillée*, dans laquelle on la fit bouïllir pendant longtems, n'y effectua aucun changement, n'en ayant même rien attiré à ſoi; car, après la filtration, cette eau n'avoit pris aucun goût, & il ne s'en précipitoit rien; elle n'entroit en efferveſcence, ni avec les acides, ni avec les alcalis, & ne troubloit, ni la ſolution de lune dans l'acide du nitre, ni celle de mercure ſublimé dans l'eau diſtillée. Et quoique je me fuſſe d'abord flatté que le Copal, en bouïllant dans le vinaigre diſtillé, lui donneroit ſa couleur jaune, cela ne réuſſit pourtant point; mais le Copal demeura dans une parfaite conſiſtance, ſurnagea, prit l'apparence d'éponge; & après que je l'eus ſéparé du vinaigre, & édulcoré, il donna avec l'huile de térébenthine un beau vernis à laquer, d'un jaune couleur d'or. *La liqueur minérale* auſſi, comme *l'eſprit de nitre doux*, en bouïllant avec le Copal, ne fit par l'extraction que le

Digitized by Google

rendre comme de l'éponge; & elle prit un goût amer. Cependant elle tira d'abord assez considérablement la couleur jaune du Copal, lequel fut réduit en une masse blanche, gluante & molle, qui, dans l'huile de térébenthine, donna un beau vernis à laquer clair.

Les *menstrues alcalins* ne furent pas non plus capables d'en rien dissoudre; car, ayant employé l'huile de tartre par défaillance la plus pure, aussi bien que l'esprit de sel ammoniac préparé avec le sel alcali fixe, la chaux vive, & la ceruse, je ne remarquai point qu'il en résultât aucun changement.

VII. *L'esprit de vin le plus rectifié, non plus que le meilleur esprit de vin tartarisé*, n'ont pas été plus efficaces. Mais, ayant pris une dragme de Copal clair pulvérisé, sur laquelle je versai deux onces d'esprit de vin le plus rectifié; *item* une dragme du même Copal que je mêlai exactement avec deux onces d'esprit de vin tartarisé; & ayant mis chacun de ces deux mêlanges dans un verre assez spacieux & bien bouché, puis les ayant secoué tout de suite pendant quatre à cinq heures, tout fut dissous à l'exception de dix grains d'une matiere blanche gluante, qui se laissoit étendre & travailler comme une résine, sans pourtant s'attacher fortement aux doits. La solution filtrée étoit d'un jaune couleur d'or; elle avoit au commencement un goût douceatre; mais vers la fin ce goût devenoit agréable, aromatique, balsamique, & tirant sur l'amer. C'est de M. *Murggraf* que je tiens cette Expérience, qu'il m'a communiquée il y a déjà quelque temps.

Mais, comme ce secoüement me paroissoit trop long & trop ennuyeux, je répétai l'essai avec une dragme de Copal réduit en poussiere déliée, sur laquelle je versai un lot d'esprit de vin tartarisé, & je fis bouïllir le tout dans un alembic de verre de médiocre grandeur. Comme par ce moyen l'esprit de vin s'envoloit en grande partie, j'en versois peu à peu de nouveau, de façon que j'en employai cinq onces à cet usage; au moyen de quoi tout le Copal fut dissous, à la réserve d'une petite quantité de la matiere blanche & gluante ci-dessus indiquée.

Je

je filtrai la ſolution, & j'en tirai une eſſence pareille à celle qu'on obtient en ſecouant.

Après tout cela, je pris de ces maſſes gluantes demeurées des travaux précédens, & qui peſoient enſemble un ſcrupule & demi; je verſai deſſus une demi-once d'une huile de térébenthine pure, je fis bouillir le tout au feu de ſable, & j'obtins par ce moyen un beau vernis à laquer clair tirant ſur le brun, qu'on pouvoit fort bien appliquer, qui ſéchoit bien, & donnoit un beau luſtre, fort propre à relever les couleurs vives.

Lorsque j'eus l'honneur de communiquer cette Expérience à M. le Conſeiller Privé *Eller*, il eut la bonté de me dire, que la ſolution du Copal s'effectuoit encore mieux dans un bon eſprit de *vin camphré*. Je pris donc deux onces de l'eſprit de vin le mieux rectifié, dans lequel je fis diſſoudre autant de camphre qu'il étoit poſſible; je verſai enſuite cet eſprit de vin ſur du Copal réduit en pouſſiere déliée, & je mis le tout bien bouché à une douce digeſtion, ſecouant en même tems ſouvent ce mêlange, & de cette maniere j'arrivai à la ſolution du Copal, à une très petite quantité près. Cette ſolution donne pareillement une eſpece de vernis fort délié, mais clair.

VIII. Voyant donc que l'huile de térebenthine attaquoit ſi bien le Copal, j'en pris un lot auquel je joignis deux onces *d'huile de térébenthine;* je fis bouillir le tout convenablement au bain Marie, & cela entra en ſolution d'une maniere complette pour donner un beau vernis clair d'un jaune couleur d'or; lequel, ayant été délayé avec de nouvelle huile de térébenthine, & paſſé convenablement à travers un drap net, donnoit un luſtre encore plus beau que celui que j'avois préparé avec l'eſprit de vin ſimple.

Des Expériences reitérées m'ont appris dans la ſuite que quelques autres huiles éthérées ſont auſſi propres à diſſoudre le Copal; & j'ai procuré de ſemblables ſolutions avec l'huile de Sabine & avec celle de Menthe.

Au contraire les huiles exprimées, comme celles de lin, d'olives, d'amandes, en bouïllant avec le Copal, n'en diſſolvent rien; mais il demeure au fonds ſous la forme d'une maſſe recuite.

IX. Voilà jusqu'où j'en ſuis venu pour la diſſolution du *Copal* par la voye humide. Je voulus voir enſuite comment je réuſſirois par la voye ſéche. La premiere choſe donc que je fis, ce fut d'allumer une dragme de Copal à la chandelle, & de la laiſſer brûler dans une cueillere de fer jusqu'à ce qu'elle s'éteignit d'elle-même. Cela brûla avec une forte flamme jaune, & rendit une odeur particuliere qui n'étoit pas tout à fait déſagréable; la fumée en étoit noire & épaiſſe. Le réſidu paroiſſoit d'un noir brun; il étoit brillant & caſſant, peſoit deux ſcrupules, & conſervoit encore toute l'électricité que le Copal poſſede avant qu'on le brûle. Mais cela ne voulut plus s'allumer ſur le feu, & ne fit que ſe fondre, jusqu'à ce qu'il reſta à la fin une ſcorie noire, legère, & comme de l'éponge. L'huile de térébenthine en procura la ſolution à très peu de choſe près; & le produit en fut un beau vernis rouge.

Quant je dis dans ce Mémoire que j'ai obtenu du vernis de différentes manieres, je veux remarquer en général que la choſe arrive toutes les fois qu'on fait bouïllir le Copal dans l'huile de térébenthine, & cela en la maniere accoutumée, ſoit au bain de ſable, ou au bain marie; & j'ai fait bouïllir les mêlanges jusqu'à ce que je me ſois apperçu que l'huile avoit pris la conſiſtance d'un vernis; enſuite à chaque fois j'ai fait paſſer ce vernis auſſi chaud qu'il a été poſſible à travers un drap net, & je l'ai gardé dans un vaſe bien bouché & envelopé. S'il arrivoit dans quelcun de ces travaux que le vernis fut trop épais, il n'y a qu'à y verſer, ſuivant la proportion requiſe, de l'huile de térébenthine, & le mettre digérer à une chaleur douce; & de cette maniere on peut ſe procurer le vernis auſſi épais ou auſſi délié qu'on le juge à propos.

Ayant apperçu, en brûlant le Copal, que c'étoit un corps compoſé de différentes parties conſtitutives réunies enſemble, je continuai à faire les recherches convenables pour en découvrir la nature.

X. Je

X. Je pris pour cet effet quatre onces du Copal le plus pur, transparent, d'un jaune couleur d'or, & réduit en menue pouſſiere; je les mis dans une retorte de verre ſpacieuſe qui en étoit à peine à demi remplie, & à laquelle j'adaptai & lutai un récipient convenable; enſuite je donnai le feu par degrés pendant trois heures de tems; & d'abord il ſortit un peu de phlegme, puis le feu ayant été augmenté, il s'éleva des vapeurs épaiſſes d'un blanc jaunâtre, qui furent ſuivies de gouttes d'un brun clair; & à le fin, quand tout fut réfroidi, je trouvai, après la filtration par un double filtre, humecté avec de l'eau diſtillée, que le phlegme peſoit juſte une dragme; il avoit une odeur tant ſoit peu empyreumatique, étoit tout à fait inſipide, & ne différoit d'ailleurs en rien de l'eau commune. Quant à l'huile, il en demeura dans le filtre trois onces & demie, ſans compter le peu qui s'étoit attaché au cou de la retorte, au filtre, &c. Cette huile paroiſſoit d'un beau verd; mais, quand on la tenoit vis à vis de la chandelle, elle étoit d'un rouge de grenade. Dans le col de la retorte il n'exiſtoit pas la moindre trace de ſel volatil; & le réſidu qui peſoit une dragme & ſept grains, étoit d'un noir brillant comme la ſuye, & expoſé dans l'huile de térébenthine à une douce digeſtion, il ſe diſſout pour la plus grande partie en un vernis d'un rouge foncé. L'huile étoit aſſés épaiſſe, & l'odeur qui n'en étoit pas deſagréable approchoit de celle du ſuccin, comme auſſi la couleur verte de cette huile a aſſez de rapport, ou plutôt une parfaite reſſemblance, avec l'huile impure de ſuccin. C'eſt donc une grande erreur que celle des perſonnes qui croyent, qu'on ne vient j'amais à bout de tirer des bitumes une belle huile verte, à moins qu'on ne les ait diſtillés avec de la cendre nette. Le goût de cette huile n'a rien de brûlant; mais il eſt plutôt agréable, aromatique & balſamique; au moins ne me paroit-il pas auſſi deſagréable que le goût de l'huile impure qu'on tire de l'ambre jaune. Cependant il ne faut pas diſputer des goûts. Je répéte que dans ce travail il faut que la retorte ne ſoit tout au plus qu'à demi-pleine, & qu'on doit augmenter le feu convenablement par degrés; car, dans la diſtillation *per ſe*, le *Copal* ſe comporte comme l'ambre, c'eſt à dire, qu'il monte & écume

avec force. Le récipient doit auſſi être bien luté; & quand les vapeurs montent, ſi contre l'attente elles paſſent au travers du lut, qu'on ſe garde bien d'approcher de la lumiere. Cette précaution eſt en particulier néceſſaire, quand on fait cette diſtillation à un feu découvert dans une retorte d'argille, ces retortes ayant pour la plûpart le col court; car, quand une fois les vapeurs ont pris feu, il n'eſt pas aiſé de les éteindre.

Je fis encore un eſſai ſemblable, en mêlant une once de Copal avec autant de ſable de Freyenwalde; j'en remplis à moitié une retorte de verre bien garnie, & je pouſſai par degrés à un feu découvert; ce qui me donna à peu près la quantité de phlegme, d'huile, & de *Caput mortuum*, proportionnée à la doſe de *Copal* que j'avois employée, avec cette différence cependant que durant la diſtillation il ne s'élevoit pas avec autant de force.

Il en fut de même lorsque je traitai de la maniere ſusdite une once de Copal avec autant de chaux vive, & le réſidu peſa une once & douze grains. J'obſervai les mêmes circonſtances lorsque je mêlai une once de Copal avec autant du ſel commun. Mais, ayant mêlé une demi-once de Copal avec quatre onces d'eau diſtillée, & deux dragmes de ſel commun, fait macérer le tout pendant quatre jours, & enſuite diſtillé d'un alembic de verre proportionné au feu de ſable, il ſortit au commencement pour la plus grande partie de pur phlegme, qui fut ſuivi d'un peu de belle huile éthérée blanche, partie en vapeurs blanches, partie en gouttes de la même couleur, que je recueillis enſemble dans le récipient adapté; après quoi je fis la ſéparation du phlegme par le filtre, comme on le pratique avec les autres huiles éthérées. Ayant enſuite remarqué que les gouttes dans la diſtillation commençoient à ſortir jaunes, je changeai le récipient, & je tirai une huile jaune, puis rougeâtre, & à la fin brune, qui tomboit en gouttes peſantes, & qui étoit accompagnée de vapeurs jaunes. Quand tout ce qui pouvoit être pouſſé fut ſorti, le réſidu qui peſoit juſte une demi-once, parut d'un noir brillant, en forme d'éponge; & après que

je

je l'eus leſſivé, filtré, évaporé, & mis en cryſtalliſation, il donna un ſel commun ordinaire. Il reſta dans le filtre deux ſcrupules d'une terre noire, friable, & inſipide. L'huile blanche qui étoit ſortie tout au commencement, quoiqu'elle peſât à peine un ſcrupule & demi, rendoit une odeur extrêmement agréable.

Le Copal diſtillé avec autant de craye donna préciſément les mêmes produits qu'avec la chaux vive; & toutes les additions ſemblables ne produiſent d'autre effet ſur le Copal, ſinon d'empêcher que pendant la diſtillation il ne s'éleve auſſi fort qu'il le fait en le diſtillant *per ſe*.

XI. Ayant donc procédé de la maniere décrite ci-deſſus par des eſſais réitérés, que j'ai faits auſſi en partie dans des retortes d'argille bien garnies, au feu de reverbère, j'ai remarqué que le produit moyen d'un Copal net étoit au moins à chaque fois de $\frac{3}{4}$ ou même de $\frac{7}{8}$ d'huile. Je raſſemblai de la ſorte au delà de deux livres & demie d'huile verte; & une ſuite toute naturelle de mes travaux précédens étoit que je m'attachaſſe préſentement à la rectification de cette huile impure. La rectification des huiles empyreumatiques eſt une choſe trop connue, pour que je doive m'y étendre ici. Je rapporterai donc ſeulement d'une maniere ſuccinte les diverſes voyes que j'ai employées pour cet effet.

Je pris d'abord quatre onces de mon huile verte, je les mis dans une retorte de verre, dont je nettoyai le col auſſi exactement qu'il étoit poſſible; puis je diſtillai au commencement à un feu doux d'une coupelle de ſable, ce qui fit d'abord ſortir une couple de gouttes d'une huile d'un brun foncé, qui probablement s'étoit attachée au haut de la concavité de la retorte en la rempliſſant, ſans qu'on eut pû l'en eſſuyer. Ceci commença à part dans le récipient. Quand ces premieres gouttes eurent ceſſé de couler, j'adaptai un autre récipient, je le lutai convenablement, & il ſortit alors des gouttes verdâtres tirant ſur le couleur d'olive pâle, avec quelques vapeurs blanches déliées. Le feu ayant été enſuite conſidérablement augmenté, il vint des gouttes brunes peſantes; & auſſi-tôt j'adaptai convenablement un autre récipient

ſec,

ſec, dans lequel je reçus ces gouttes, qui furent ſuivies d'autres, peſantes auſſi, & d'un rouge foncé. Au fond de la retorte demeura un ſcrupule d'une ſubſtance noire ſemblable à du charbon, comme celui que donne la poix de bateau brûlée, ou plutôt comme celui de l'aſphalte. Je pris l'huile d'un verd pâle qui avoit été diſtillée dans le ſecond récipient, & procédai encore quatre fois de la maniere ci-deſſus décrite; & pendant ces opérations il monta une huile toujours plus déliée, plus claire, & d'un verd plus pâle; cependant elle ne voulut pas devenir tout à fait blanche. Mais, l'ayant encore rectifiée trois fois, elle ſortit d'un tout à fait beau blanc. Néanmoins cette huile a la propriété de toutes les autres huiles fétides rectifiées, c'eſt qu'à l'air elle recouvre inſenſiblement ſon ancienne odeur & ſa couleur précédente.

Je pris de plus deux onces d'eau diſtillée, dans lesquelles je verſai quatre onces de mon huile verte impure, je mis le tout dans une retorte aſſez ſpacieuſe, de façon qu'il n'y avoit que le tiers de la retorte qui fut rempli; & ayant pouſſé ce mêlange par degrés au feu de ſable, cela me donna une belle huile, d'un verd pâle, déliée & claire; & à la fin il ſortit de nouveau une huile peſante d'un rouge brun, que je reçus dans un récipient à part. Je rectifiai deux fois ce qui avoit paſſé par deſſus avec de l'eau diſtillée, & j'obtins à la fin une belle huile blanche claire & déliée.

Je procédai encore préciſément de la même maniere ſur l'huile verte impure, dont je pris deux onces, que je mêlai avec une once de craye nette pulvériſée, & que je pouſſai dans une retorte de verre; car l'huile ſortit d'abord peſante & d'un brun rouge, mais, après trois cohobations ſur de la craye fraîche, elle devint d'un verd pâle. Il revint enſuite des gouttes d'un brun rouge, que je recueillis à part. La craye étoit devenue de couleur iſabelle, ſans avoir d'ailleurs ſouffert aucun changement.

Je rectifiai, par une cohobation quatre fois réiterée ſur de l'eau diſtillée, l'huile rouge & peſante, qui, dans chacune des rectifications précé-

précédentes étoit ſortie la derniere, & j'en obtins pareillement une huile fort déliée d'un verd pâle.

XII. Je pouſſai préſentement plus loin mes eſſais, pour voir ce qui arriveroit, tant à l'huile tirée du Copal diſtillé *per ſe*, comme il a été rapporté §. X. qu'à celle qui avoit été rectifiée de la maniere qui vient d'être décrite.

1. L'huile, tant impure que rectifiée, ſurnageoit au deſſus de l'eau; & tant qu'elle y demeuroit, il étoit impoſſible de l'allumer avec une chandelle.

2. L'une & l'autre, verſées goutte à goutte ſur des charbons ardens, brûloient ſans donner de flamme claire; mais elles ſe réduiſoient en une ſuye noire.

3. Dans l'eſprit de vin le plus rectifié elles tombent toutes deux au fond; mais, ſi l'on allume l'eſprit, alors il brûle, ſoit que ce ſoit un alcohol, ou qu'il ait été tartariſé, & à la fin l'huile s'allume auſſi, & ſe conſume toute entiere en jettant une forte flamme jaune. Mais; ſi l'on diſtille de l'eſprit de vin avec de l'huile rectifiée, alors celle-ci s'éleve & ſort avec l'eſprit; au lieu qu'avec l'huile impure l'eſprit ne fait ſortir que la partie éthérée; & le reſte ne vient en gouttes rouges qu'après que le feu a été augmenté.

4. L'huile tant impure que rectifiée brûlent, comme les autres huiles, avec une mêche; mais il y a cette différence que la premiere s'enflamme beaucoup plus aiſément & ſe conſume plus vîte que la ſeconde. La cauſe en eſt vraiſemblablement, que l'huile rectifiée s'imbibe plus aiſément dans la mêche que l'huile impure: de là vient que la mêche allumée attaque tout à la fois la quantité entiere d'huile, qui ſe met à brûler enſemble. L'une & l'autre de ces huiles jettent en brûlant une forte vapeur, ou fumée épaiſſe.

5. Elles ont auſſi l'une & l'autre une forte odeur, mais qui n'eſt pas tout à fait déſagréable; de façon qu'une petite quantité, ſurtout de l'huile impure, ſe fait ſentir à trente ou quarante pas.

6. Trois parties d'huile rectifiée & quatre parties d'huile impure diſſolvent une partie de fleurs de ſouffre en un baume épais, d'un rouge fort foncé.

7. Cette huile, travaillée convenablement avec de l'alun, donne un vrai pyrophore, comme M. le Profeſſeur *Spielmann* l'a auſſi remarqué de l'huile qu'on tire du bitume de Lampertsloch.

XIII. Je pouſſai encore plus loin mes eſſais, & je mêlai une demi-once de l'huile impure avec deux onces d'une huile de vitriol blanche; elles ſe mêlerent en un clin d'oeil ſans frémiſſement; & ce mêlange devint d'un rouge foncé & épais. L'ayant laiſſé repoſer huit jours dans mon poële à une chaleur tempérée, je le pouſſai dans une retorte de verre bien garnie à un feu ouvert par degrès; ce qui fit élever & ſortir un acide vitriolique, pénétrant & volatil, d'un brun noir, mais qui n'étoit pourtant pas épais. Le feu ayant été augmenté, il monta un peu de ſouffre dans le cou de la retorte, mais le poids en alloit à peine à deux grains. Le réſidu étoit une terre noire, friable, qui n'avoit ni goût, ni odeur, & qui peſoit environ un ſcrupule. Les choſes ſe paſſent de la même-maniere, quand on mêle de l'huile rectifiée avec cet acide vitriolique concentré.

XIV. Une demi-once, ſoit d'huile rectifiée, ſoit d'huile impure, mêlée avec une once & demie d'un eſprit de ſel fumant pur rectifié, s'uniſſent d'abord enſemble, & donnent une teinture d'un brun rouge. Au commencement il ſurnageoit pourtant encore un peu d'huile; mais elle ſe mêla comme le reſte, après une digeſtion de huit jours dans un appartement médiocrement chaud. Je procédai ſur ce mêlange comme ci-deſſus en le pouſſant d'une retorte bien garnie, & alors il s'éleva de la plus belle couleur de rubis; après quoi ſuivirent quelques gouttes d'une huile rouge épaiſſe, qui ſortoient fort peſamment, & avec cette différence, que l'huile impure en rendit un ſcrupule & demi. Je ne nierai point que ce phénomene avoit quelque choſe de ſuſpect, & que la couleur rouge donnoit à penſer, la raiſon de ſon exiſtence ne ſe préſentant pas d'abord. C'eſt ce qui fit que je recommençai l'Expérience

avec

avec de l'huile rectifiée fraîche & de l'eſprit de ſel fumant, répétant le même procédé qu'auparavant, & employant le feu le plus doux. Ici je m'apperçus qu'avec un ſemblable feu, & la retorte n'étant pas ſeulement à demi-pleine, il s'élevoit dès le commencement avec force ſur le mêlange des bulles, qui en éclatant réjailliſſoient tout autour, & qu'enſuite la liqueur d'un brun rouge qu'elles avoient répandue, montoit & ſortoit en partie, ſans avoir ſouffert aucun changement. Après avoir fait cette obſervation, je répétai l'Expérience pour la troiſième fois; mais, au lieu d'une retorte, je pris un alembic de verre d'une médiocre hauteur, j'y mis un chapiteau de verre, j'y adaptai un récipient ſpacieux, & le tout ayant été convenablement luté, je fis la diſtillation ſur le ſable. Par là j'obtins un bel eſprit blanc très clair, qui fut ſuivi de quelques gouttes d'une huile rouge épaiſſe, que je recueillis à part. Cet eſprit ne ſortit pas avec des vapeurs auſſi fortes, qu'a coûtume de le faire l'eſprit de ſel commun, mais il vint goutte à goutte, & ſans chaleur remarquable. Je fus curieux d'eſſayer ce qui arriveroit à cet eſprit avec les édulcorans. Pour cet effet, je pris deux onces de l'eſprit de vin rectifié le plus fort, auxquelles je mêlai deux dragmes de cet eſprit de ſel qui étoit ſorti dans la diſtillation; & je remarquai qu'ils ne s'échauffoient point enſemble, mais qu'ils ſe réuniſſoient ſans la moindre action ou réaction. J'en fis la digeſtion comme à l'ordinaire, tenant le mêlange au froid pendant huit jours dans un vaſe bien bouché & lié; après quoi je le pouſſai par deſſus le chapiteau ſur la coupelle de ſable. Il ſortit par rayes, & j'augmentai le feu de tems à autre. Quand il ne ſe montra plus de rayes, je mis un autre récipient dans lequel il entra encore trois dragmes d'un eſprit de ſel acide au plus haut degré, qui avoit un peu l'odeur d'huile empyreumatique; & pendant ce tems là il ſortit continuellement de fortes vapeurs. Tout à la fin il vint encore trois ou quatre gouttes d'une huile jaunâtre. Le feu le plus véhément ne put rien pouſſer au delà, mais il reſta au fond de l'alembic une terre noire, legère & friable. L'eſprit de ſel doux qui avoit paſſé en diſtillant peſoit une once & demie, étoit d'une belle clarté, tranſparent, agréable au goût, non cependant comme un eſprit

de ſel doux ordinaire, mais tenant de l'aromatique & du balſamique; & quoiqu'au commencement il eût quelque choſe de déſagréable, qui tiroit à l'huile empyreumatique, ce goût ſe perdit entierement dans l'eſpace de huit jours.

XV. Une demi-once d'huile tant impure que rectifiée avec une once & demi d'eſprit de nitre fumant pur, ſurnagea pour la plus grande partie: cependant l'acide du nitre en devint jaune. Il ne s'alluma pourant pas avec cette huile, comme cela lui arrive avec une partie des huiles diſtillées du régne végétal. C'eſt un nouveau caractère qui fait voir que notre ſujet appartient au régne minéral. Ce mêlange opère tout de même en le mettant à une digeſtion modérée pendant huit jours, & en le diſtillant enſuite doucement au feu de ſable; alors l'acide du nitre vient d'abord de lui-même & ſeul, après quoi l'huile ſuit, mais par morceaux gluans, comme de l'éponge ou de l'écume, qui tiennent les uns aux autres, & dont la couleur eſt d'un brun de ceriſe. Je ſéparai enſuite d'avec l'eſprit de nitre qui étoit ſorti, ces pieces d'huile qui étoient poſées deſſus, & qui avoient pris une conſiſtance tout à fait ſolide. Lorsqu'il ne voulut plus rien ſortir, j'agmentai le feu en le conduiſant au plus haut degré; ce qui fit monter encore dans le col de la retorte, mais pas trop haut, quelque choſe d'un brun tirant au noir; mais il n'y eut pas moyen de le faire entrer dans le récipient. Quand tout fut réfroidi, il demeura une maſſe caſſante d'un brun foncé, qui n'avoit aucun goût, ni aucune odeur, ne faiſoit point de bruit ſur les charbons ardens, & ne jettoit aucune flamme, mais s'écouloit, ſe diſſipoit, & ſe fondoit comme la poix.

XVI. Je mêlai une once de l'huile tant rectifiée qu'impure avec quatre onces tant d'alcohol que d'eſprit de vin tartariſé, je les tins pendant huit jours à une douce digeſtion, & il ſe fit quelque extraction. Le tout ayant été diſtillé enſemble ſur le ſable par deſſus le chapiteau, ce qui ſortit, vint d'abord par rayes, & parut être un eſprit balſamique. Tout fut diſtillé ſur le ſable par deſſus le chapiteau, & s'en alla par rayes, repréſentant de même un eſprit balſamique; à la fin il vint une

huile

huile rouge, que je recueillis à part; &, comme on peut aiſément ſe l'imaginer, j'en tirai plus de l'huile impure que de l'huile rectifiée.

XVII. L'huile impure mêlée avec l'huile de tartre par défaillance, & avec l'eſprit de ſel ammoniac préparé du ſel alcali fixe, devient d'abord d'un blanc de lait; il s'en diſſout un peu, & le reſte ſurnage. Mais, ſi l'on prend de l'eſprit de ſel ammoniac avec la chaux vive, tout ſe diſſout à la vérité en un mêlange jaune, mais il en tombe enſuite une partie au fond. Il en arrive autant à tous égards à l'huile rectifiée, avec cette différence ſeulement, qu'avec l'eſprit de ſel ammoniac préparé de la chaux vive, elle devient d'un blanc jaunâtre & trouble; mais, quand elle s'eſt repoſée, l'eſprit qui vient au deſſus prend une couleur rougeâtre agréable. En diſtillant les deux eſpeces d'huile avec ces eſprits urineux volatils, on obtient un fort mauvais ſel volatil huileux. Au contraire, ſur le ſel alcali fixe les deux eſpeces d'huile montent, de façon que d'abord il vient un peu de phlegme; enſuite l'huile paroit, en partie en vapeurs d'un blanc jaunâtre, en partie en gouttes verdâtres; & à la fin il vient de l'huile d'une rouge brun, laquelle doit être recueillie & gardée ſéparément.

Toutes ces huiles épaiſſes, rouges & brunes, venuës ainſi à la fin du travail, comme je l'ai rapporté dans les §§. précédens, peuvent être également purifiées par des rectifications réitérées, faites à part ſur de l'eau diſtillée.

XVIII. Les deux eſpeces de notre huile ſe mêlent avec toutes les autres huiles exprimées & diſtillées. J'en ai eu la preuve avec l'huile de lin, d'olive, d'amande, auſſi bien qu'avec l'huile diſtillée de térébenthine, de ſabine, de menthe, &c. Elles ſe comportent auſſi avec l'eſprit de vin le plus rectifié comme les autres huiles éthérées, ſeulement avec un peu plus de difficulté. Quand j'ai diſſous de l'huile de Copal pure avec une autre huile exprimée, alors l'eſprit de vin a attiré à ſoi la premiere, & l'huile exprimée s'en eſt ſéparée. Mais, quand j'ai fait le mêlange avec une huile éthérée, alors l'eſprit de vin les attiroit toutes deux; mais il faut pour cela que l'huile de Copal ſoit parfaite-

ment pure, blanche, & ſans la moindre portion d'huile épaiſſe, ſans quoi celle-ci s'en ſépareroit dans la ſuite, & tomberoit au fond. Que ſi l'on mêle de l'huile de Copal pure avec de l'huile de térébenthine, alors l'alcohol attire la premiere, & laiſſe tomber au fond l'huile de térébenthine, comme de coûtume.

XIX. De tout ce que j'ai rapporté jusqu'ici, il paroit ſuffiſamment, à ce que j'eſpère, que la *Gomme de Copal* que l'on trouve ici dans nos Apoticaireries, & chez les Epiciers, n'eſt autre choſe qu'un vrai BITUME. Pour rendre la choſe encore plus évidente, il ſera néceſſaire d'indiquer ici quelques caractères principaux que doit avoir en général tout bitume, ou toute réſine.

Les réſines, ou bitumes, ſont des *corps minéraux, qui brûlent ſur le feu, & y jettent une fumée & une odeur qui leur ſont tout à fait propres; ils ne ſe diſſolvent, ni dans l'eſprit de vin, ni dans aucun autre menſtrue, à moins qu'on ne ſe ſerve de quelque procédé particulier; d'ailleurs ils ſont, tantôt fluides, tantôt ſolides, & dans le dernier cas ils ſont électriques. Les parties conſtitutives qu'on y trouve, ſont aqueuſes, graſſes, terreſtres, & ſalines; & celles-ci ſont fixes dans les uns, & volatiles dans les autres.*

En repaſſant à préſent toutes les Expériences faites ſur le Copal, telles que nous les avons rapportées en détail, elles nous découvrent toutes les parties conſtitutives ſusdites, à l'exception des ſalines; ce qui m'engage à bon droit à ranger le Copal au nombre des *bitumes ſecs qui approchent le plus de l'eſpece de l'ambre.* En effet

1. Le Copal, par ſa figure extérieure, par ſa forme indéterminée, par les inſectes & les autres corps qui s'y trouvent renfermés, auſſi bien que par ſes différentes couleurs, ſe montre très ſemblable au ſuccin, & par conſéquent à un bitume. (§. II.)

2. Il brûle (§. IX.) ſur le feu avec une flamme claire, de fortes vapeurs, une fumée épaiſſe, & une odeur particuliere, comme les autres bitumes, tels que l'ambre, les charbons de terre d'Angleterre, les charbons brillans, la poix de montagne, &c.

3. Après

Digitized by Google

3. Après avoir été consumé, il laisse, comme le font en partie les bitumes, un beau résidu leger & noir, qui a beaucoup de ressemblance avec l'asphalte brûlé. (§. IX.)

4. Il ne se laisse dissoudre, (§. VI. VII. VIII. & IX.) aisément, ni dans l'esprit de vin, ni dans aucun autre menstrue, à l'exception de l'huile de térébenthine, & ces menstrues n'en viennent à bout qu'après une forte digestion & ébullition. Que si c'étoit une Gomme, il faudroit qu'au moins l'eau distillée pût en dissoudre quelque chose, si ce n'étoit pas tout. Si c'étoit une Résine, elle devroit se dissoudre aisément au moins dans l'Alcohol. Si c'étoit une Gomme résine, les deux Menstrues devroient en attirer ce qui leur convient. Dès-là donc que les choses ne se passent pas de cette maniere, cela fournit une nouvelle preuve que c'est un corps d'un tout autre ordre, & qu'on ne peut le regarder que comme un bitume.

5. Le Copal, en le distillant, (§. X.) donne son peu de phlegme, sa double huile en grande quantité, & sa terre de poix, comme les autres bitumes.

6. Son phlegme (§. X.) se comporte comme le phlegme qu'on tire de la distillation de l'ambre *per se*; seulement il n'est pas mêlé avec un sel volatil acide.

7. L'huile qu'on en tire par la distillation (§. X.) a la même couleur, la même odeur bitumineuse, & le même poids spécifique, que l'huile de succin.

8. On obtient par sa rectification (§. XI.) la même sorte d'huile que fournissent les huiles bitumineuses rectifiées; & elle a la même vertu de dissoudre les corps, & les mêmes propriétés, que les autres huiles éthérées bitumineuses.

9. Cette huile se mêle avec plus de difficulté avec l'esprit de vin que les huiles éthérées du régne végétal, (§. XVIII.)

10. Le Copal avec l'huile de térébenthine donne un vernis, qui est pour la plus grande partie semblable au vernis d'ambre, (§. VIII.)

11. Son

11. Son *Caput mortuum* (§. X.) eſt auſſi pareil à celui de l'ambre.

12. Son huile rectifiée ne s'allume pas plus que les autres huiles bitumineuſes avec l'acide fumant du nitre, (§. XV.)

13. Avec cet acide, comme auſſi avec l'acide concentré du vitriol, elle donne par l'évaporation une maſſe brune gluante, comme le font le font le naphte, le pétrole, &c. & feu M. *Neumann* nommoit cette maſſe *æmulum ſuccini.*

14. Le Copal ſe laiſſe travailler comme l'ambre; ſeulement il eſt beaucoup plus mou, ce qui vient de la plus grande quantité de ſes parties huileuſes; car, tandis que l'ambre donne à peine $\frac{3}{4}$ d'huile, on en tire de notre Copal jusqu'à $\frac{7}{8}$, ſuivant mes Expériences du §. X.

15. L'ambre a dans l'eau, (§. II.) le même poids ſpécifique que le Copal.

XX. Si l'on vouloit tirer notre Copal de la claſſe des bitumes, parce qu'il ne donne pas un ſel volatil comme l'ambre, on ſeroit en droit d'en faire de même à l'égard de diverſes eſpeces de poix de montagne, de bitume de montagne, de charbon de terre, de tourbes, de terre d'*umbra*, &c. ce qu'il ſeroit impoſſible de juſtifier, & qu'on ne peut pas même regarder comme une conjecture plauſible. Car, c'eſt une choſe encore en queſtion que de ſavoir, ſi le ſel volatil appartient comme une partie conſtitutive eſſentiellement néceſſaire à la compoſition de tout bitume pur, transparent & conſiſtant. Si cela étoit, il en réſulteroit inévitablement pour conſéquence, que dans la décompoſition chymique de l'ambre, on doit trouver à chaque fois la même quantité de ſel volatil, d'huile, & de *caput mortuum.* Mais, c'eſt à quoi répugnent les Expériences réitérées de *Lemery*, de *Neumann*, &c. De cette maniere même il faudroit toujours exiger de ſemblables parties dans chaque bitume ſolide. On a donc bien plus de raiſon de croire que le ſel volatil de l'ambre eſt une choſe contingente, & qui n'entre point indiſpenſablement dans l'eſſence de chaque bitume, mais qui doit ſe trouver dans l'ambre entant qu'ambre. Et comme il paroit d'ail-

d'ailleurs que ces ſels volatils de l'ambre naiſſent d'un acide vitriolique, & d'une très petite quantité de parties terreſtres déliées, qui, ſelon toutes les apparences, procedent de ce que *Becher* a nommé *terra tertia*, ou *mercurialis*, on a d'autant moins ſujet de conſerver quelque doute là deſſus. L'acide même du nitre eſt capable de tirer de ſemblables ſels des ſujets végétaux. Quiconque aura répété l'Expérience de feu M. *Henckel*, faite avec deux parties d'eſprit de nitre fumant & une partie d'un eſprit de tartre duëment rectifié, & aura bien examiné ce qui en réſulte, ne diſconviendra pas de ce que j'avance. Mais ce n'eſt pas là l'unique Expérience qu'on puiſſe alléguer ſur ce ſujet. J'en puis produire une de celles que j'ai ſouvent répétées moi-même. Qu'on prenne deux onces de l'alcohol le plus fort; qu'on y ajoûte, en obſervant les précautions néceſſaires, autant d'eſprit de nitre fumant, préparé avec l'huile blanche de vitriol du nitre, le plus exactement dépuré de la premiere cryſtalliſation. Qu'on laiſſe ce mêlange bien bouché digérer à froid pendant quelques jours. Qu'enſuite on le pouſſe d'une retorte de verre, d'abord à un feu doux, on obtient de la maniere connue, d'abord la naphte du nitre, & enſuite un eſprit acide. Qu'on augmente après cela le feu jusqu'au plus haut degré, il ſublimera un beau ſel blanc transparent à longues pointes, qui ſe montrera revêtu de tous les caractères d'un ſel acide volatil ſec. On n'en a pas à la vérité par onces; mais des grains & des demi-ſcrupules ſuffiſent ſouvent pour la démonſtration d'une verité. Il eſt donc vraiſemblable que, dans leur origine, tant l'ambre que notre Copal, ſont des réſines fluides, qui dans la ſuite du tems ſe coagulent au moyen d'un acide du régne minéral; de ſorte que tout ſe réduit à la quantité plus ou moins grande dans laquelle cet acide y afflue, ou dans la maniere dont il attaque telle eſpece des parties conſtitutives, & s'unit plus ou moins fortement avec elles.

Je crois que les Expériences que j'ai rapportées dans ce Mémoire, & qui ont été pouſſées auſſi loin que mes forces l'ont permis, ſuffiſent pour prouver que le Copal de nos Apoticaires & de nos Droguiſtes eſt un vrai bitume, qui reſſemble pour la plus grande partie à l'ambre, & par conſéquent que c'eſt un ſujet du régne minéral.

OBSERVATIONS ANATOMICO-PATHOLOGIQUES SUR L'ENFLURE EXTRAORDINAIRE DE L'ABDOMEN PROCÉDANT DE DIVERSES CAUSES.

PAR M. MECKEL.

Traduit du Latin.

OBSERVATION I.

Sur une eſpece ſinguliere d'Hydropiſie renfermée dans un ſac.

On me livra le 27. d'Avril de l'année paſſée le cadavre d'un homme de quarante ans pour en faire la diſſection. L'abdomen étoit extrêmement enflé, très dur, & réſonoit, ſans qu'on ſentit aucune ondulation d'eau flottante, qui revint d'un des côtés de l'abdomen après qu'on avoit preſſé le côté oppoſé. L'état du corps quant au reſte étoit aſſez naturel, & paroiſſoit avoir été robuſte. Après avoir écarté les intégumens communs, je ſéparai avec précaution les muſcles abdominaux qui couvrent le péritoine. Cela étant fait, on n'apperçut derriere le péritoine aucune matiere fluide. Il falut donc le lever auſſi, toujours avec circonſpection, & alors je trouvai un ſac fermé de toutes parts, qui étoit renfermé dans la cavité du péritoine, formé d'une membrane qui lui étoit propre, & dont l'épaiſſeur avoit plus d'une ligne, & qui s'étendoit depuis le baſſin jusqu'aux fauſſes côtes par toute la cavité de l'abdomen. Au devant de ce ſac, dans la région ombilicale, il y avoit des morceaux déchirés, ſemblables à de la chair fongueuſe; ils étoient irrégulierement attachés au ſac, & le péritoine

toine étendu par deſſus y tenoit fortement. Le ſac ayant été ouvert du côté qui regardoit le nombril, il en ſortit avec impétuoſité une eau brune, qui s'écoula ſucceſſivement jusqu'à la concurrence du poids de quarante livres. Cette eau ſéreuſe n'avoit presque point d'autre odeur que celle des parties adjacentes gangrénées. Le ſac ouvert avoit vers les hypochondres une ſubſtance aſſez ſemblable à celle des ligamens, & ſon épaiſſeur étoit de deux lignes. Par en-bas il couvroit dans le baſſin la veſſie & l'inteſtin droit, en ſorte qu'il reſſembloit à une membrane tendue ſur ces parties. De là il alloit en montant au deſſus de la partie gauche du colon, à la tunique externe commune duquel il étoit attaché, & il couvroit pareillement les grands vaiſſeaux qui repoſent ſur les vertébres. Son expanſion vers ces parties ſupérieures avoit repouſſé les productions du péritoine qui ſervent à tenir les inteſtins dans leur ſituation naturelle, ſavoir le méſentere & le méſocolon, & les avoit enfoncé, avec les inteſtins qui y ſont attachés, vers les hypocondres. Je trouvai donc l'inteſtin coecum dans l'hypocondre droit, devant le rein droit, & poſé ſur lui, & l'ileon qui s'y étoit transverſalement inſéré, au deſſus de la région ombilicale. De plus, les inteſtins grêles étoient tous renfermés dans l'épigaſtre & dans la cavité de l'hypocondre gauche, au deſſus de ce ſac, comme dans les femmes groſſes ils ſont ordinairement placés au deſſus de l'uterus. Le ſac même s'étendoit ſous le cartilage enſiforme du ſternum & les fauſſes côtes, adhérent au péritoine, qui tapiſſe les muſcles du bas ventre, de la longueur d'une paume, depuis le nombril vers en-haut; de façon que, ni les inteſtins, ni le ventricule, n'etoient viſibles, tandis que le ſac étoit dans ſon état de dilatation. La partie ſupérieure du ſac étoit noire & ſphacéleuſe; la partie inférieure vers le baſſin d'une couleur jaunâtre; l'inteſtin coecum qui ſe trouvoit au deſſus, étoit fort dilaté & livide; l'omentum tout entier tenoit au péritoine, & les inteſtins avoient conſervé leur couleur naturelle. Le foye avoit été tellement repouſſé par le ſac dans la cavité de l'hypocondre droit que le haut de ſon lobe droit remontoit jusqu'à la quatrieme côte, & qu'il étoit fort caché derriere les bords des cartilages des côtes de cet hypocondre.

Le ventricule placé dans l'hypocondre gauche, remontoit jusqu'à la cinquieme côte.

Outre cela le foye, au deſſus de l'endroit où l'omentum & la partie transverſale du colon ſe trouvoient adhérens contre nature, tenoit auſſi par ſa ſurface ſupérieure, au moyen de pluſieurs ligamens auſſi contre nature, au péritoine dont étoient envelopés les muſcles qui ferment l'épigaſtre, & au diaphragme; & quant à ſon bord tranchant, il étoit fortement attaché au ſac de l'hydropiſie. La partie du colon qui forme ſa ſeconde courbure dans le côté gauche, montoit dans la partie la plus haute de l'hypocondre gauche; & le ventricule placé au deſſus ſe déroboit entierement à la vue, ayant été réduit par la contraction à la forme d'un gros boyau. La ratte avoit perdu de même ſa ſituation naturelle, ayant été portée plus haut; & elle étoit adhérente partout à la partie poſtérieure de l'hypocondre. Le bas de l'inteſtin droit, couvert par le ſac dans le baſſin, étoit ſphacéleux & noir. Les reins gardoient leur ſituation naturelle derriere le ſac & le péritoine. Les vaiſſeaux des teſticules étoient variqueux, & les teſticules eux-mêmes ſquirreux. Le thorax contenoit des poûmons comprimés, petits, adhérens; mais qui n'avoient, ni ſquirroſités, ni ſuppuration. Mais ce qui ſemble dans cette Obſervation le plus rare, & le plus digne de remarque, c'eſt que le péritoine étant demeuré dans ſon entier, & ne ſervant point d'envelope au ſac, il s'en ſoit formé un dans la cavité du péritoine, ayant ſa membrane propre & continue partout, adhérent aux parties qui ont été indiquées, & dans lequel n'entroit aucun grand vaiſſeau. C'eſt ce qui faiſoit que la membrane de ce ſac pouvoit être aiſément ſéparée partout du peritoine, & des parties adjacentes de l'abdomen.

Il eſt par conſéquent difficile d'expliquer d'où ce ſac a tiré la formation de ſes membranes. Que la tunique celluleuſe puiſſe en s'étendant former des ſacs de diverſe capacité, & remplis de liqueurs de différente eſpece, c'eſt à la vérité ce que prouvent abondamment les Obſervations des Iléatomes, & d'autres tumeurs cyſtiques de toutes ſortes de

genre;

genre; auſſi n'y auroit-il point de difficulté dans l'explication que nous cherchons, ſi ce ſac avoit été adhérent hors du péritoine, avec ſes racines dans la membrane cellulaire. Il n'en eſt pas de même d'un ſac renfermé dans la cavité du péritoine; la choſe eſt tout autrement embarraſſante. Il ne nous paroit pas qu'on puiſſe recourir à d'autre raiſon qu' à la nature de ce liquide visqueux & coagulable qui s'exhale de l'abdomen; mais il demeure toujours d'extremes obſcurités dans la maniere dont ce liquide a pu former un ſac de cette grandeur & de cette conſiſtance, dans lequel une matiere ſi copieuſe ſoit demeurée continue, ſans le créver, & ſans inonder tous les interſtices des intestins & des viſceres. Il ne paroit pas qu'on puiſſe nier que cette tumeur a pris naiſſance dans le baſſin, & qu'en s'élevant inſenſiblement de là, elle a écarté les inteſtins, en les pouſſant dans l'abdomen, comme le fait l'uterus dans la groſſeſſe. En effet, une quantité de liquide répandue de toutes parts dans l'abdomen n'auroit pu s'y raſſembler & s'y condenſer en un ſemblable ſac membraneux, ſans renfermer les inteſtins, ou s'inſinuer dans leurs interſtices. Comme donc on ſçait par une expérience quotidienne que, d'une liqueur exhalante, visqueuſe, & gélatineuſe, il peut ſe former des fibres, & qu'on en trouve en effet dans les cadavres, au moyen desquelles tous les viſceres de l'abdomen ſont adhérens entr'eux & avec le péritoine, ou bien les poûmons avec la pleure tiennent au thorax; on peut concevoir de même, comment une liqueur ſemblable raſſemblée, & peut-être épaiſſie après l'inflammation, a pu former ce ſac, fortement adhérent au péritoine dans le baſſin. Nous appercevons auſſi très évidemment de quelle maniere cette membrane peut continuer à former une tunique celluleuſe contre nature, & à recevoir les plus petits vaiſſeaux qui ſe prolongent des autres membranes, quand nous faiſons attention à la diſpoſition que les vaiſſeaux les plus ſubtils ont à ſe remplir dans de ſemblables corps, où le vice de la coalition contre nature des viſceres eſt une ſuite de la production de ces ligamens auſſi contre nature qui doivent leur origine à l'épaiſſiſſement d'une liqueur exhalante. Outre pluſieurs petites préparations anatomiques de cet ordre que je conſerve,

j'ai un poûmon droit attaché par le lobe inférieur au ſac entier de ſa pleure, au moyen d'une celluleuſe formée en ligamens. L'injection met ſous les yeux les vaiſſeaux en très grande abondance, prolongés de la pleure & de la ſurface du poûmon, & continués dans cette membrana qui eſt un tiſſu de ligamens. Nous ſuppoſons donc que la matiere d'une liqueur épaiſſie étant deſcendue au fond du baſſin, peut-être dans cet endroit où le pli de Douglas fait une eſpece de recoin entre l'inteſtin & la veſſie, y aura formé d'abord une eſpece d'ampoulle, ou de petit ſac; qu'enſuite de très petits vaiſſeaux, mais en très grande quantité, auront continué à exhaler dans ſa cavité un liquide qui s'y eſt accumulé; ce qui a également favoriſé, & l'expanſion, & la formation ultérieure des particules visqueuſes & des petites membranes qui ont contribué à l'accroiſſement du ſac. De la même maniere, nous comprenons que les petits vaiſſeaux du péritoine comprimés par ce ſac accru ont répandu extérieurement ſur le ſac un liquide plus épais; en ſorte que cette membrane s'étant inſenſiblement épaiſſie, elle a acquis une forces ſuffiſante pour réſiſter à l'action du liquide qui s'eſt augmenté au dedans. C'eſt par ces moyens donc que le ſac dont j'ai donné la deſcription a pu devenir une maſſe dont la compreſſion exercée ſur les viſceres a cauſé leur corruption ſphacéleuſe, en y arrêtant la libre circulation du ſang; corruption, qui, comme je l'ai dit, s'étoit manifeſtée dans l'inteſtin droit, & dans le colon. De plus, la compreſſion des poûmons, en embarraſſant toujours plus la circulation du ſang, a hâté la fin du miſérable qui éprouvoit tous ces ſymptômes. Que cette liqueur n'ait pas été pourrie par une ſi longue ſtagnation, c'eſt ce dont nous nous étonnerons d'autant moins que nous ferons plus d'attention aux Obſervations ſuivantes qui font foi de l'inaltérabilité d'un ſemblable liquide ainſi renfermé. Mais ce dont on ne ſauroit douter, c'eſt qu'une hydropiſie de cette eſpece ne ſoit incurable, puiſque l'épaiſſeur de la membrane où l'eau eſt renfermée ne permet aucune reſorption; on ne peut employer qu'une cure palliative, propre cependant à conſerver aſſez longtems la vie au malade, en recourant à la ponction, ou paracenteſe de l'abdomen, qui produit de bons effets, tant

tant que la matiere contenue dans le ſac demeure fluide, & que la celluleuſe n'eſt pas trop condenſée pour qu'on ne puiſſe la bleſſer ſans danger.

OBSERVATION II.

Le cadavre d'une femme de ſoixante ans, qui avoit été robuſte & graſſe, préſentoit un abdomen extrêmement gonflé & fortement tendu, ſans fluctuation dans la tumeur, qui avoit l'air de l'hydropiſie ascite. Il y avoit eu à la cuiſſe gauche une tumeur inflammatoire, qui avoit ſéparé l'épiderme de la peau, ſous laquelle il ſembloit que fût renfermée une matiere purulente; mais on trouva le contraire après la diſſection de la peau. Les muſcles de l'abdomen étoient dilatés comme dans les femmes groſſes, le péritoine placé ſous ces muſcles avoit conſervé ſa ſtructure naturelle, ſans qu'on y remarquât aucune adhérence contre nature auxe viſceres. Après l'ouverture du péritoine ſe montra un ſac qui rempliſſoit tout l'abdomen; il étoit blanchâtre avec des taches tirant ſur le bleu. Quand on eût ſéparé une hydatide de moindre groſſeur qui étoit attachée à ſa partie antérieure, on apperçut des veines qui couroient partout ſur ſa ſurface. Du côté gauche ce ſac repoſoit librement ſur la partie gauche du colon, s'étendant depuis les os pubis jusqu'à l'épigaſtre, où il ſe terminoit à la diſtance de deux travers de doit de l'extrémité libre du cartilage enſiforme. Le colon étoit placé transverſalement ſur ce ſac dans la partie la plus haute de l'épigaſtre, & l'omentum flottoit librement au deſſus de la tumeur.

Du côté droit ce ſac tenoit par le bas au péritoine, & par ſa ſituation dans la cavité de l'os des iles il avoit pouſſé l'inteſtin cœcum au deſſus de la crête de cet os. Pour l'inteſtin ileon, il alloit à droite derriere la tumeur jusqu'au deſſus de la ſeconde vertebre des lombes, & en deſcendant il s'inſéroit à l'inteſtin cœcum. Les inteſtins grêles, ſavoir le jejunum & l'ileon, étoient renfermés dans l'hypocondre gauche au deſſous du méſocolon. Le foye avoit été porté plus haut, & ſon bord pointu s'écartoit de trois pouces du bord des côtes de l'hypocondre droit; ce viſcere étoit d'ailleurs parfaitement ſain. Le diaphragme

me remontoit au deſſus du foye, dans l'interſtice entre la troiſieme & la quatrieme côte. Le lobe gauche du foye, par ſon bord antérieur aigu, ſe terminoit à l'extrémité la plus baſſe du ſternum. Dans cet endroit, la partie ſupérieure de l'arc du diaphragme montoit jusqu'au milieu du corps du ſternum. Le ventricule ſe trouvoit placé derriere les inteſtins grêles dans l'hypocondre gauche, ſans aucune leſion ni adhérence contre nature.

L'uterus allongé du côté gauche étoit devant la tumeur qui le couvroit dans le baſſin, & à laquelle il étoit attaché par une cellulcuſe contre nature. La trompe gauche de Fallope qui s'étoit réunie à l'ovaire tenoit fortement au ſac; & la gauche, attachée auſſi par le bas au même ſac, étoit gonflée par l'eau qui la rempliſſoit. A la place de l'ovaire droit ſe préſentoit cette tumeur conſidérable, dont la longueur étoit de douze pouces de Paris, & la largeur de dix & demi. Après l'ouverture il en coula une eau tout à fait claire, un peu ſalée, parfaitement ſemblable à la lymphe du ſang, qui écumoit beaucoup, & donnoit d'abord à l'argent une couleur noire; cependant elle n'entroit point en effervescence avec l'huile de vitriol & l'eſprit de nitre; mais de ſon mêlange avec l'huile de vitriol exhaloit une odeur des plus fétides & inſupportable, au lieu qu'avant ce mêlange elle n'avoit aucune odeur ſenſible. Le ſac contenoit vint quatre livres de cette eau, poids médicinal.

Je trouvai la cuiſſe où il y avoit eu inflammation, parfaitement immobile dans ſon articulation avec l'os innominé. Mais, en écartant les muſcles, toute la ſubſtance ligamenteuſe de l'emboiture, & la ſubſtance cartilagineuſe qui incruſte la tête de l'os du femur, ſe trouverent changées en un os raboteux & tuberculeux.

Le bord de l'emboiture étoit pareillement devenu inégal & oſſeux; tandis que la ſurface entiere de cette même emboiture étoit raboteuſe partout, & percée d'une infinité de trous. La tête de l'os du fémur dans toute ſa ſurface étoit inégale & tuberculeuſe, un anneau oſſeux l'environnoit, & ſes inégalités s'ajuſtoient tellement avec le bord

oſſeux

oſſeux de l'emboiture, que l'os fortement adhérent à l'emboiture étoit dans une parfaite immobilité, ſans la moindre diſpoſition au mouvement rotatoire qui lui eſt naturel. De la tête de l'os du fémur deſcendoient, dans l'ouverture inférieure de l'emboiture, des avances irrégulieres oſſeuſes, qui faiſoient un tout continu avec celles de l'emboiture. Le reſte de l'os du fémur n'avoit ſouffert aucun dommage.

Cette Obſervation nous apprend, d'un côté, qu'il peut ſe raſſembler dans les hydatides une très grande quantité de l'eau lymphatique du ſang; & de l'autre, que les liqueurs ainſi renfermées ſe corrompent & s'épaiſſiſſent très rarement. L'eſpece de ce liquide renfermé indique la facilité de le faire ſortir des tumeurs où il ſe trouve; & c'eſt l'unique reſſource contre l'extreme compreſſion des poûmons & des viſceres que ces tumeurs cauſent. Quant à la carie de l'os du fémur & de l'emboiture, il ſemble qu'on doive l'attribuer à la preſſion qu'avoit éprouvée le côté droit.

OBSERVATION III.

Tumeur de l'abdomen, accompagnée d'une hernie incarcerée, & d'un entortillement particulier du méſentere.

Dans le cadavre d'une vieille femme, d'environ 70 ans, je trouvai l'abdomen enflé à l'hypogaſtre; & après l'ouverture parut une tumeur molle, ovale, membraneuſe, barriolée extérieurement partout de lignes brunes, & endommagée dans ſa partie inférieure par une noirceur ſphacéleuſe. Cette tumeur, ſortie de l'ovaire droit, avoit rempli tout le baſſin; & elle étoit remplie d'une liqueur jaunâtre fétide. Sa partie la plus élevée tenoit fortement à l'omentum, avec laquelle elle s'étoit comme réunie; l'omentum deſcendoit du colon, & étoit garni de beaucoup de graiſſe.

Le colon étoit noir, ſphacéleux, & ſi rétréci qu'il étoit plus mince que l'inteſtin grêle du même corps, ayant à peine un pouce de diametre; du côté droit, il alloit en montant derriere l'inteſtin jejunum;

puis continuant au deſſus de la tumeur il alloit au delà du jejunum; du côté gauche, il avoit une très grande noirceur ſphacéleuſe, & deſcendant dans le baſſin, il alloit ſe cacher derriere la tumeur, & ſe terminer dans le rectum. L'inteſtin iléon entierement ſphacéleux étoit tout noir, & s'étant contracté il ſe trouvoit caché ſous la tumeur, dans la partie du baſſin la plus baſſe; il s'en étoit attaché quelque partie vers le bas de la tumeur, derriere laquelle il alloit enſuite en s'élevant du baſſin, & montant à droite, pour aller ſe terminer dans le colon, qui étoit auſſi fort noir & comprimé dans cet endroit. Le méſentere de cet inteſtin formoit un triple contour vers la trompe de Fallope qui depuis l'uterus alloit en montant aboutir à la tumeur; ce méſentere avec la racine de la tumeur avoit formé trois conduits ſpiraux, & tous ſes vaiſſeaux veineux étoient extrêmement gonflés de ſang. La partie la plus baſſe de l'inteſtin jejunum, placée derriere la tumeur & dans le baſſin, ſortoit de la cavité de l'abdomen du côté droit, & ſe rendoit dans un petit ſac, ou production du péritoine, derriere le ligament de Poupart. Ce petit ſac hernieux avoit la plus grande noirceur ſphacéleuſe; l'inteſtin qui y entroit, étoit gangréneux, & rempli d'un ſang de couleur brune. La partie de l'inteſtin cachée dans le ſac y étoit reſſerrée; & derriere le ligament très épais qu'on nomme de Poupart, la compreſſion l'avoit rendu blanc. Cela étoit cauſe que la partie de cet inteſtin qui continuoit dans l'abdomen derriere la tumeur, étoit toute reſſerrée, noire, & corrompue; au contraire ſa partie la plus conſidérable, plus voiſine du ventricule, & placée ſous lui, repoſant ſur le colon du côté droit auprès de la tumeur, étoit tellement dilatée, ſes tuniques avoient acquis tant d'épaiſſeur, & les vaiſſeaux rouges gonflés de ſang y étoient ſi abondans, que ſon diametre ſurpaſſoit trois pouces, jusqu'à ſa fin ſous le méſocolon. Pour le ventricule & le duodenum, ils n'avoient été endommagés par aucune inflammation, ou dilatation contre nature, ſemblable.

Ce qui mérite d'être le plus ſoigneuſement conſidéré dans cette Obſervation, c'eſt cet entortillement particulier du méſentere qui a été la cauſe de l'inflammation & de la gangrene de l'iléon. Il m'arrive aſſez ſouvent

ſouvent de trouver un ſemblable changement contre nature dans le méſentere des enfans; & il eſt quelquefois accompagné de gonflement des inteſtins & de corruptions gangréneuſes. Peut-être même qu'il en peut réſulter des douleurs, & des inflammations dans les inteſtins, qui ſont incurables. On paroit devoir en rapporter l'origine à la trop grande réplétion des inteſtins & au gonflement qu'elle produit: & ce ſont là les cauſes les plus fréquentes de la mort des enfans. En effet une partie de quelque inteſtin, gros ou grêle, étant ainſi gonflée, preſſe latéralement une autre partie adjacente, de façon que l'inteſtin avec le méſentere qui lui ſert de ligament eſt déplacé; d'où s'enſuit que la racine du méſentere la plus prochaine des vertebres eſt néceſſairement tordue: ce qui arrête la circulation du ſang dans les inteſtins, & ſurtout ſon reflux par les veines.

La contraction extreme du colon & de tout le gros inteſtin, étant ſuivie d'irritation & d'inflammation, annonce ſuffiſamment la forte contraction des fibres muſculaires qui doit en réſulter; & la même Obſervation explique avec autant d'évidence d'où procede la dilatabilité de l'inteſtin grêle jejunum, & l'épaiſſeur des tuniques de ces inteſtins par la répletion des vaiſſeaux ſanguins. Mais une circonſtance qu'il ne faut pas négliger, c'eſt le changement arrivé dans le duodenum au deſſus du méſocolon. Il y a tout lieu de conjecturer que, dans le paſſage de l'inteſtin grêle duodenum derriere le méſocolon dans le jejunum, la Nature a oppoſé quelque réſiſtance particuliere, qui, faiſant ſéjourner le chyle plus longtems dans le duodenum, eſt la cauſe qu'il ſe mêle d'autant mieux à la bile & au ſuc pancréatique. C'eſt cette même réſiſtance qui fait obſerver dans la pratique tant de flatuoſités, qui paroiſſent naître de ce que les alimens ſont trop longtems arrêtés dans les inteſtins, & s'y corrompent, lorsque le chyle ſuffiſamment élaboré ne trouve point d'iſſue pour ſe rendre du ventricule & du duodenum dans le jejunum. On apprend encore par cette Obſervation, combien les viſceres abdominaux peuvent être léſés par une ſemblable tumeur petite & mobile, dont la ſeule compreſſion peut aiſément être & devient ſouvent une cauſe de mort.

OBSERVATION IV.

Tumeur extraordinaire de l'abdomen, cauſée par un gonflement des inteſtins qui venoit de leur introſuſception.

Les accidens qu'on nomme *introſuſceptions des inteſtins*, ne ſont, ni rares, ni mortels dans les enfans; & l'inflammation n'a pas coûtume de s'y joindre toujours. Comme les inteſtins des enfans ſont lâches, il paroit qu'ils ſe démêlent plus aiſément, & que leur conſtriction ne devient pas aſſez forte pour être mortelle. Mais, quand le même cas exiſte dans les adultes, il les met dans un très grand danger de la vie, & ne ſe termine preſque jamais que par un miſérere mortel.

Le cadavre d'une femme de trente-deux ans offroit une tumeur extraordinaire de l'abdomen, à travers les intégumens duquel on pouvoit diſtinguer les conduits des inteſtins qui s'avançoient en dehors. Après l'ouverture de l'abdomen, je trouvai une très grande protubérance des inteſtins grêles, en ſorte qu'on ne pouvoit plus s'appercevoir qu'ils étoient grêles par leur diametre, mais ſeulement par l'expanſion cylindrique également proportionnée de leurs tuniques. Les vaiſſeaux gonflés de ſang rendoient ces inteſtins fort rouges; mais à la ſurface ils étoient couverts d'une croûte purulente fort tenace. Du ventricule deſcendoit l'omentum, farci d'une graiſſe dure & granuleuſe; il étoit adhérent à la partie de l'inteſtin colon qui, placée au côté gauche, deſcend vers le rectum. Le diametre des inteſtins grêles dans cet état de protubérance alloit à deux pouces & demi; & la ſubſtance de leurs tuniques avoit deux lignes d'épaiſſeur. En pouſſant mes recherches au delà derriere ces inteſtins grêles, je ne trouvai, ni l'inteſtin coecum, ni l'endroit où le colon s'en continue; mais, ſous le foye, dont la véſicule étoit fort gonflée d'une bile verte, ſe trouvoit l'inteſtin iléon gâté par le ſphacele & la gangrene, lequel s'introduiſoit dans le colon, près du coecum, ſous le foye, le proceſſus vermiforme étant ſitué ſous le foye & la véſicule du fiel, & le coecum étant déchiré par une crévaſſe. L'iléon étoit étroit dans la partie où l'introſuſception avoit

avoit eu lieu, mais au delà il étoit extraordinairement dilaté, en ſorte que ſon diametre égaloit trois pouces & demi, & ſes tuniques avoient deux lignes & demie d'épaiſſeur. Lorsque j'examinai enſuite plus attentivement cette introſuſception, je trouvai que l'inteſtin iléon, dans l'endroit où il s'inſere dans le colon, étoit entré de la longueur d'un pied dans le coecum & dans le colon, & s'étoit renverſé dans celui-ci, en ſorte que la tunique villeuſe de l'iléon, noircie & corrompue, paroiſſoit extérieure au dedans du coecum; & celui-ci avoit été crévé par la dilatation que lui avoit cauſé l'entrée de l'iléon. Il y avoit pareillement une rupture de l'iléon dans ſa partie la plus dilatée qui avançoit au delà de l'introſuſception; & une partie des matieres contenues dans cet inteſtin s'étoit répandue dans l'abdomen.

Au deſſous de cette introſuſception de l'iléon, la partie transverſale du colon, avec celle qui deſcend du côté gauche, s'étoit introduite dans la partie inférieure du colon qui forme la courbure du colon nommée *S. Romanum*, en ſorte que toute cette partie des gros inteſtins qui étoit dans le cas de l'introſuſception repoſoit ſur la cavité de l'os des iles du côté droit, & ſur le muſcle iliaque interne du même côté. Une partie auſſi de l'omentum, avec la partie transverſale du colon, étoit entrée dans la partie deſcendante du colon. Il n'y avoit pourtant là, ni corruption gangréneuſe, ni rupture; la cohéſion des inteſtins n'étoit pas non plus auſſi forte que dans l'introſuſception précédente, en ſorte qu'on avoit plus de facilité à les retirer l'un de dedans l'autre.

Cette eſpece d'introſuſception, la plus mauvaiſe de toutes, avoit ſans doute été incurable, l'inteſtin iléon s'etant introduit & renverſé dans le colon par l'orifice étroit de la valvule du colon. Les remedes qui pourroient agir avec force ſur l'iléon, ou l'argent vif introduit dans le canal des inteſtins, ſeroient plus propres dans ce cas à engager encore plus les inteſtins l'un dans l'autre qu'à les dégager. Peut-être que les lavemens préviendroient cet accident, & que par leur retropreſſion ils repouſſeroient la partie de l'iléon par l'orifice dilaté de la valvule du colon. Cependant la contraction née de l'irritation que les lave-

mens excitent pourroit auſſi produire un effet contraire, & pouſſer l'inteſtin reſſerré encore plus avant dans le colon. Ainſi la cure de ce mal ne pourroit réuſſir qu'en recourant à cette opération douteuſe, mais qui ne laiſſe pas d'avoir quelques partiſans, au moyen de laquelle, après avoir ouvert l'abdomen, on fait ſortir l'inteſtin reſſerré de celui dans lequel il eſt entré. On peut juger que cette maladie a duré aſſez longtems, avant que de devenir mortelle, par l'extreme dilatation qu'ont éprouvée les inteſtins grêles, ſoit dans leurs tuniques, ſoit dans le volume de leur canal; dilatation que les humeurs ont produite en ſe raſſemblant inſenſiblement dans les vaiſſeaux & dans le canal même. Enfin, la dilatation non moins grande de la véſicule du fiel, & l'abondance de la bile dont elle étoit remplie, nous apprennent auſſi, que, quand les inteſtins ſont trop dilatés, (car, dans le cas dont il s'agit, le duodenum avoit ſouffert une grande expanſion,) le paſſage de la bile par le cholidoque eſt arrêté, parce que la celluleuſe trop épaiſſie comprime ce canal à ſa ſortie.

RÉPONSE
A LA
DISSERTATION
DE
M. LE COMTE RONCALLI,
SUR L'INCULATION DE LA PETITE VE'ROLE (*).

PAR M. LE COMTE DE REDERN,
GRAND MARECHAL DE LA COUR DE S. M. LA FEUE REINE MERE, ET CURATEUR DE L'ACADEMIE.

Vous avez fait l'honneur, Monſieur, à l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Berlin, de luy envoyer une Diſſertation, que vous avez écrite contre l'inoculation de la petite vérole. Vous vous félicitez modeſtement d'avoir renverſé vous ſeul cette Idole, que l'Enfer, ou je ne ſais quel preſtige, avoit placé ſur les Autels d'Eſculape, & à qui le monde entier alloit prêter hommage. *Certe nunc videor mihi jure blandiri poſſe, me de Publico optime meruiſſe, ut pote qui cunctis Italiae proximorumque Regnorum Scholis ſilentibus, Patriam, Principum familias, denique univerſum Terrarum orbem, ab artificiali imminente, moxque graſſatura peſte, unus, modeſte liceat gloriari mihi, liberaverim.*

Vous me diſpenſez de vous traduire; je ne rendrois pas la force & l'énergie d'une belle latinité.

Si l'intérêt de la vérité eſt celui de tous les hommes; s'il doit être cher particulierement aux gens de Lettres, voués à ſon ſervice; ſi l'heureuſe découverte enfin contre laquelle vous déclamez avec tant

(*) Lue dans l'Aſſemblée publique du 31 Mai, 1759.

tant de véhémence, eſt une de ces vérités, qui mérite l'attention particuliere de tous les hommes qui penſent; vous jugez bien, Monſieur, que votre Diſſertation ne pouvoit pas reſter ſans réponſe à Berlin, ſi même vous aviez pû réuſſir à impoſer ſilence aux autres Nations de l'Europe.

La Pruſſe vous fournit, Monſieur, la preuve la plus forte contre l'inoculation de la petite vérole, dont vous couronnez votre ſavant Mémoire; la ſeule en effet, ſi elle etoit vraye, qui mériteroit ce nom, de toutes celles qu'il vous plait d'honorer de ce titre.

Vous faites convoquer au Roi une aſſemblée générale de tous les Médecins de ſes Univerſités, pour faire une Conſultation ſur l'inoculation de la petite vérole.

Vous aſſurez, que les Inoculateurs & les Inoculés, après avoir ſubi les châtiments les plus rigoureux, ont été bannis du Royaume; & vous apprenez à toute l'Europe, qu'une Loi ſévere, qui défend pour toujours l'inoculation ſous les peines les plus griéves, les étend jusques aux Gardes, aux Parents les plus éloignés, & aux Tuteurs des Enfans, obligés d'en répondre.

Pro hujusque ſcripti coronide ſilere non debeo Regem Pruſſiae, re prius excuſſa & conſulta cum ſapientiſſimis Medicis ſuarum Univerſitatum, inſitionem variolarum damnaſſe, atque in exilium miſiſſe non ſolum, ſed poena graviſſima multaſſe inſitores, ipſosque inſitos, aut pro ipſis, ſi pueri ſint, eorum cuſtodes, agnatos, tutores.

Je ne m'arrête pas à la défenſe des peuples qui pratiquent l'inoculation, & des hommes célébres, qui ont tâché de faire comprendre, & de démontrer ſa néceſſité, & ſa grande utilité. Vous les citez tous par leurs noms, parce qu'il vous a plû de faire un Mémoire tout en citations; & ſi vous avez tort, il faut convenir qu'on ne peut pas l'avoir d'une façon plus ſavante, & plus érudite. Que penſeriez-vous, Monſieur, d'un aveugle, qui, après avoir nommé par ſon nom chaque Païs, chaque Ville, chaque Village, & chaque homme, qui

aſſure

aſſure que le Soleil luit, s'obſtine à le nier, parce que tel eſt ſon bon-plaiſir.

Vous ne trouvez aucune difficulté à traiter de fables, les Expériences de pluſieurs ſiecles, faites chez les Nations les plus éclairées, par les hommes les plus eſtimés pour leur ſavoir, leurs lumieres, & leur intégrité.

Oſerois-je vous demander; connoiſſez vous les Ouvrages que vous citez autrement que par leur nom? Les avez-vous examiné, & peſé? Il me paroit que non. Vous les condamnez par le droit d'une Légiſlation abſolue; *dicere auſim, me nunc poſſe veſtimenta Advocati deponere, novaque Legislatoris induere.* Avec la profonde connoiſſance que vous avez de la Charlatanerie de beaucoup de Médecins, auriez-vous décidé comme la Fable: *A' tort & à travers, on ne ſauroit manquer, condamnant les pervers.*

Cependant vous me diſpenſez par vos citations de vous rappeller tout ce qu'on a fait pour ne pas laiſſer de doute ſur une découverte auſſi intéreſſante pour le genre humain.

Vous vous appuyez ſur deux prétendues expériences, que vous nommez, *Experimenta inoculationis*, par lesquelles vous croyez donner le démenti à des expériences ſans nombre, faites avec les plus grandes précautions. C'eſt l'Egide que vous oppoſez au monſtre effroyable, qui alloit engloutir l'eſpece humaine. Vous ſavourez, à longs traits, le plaiſir d'une victoire ſi glorieuſe, ſi bien méritée; & dans cette douce yvreſſe, vous priez Dieu avec un zèle un peu inhumain: *Ut diſtet hæc inoculationis labes, & peſtis a Gallicis, Germanicis & Italicis Regionibus, atque redeat ad Barbaros; quod Deus optimus maximus faciat.* Vous priez Dieu pour la France, l'Allemagne, dont je vous fais mes très humbles remercimens, & l'Italie; l'Angleterre & le reſte du Monde barbare eſt condamné impitoyablement. En vérité ces pauvres Anglois ſont à plaindre. Dois-je vous faire le plaiſir de vous rappeller, qu'il n'y a pas trente ans, que, dans la même Egliſe, où l'Evêque de Worceſter prononce aujourdhui un Sermon

pour l'inoculation, on prêcha contre elle, comme contre une pratique introduite par l'Eſprit malin dans la perſonne de Job, qui avoit été, diſoit le pieux & ſavant Orateur, inoculé par le Diable? Quel trait de lumiere vive, & quelle joye pour vous, que le triſte ſort de ce pauvre Peuple hérétique, auquel il n'a falu qu'une génération, pour tomber dans les ténébres de la plus profonde barbarie!

Mais la Religion, la Raiſon, permettent-elles une joye ſi exceſſive, ſi immodérée? Quoique je ne doute pas de la force de vôtre tempérament, je tremble pour vous: il me paroit que j'entens cet Alexandre, qui ſe meurt, en criant; *J'ai gagné la victoire. In Epilogum habe per methodicam divinæ Artis ſemitam, Vir Celebratiſſime, Doctiſſime, Purgantia, Refrigerantia, Nitrata, Opiata, Epiſpatica, &c.* Et ſi les cauſes morales ſouvent ſont auſſi efficaces dans la Médecine, que les phyſiques, je m'eſtimerois heureux, ſi je puis vous fournir quelques foibles raiſons pour calmer une joye capable de bouleverſer la machine la mieux conſtituée.

Dans votre douce illuſion, vous ne faites pas attention, Monſieur, que le premier cas prouve tout contre vous. M. *Marocchi*, ſoutenu de l'autorité d'un Eccléſiaſtique éclairé, inocule heureuſement un garçon de trois ans, neveu de ce ſage Eccléſiaſtique, & le ſauve; la petite vérole naturelle avoit emporté ſes ſix freres; mais des femmes imbécilles crioient contre lui. Vous ſied-t-il, Monſieur, d'être le Héraut de crialleries auſſi impertinentes? Le ſecond cas, c'eſt une jeune fille, à laquelle vous-même avez laiſſé prendre la petite vérole naturellement, & qui meurt. Vous devriez gémir de ne l'avoir pas inoculée, & ne pas confondre, je dirois malicieuſement, ſi je vous en croyois capable, l'épidémie naturelle, ou la communication de la petite vérole, avec l'inoculation. Voilà ce qu'il vous plait d'appeller, *experimenta inoculationis*, pour démentir les hommes célébres, auxquels vous prodiguez les épithètes les plus indécentes. Eſt-ce ſéricuſement? Faites-vous attention, Monſieur, que vous inſultez à des Citoyens éclairés & reſpectables, qui, en publiant leurs obſervations, & receuillant les tentatives,

ves, & les expériences, qu'ont faites les différents Peuples de l'Europe, pour perfectionner, & assurer l'inoculation, transmettent à la posterité les progrès qu'ont fait chez ces Nations la Vérité, l'Esprit humain, & les Sciences.

Vous traitez avec quelque égard, parce que vous la croyez capable de chanter la palinodie, la Sorbonne, dont le jugement sur cette matière ne mérite aucune attention. Peut-être me taxerez-vous de prévention hérétique, ou nationale. Mais en Prusse, on consulte chacun sur ce qu'il est censé savoir; le Théologien sur la Controverse, & le Philosophe sur les mystères de la Nature.

Les annales des connoissances humaines transmettront à la postérité, comme des hommes auxquels le genre humain est redevable de la découverte la plus utile, comme les témoins & les Apôtres d'une des vérités les plus importantes, les *Tarris*, les *Castros*, les *Harris*, les *Pilarinos*, les *Taylors*, les *Meads*, les *Arbuthnotts*, les *Jurins*, les *Kirkpatricks*, les *Ranbys*, les *Tronchins*, & l'Evêque de Worcester, que vous traitez de faiseurs de contes & de visionnaires. Vous faites semblant d'avoir un peu plus de ménagement pour M. *de la Condamine*, quoiqu'il soit digne de votre colère autant, & plus que les autres. Vous faites ses excuses. Vous lui insinuez, comme à la Sorbonne, avec le ton d'un apprentif Législateur, de changer de sentiment, & vous le plaignez d'avoir donné si aveuglément dans le panneau; ce qu'il n'auroit pas fait, assurez-vous, si plus éclairé, *Medicinam ad aliquot annos factitasset, minusque tot fabellis lectis & relatis credidisset;* & vous tâchez de l'émouvoir par une priere vraiement édifiante: *Faxint Superi ut, novis hisce rationum momentis illuminatus, errorem ipse damnet.*

Je ne prie pas pour vous, Monsieur, parce que Dieu n'accorde les connoissances naturelles qu'à l'étude; mais, avec le zéle que vous protestez avoir pour la vérité, je vous prie d'examiner sans prévention les Ouvrages que vous blamez, & particulièrement le Mémoire de cet homme célèbre.

Le ſujet eſt trop grave, & trop intéreſſant. Vous convenez vous-même, que la petite vérole eſt un des fléaux les plus funeſtes qui affligent le genre humain; j'en appelle au tableau qu'en fait votre ſavante Diſſertation: *Quæ ore, & calamo, loquitur de peſtilenti afflatu, de atrabile, de nigris interſitis peticulis, de vermibus, de lethali putredine, corruptione, & veneno adeo penetrante, ut canibus ipſis adſtantibus non parcat.*

Vous ſavez, Monſieur, que, malgré ce tréſor de ſecrets, & de remedes admirables, que vous ouvrez généreuſement: 1. *Epiſpatica.* 2. *Sudorifera.* 3. *Vapores.* 4. *Fomentationes.* 5. *Hirudines.* 6. *Suffumigia.* 7. *Balnea.* 8. *Pannum.* 9. *Spongia.* 10. *Sectio.* 11. *Paregorica.* 12. *Opiata.* 13. *Suppoſitoria.* 14. *Cliſteres.* 15. *Potationes aquarum.* 16. *Veſicantia.* 17. *Ptyalismus.* 18. *Theriacalia.* 19. *Sanguinis miſſio.* 20. *Emetica.* 21. *Purgantia.* 22. *Peſſa in mulieribus.* 23. *Inciſio.* 24. *Camphorata.* 25. *Anthelmintica.* 26. *Viperina.* 27. *Pyrites.* 28. *Nitrata.* 29. *Spongia*: Vous ſavez, dis-je, que, malgré cette abondance effrayante de remedes, cette horrible maladie emporte une grande partie de l'eſpèce humaine, & laiſſe ſouvent un ſouvenir affligeant, & des infirmités, pour le reſte de la vie, à ceux qui en réchapent. Elle a enlevé à Berlin cette année les trois quarts & au delà des enfans qui l'ont eue.

De tous les remedes que le Médecine avoit employés jusqu'à préſent, aucun n'étoit parvenu à délivrer la maſſe du ſang de ce venin, qui paroit ne pouvoir en être ſéparé que par la ſuppuration, en déchirant les vaiſſeaux dans lesquels il eſt dépoſé, & la peau; ſoit que nous apportions ce poiſon avec nous au Monde, ou qu'il nous vienne de dehors. Cette idée, conforme à l'expérience conſtante, paroitroit établir une analogie entre la maladie & l'inoculation; & mes propres réflexions, les meilleurs Médecins, & les meilleurs Livres de Médecine que j'ai conſultés, ne m'ont rien appris de plus. Peut-être prétendez-vous en avoir appris davantage à notre Europe, & aux Barbares, dans la belle explication que vous en donnez dans votre ſavante

te Diſſertation: Que la petite vérole eſt une fermentation du Sang, qui avant l'éruption, eſt *acerbus, immaturus, non deſpumatus, quique habet in ſe aliquid vitioſum, lentum, crudum, acidum, auſterum.* Cela eſt peut-être fort clair & fort beau; mais permettez-moi de me borner aux ſeules lumières que fournit l'obſervation.

Vous ſavez, Monſieur, que ce n'eſt qu'au flambeau de l'expérience que l'Europe eſt redevable d'être ſortie de cette barbarie, dans laquelle le jargon épouvantable de l'Ecole l'a tenoit enſévelie; on l'a porté dans la Medecine, comme dans les autres Sciences: & heureuſement il répand la plus grande clarté ſur le ſujet dont il s'agit ici.

Tous les Médecins qui parlent avec connoiſſance de cauſe, conviennent, que l'inoculation de la petite vérole eſt une des découvertes les plus heureuſes de la Médecine, & que ſi les remèdes & les méthodes qu'on employe dans les autres maladies, avoient le même degré de certitude, la vie, & la ſanté ſi néceſſaire pour ſupporter les miſères de cette vie, ſeroient plus aſſurées qu'elles ne le ſont.

Ils conviennent unanimement que l'inoculation bien dirigée, & donnée à propos, prévient tous les incidens fâcheux, & la complication du pourpre, & d'autres maladies qui ſe joignent à la petite vérole naturelle; que ſelon toutes les apparences le venin, porté d'abord dans le ſang, dans les plus gros vaiſſeaux, & à la peau même, perd de ſon activité, n'attaque pas tout le ſyſtème de la machine, & trouve un écoulement facile par la ſuppuration des inciſions; que de l'Inoculation bien faite ſur mille, il n'en meurt pas un, ou pour parler juſte, que la petite vérole ceſſe d'être mortelle; qu'on ne la reprend jamais après avoir été inoculé; & que ceux qui ne doivent pas l'avoir naturellement, ne l'ont pas par inoculation.

Le Moraliſte, ou ſi vous voulez, le Théologien éclairé, ſurpris de ſe voir mêlé dans une queſtion de phyſique, qui n'eſt abſolument pas de ſon reſſort, mais d'accord avec le Philoſophe, & le Médecin, convient que c'eſt manquer à ce qu'on doit à Dieu, & aux hommes,

& commettre le crime le plus barbare, que de priver l'eſpece humaine d'un des plus grands bienfaits de la Providence.

Voici, Monſieur, ce que diſent les Médecins, & les Philoſophes les plus éclairés; n'étant pas Médecin moi-même, & fort éloigné de m'ériger en cette qualité, & de porter aucun jugement comme tel, je n'entre pas dans la diſcuſſion des profonds raiſonnemens, avec leſquels vous combattez *a priori* l'inoculation.

Pyrum non matureſcit,
Febris non ſurgit,
Mulier non parit,
Vinum non evadit,
Niſi ſtatuto maturationis tempore;
Lignum non eſt aridum ut hinc admota ſcintilla incendium ſuſcitetur.

Je ne puis fléchir non plus les genoux devant les autorités, & les déciſions que vous citez comme infaillibles. Je blâme beaucoup les fameux Profeſſeurs qui n'ont pas daigné vous répondre, par circonſpection, ou par politique, à ce que vous prétendez. Ce ſont de vrais impertinents, tout célèbres qu'ils puiſſent être. Mais je vous demande très humblement pardon, ſi je recuſe l'autorité de Mr. *Chriſtophorus Zanetti* même: *Quamvis vivat egregius iſte Vir, Patriæ veſtræ decus, & ornamentum, flexis genibus ad Summi Sanctiſſimi Pontificis Clementis XIII. feliciter regnantis latera, frequens alloquatur Cardinales Eminentiſſimos, Sacratiſſimos, veras Romanæ Eccleſiæ Columnas, & agat cum Epiſcopis, Præſulibus, Theologis Canonicis, Doctoribus; ideoque pro Oraculo accipienda ſit ejus ſententia:* je le recuſe, & je pourrois le citer contre vous à plus juſte titre, par les raiſons qu'il vous dit lui-même.

1) Per

1) *Per parlar là con tutta ſinecrita, le dico di non averla io maè praticata.*

2) *Poiche gli Theologi non l'amettano.*

3) *E dalla Univerſita della Francia ſi attende la deciſione.*

On n'impoſe pas à la Vérité par de vains noms; devant ſon Trône tous les hommes ſont égaux; s'ils différent ce n'eſt que par leurs talens, leurs lumieres, & l'uſage qu'ils en font. Apprennez de *Montaigne*, Monſieur, ſi vous en doutez: „Que ſur le Trône le plus „élevé on eſt aſſis comme ſur la chaiſe la plus ſimple.“

Je n'ay pas pu, Monſieur, pour vous ſuivre, me diſpenſer de dire un mot de la queſtion théologique; mais, n'étant pas Théologien non plus que vous, il ne nous convient pas de nous perdre dans la controverſe.

Rebelle à la Sorbonne, vous oubliez, ou vous faites ſemblant de ne pas ſavoir, que les Ordres Religieux les plus éclairés de votre Egliſe ont tranſporté l'inoculation avec le plus grand ſuccès en Amérique. Vous devriez recevoir le point théologique pour très décidé. De grace, Monſieur, faites attention aux ſuites. Voulez-vous commettre l'Egliſe avec l'Egliſe? Rome avec la liberté Gallicane? Cauſer des Schismes, ou réduire la choſe à la déciſion d'un Concile Oecuménique? Mais je me flatte que Mr. *Chriſtophorus Zanetti* vous apprendra bientôt; *che gli Théologi l'amettano.*

Si quelqu'un s'aviſoit de me demander, pourquoi d'une queſtion phyſique, dont la raiſon, l'obſervation, & l'expérience, doivent conſtater la vérité, ou la fauſſeté, nous faiſons un point de Théologie, je mourrois de honte; j'avouerois ſincérement que nous le faiſons parce que d'autres l'ont fait, que ce n'eſt qu'une façon de parler, un mot vuide de ſens; & je le prierois humblament de ne pas nous ranger parmi les Aſtrologues Perſans, ou d'autres Impoſteurs & Charlatans de l'Orient. Pour enchainer les peuples, tous les Ordres de l'Etat, le Des-

le Deſpote, & l'Eſclave, ſous le joug de l'ignorance & de la ſuperſtition, & leur ôter tous les moyens d'en rompre les chaines, ces Meſſieurs ſe ſont rendu maîtres de la politique, & de la Médecine. Le Roi de Perſe, ou ſon Eſclave, ſont malades; le Médecin ordonne le remede; l'Aſtrologue défend de le donner, le jour n'eſt pas heureux: le malade meurt; c'étoit l'ordre des Aſtres. L'Ennemi entre dans le païs; le Provinces pillées, ravagées, crient, demandent du ſecours; les troupes attendent l'ordre pour marcher; l'Aſtrologue annonce que le Mois eſt malheureux; le Divan répond gravement aux peuples déſolés: C'eſt l'ordre des Aſtres que vous ſoyez maſſacrés & pillés. Et comment douter de la ſainteté & de l'infaillibilité de la miſſion céleſte de l'Aſtrologue? L'événement incertain, dit le Perſan, cache les fautes du Politique; la terre couvre celles du Médecin; les Aſtres mêmes éclairent celles de l'Aſtrologue. Je proteſte pour vous, Monſieur, & pour moi, que nous ſommes fort éloignés d'auſſi ridicules impoſtures, que nous les avons en exécration. Graces au Ciel! la Tyrannie, & la Charlatanerie, ne jouiſſent pas de ſi beaux privileges en Europe qu'en Perſe; la raiſon & l'humanité oſent parler, & reclamer leurs droits. Suppoſons un moment, Monſieur, que l'inoculation ſoit bonne; car, ſi elle ne l'eſt pas, le Médecin ne doit pas attendre la déciſion du Théologien: ſeroit il moins indécent, ridicule, abſurde, & extravagant, de demander au Théologien; ſi Dieu permet de tailler de la pierre, de donner une poudre d'yeux d'écreviſſes, une purgation, un lavement, ou l'émétique, que de le conſulter ſur la pratique de l'inoculation? Vous avez en horreur comme des Hérétiques, l'Evêque de Worceſter, & Mr. *Chais*, Paſteur de l'Egliſe Françoiſe à la Haye, qui ont traité à fond le point théologique ou de Morale; mais j'oſe vous prédire qu'il eſt impoſſible, ſi vous parvenez même à aſſembler un Concile pour décider de l'inoculation, que ſa déciſion ne ſoit conforme à leur ſentiment; il eſt fondé ſur l'idée de l'Etre ſuprême ſouverainement bon, qui fait la baſe de toutes les Religions, ſur la ſaine raiſon, ſur le bien de l'humanité, & ne tient à aucun dogme particulier.

En

En attendant que vous ayez pris votre parti ſur le point théologique, je vous prie, Monſieur, une ſeconde fois, d'examiner le point phyſique, de lire les Ouvrages que vous avez condamnés ſans les lire, & particulierement le Mémoire de M. *de la Condamine*. Cet homme illuſtre mérite votre eſtime, & votre admiration, ſans aucun mêlange de pitié & de compaſſion.

Conſultez l'expérience vous-même; le titre de Praticien, ou de Médecin qui ne conſulte que l'expérience, dont vous vous décorez, vous y oblige. N'eſt-ce pas la choſe la plus ſurprenante, que, depuis un tems infini que vous vous déchainez contre cette peſte d'inoculation, il ne vous ſoit pas venu dans l'eſprit de faire une ſeule expérience, d'inoculer vous-même, ou de faire inoculer ſous vos yeux? Vous les fermez à la Vérité, qui n'a jamais brillé avec plus de ſplendocir, & d'une lumière plus vive & plus pure, que ſur le point que vous conteſtez. A' la voix de tant de peuples, & de tant d'hommes célèbres, vous criez comme un perdu: *Sunt hirundines quæ non faciunt ver;* & vous déclarez obſtinément de vouloir attendre, que les Académies de Padoue, de Florence, & de Bologne, aient donné leur approbation à l'inoculation, avant de vous rendre. Vous faut-il des exemples pour vaincre, oſerois-je le dire, un amour propre mal entendu, qui ſe révolte, & s'obſtine contre tout ce qui n'eſt pas conforme à ſes idées? Le célébre Chevalier *S'oane* fut d'abord contre l'inoculation; il en devint le promoteur le plus zélé. Le retour à la raiſon caractériſe l'homme de génie, & pronve la ſupériorité de ſes lumières & de ſes connoiſſances. L'exemple outre cela du Chevalier *Sloane* vant l'autorité de bien des Univerſités.

Permettez-moi maintenant, Monſieur, de vous répondre en qualité de Pruſſien; le témoignage du Roi, rendu après un examen ſcrupuleux, que vous citez, ſeroit ſans doute d'un grand poids; mais faites-moi la grace de me dire, par quelle voie vous avez appris, que ce Roi ſi éclairé a défendu l'inoculation de la petite vérole à ſes ſujets. Je puis vous aſſurer, que ſi les affaires importantes qui l'occupent, une

guerre à ſoutenir contre toute l'Europe, avoient permis de porter cette découverte ſi utile au Thrône, il auroit déjà paru une Loi qui auroit obligé les Pruſſiens de faire inoculer les enfans à l'age convenable. Je regarde cette Loi, & je me flatte de n'être pas le ſeul de ma Nation, comme une des plus ſalutaires, & néceſſaires pour vaincre & ſurmonter la pareſſe naturelle de l'homme, & l'incertitude du grand nombre, qui, manquant de lumières, s'imagine, que c'eſt ſe rendre reſponſable de la vie d'un enfant, & tenter la Providence, que de lui donner une maladie, qu'on doit attendre qu'elle vienne naturellement, & qu'on peut ne pas avoir. Cette Loi ſauveroit la vie à des millions d'hommes, qui ſeront ſacrifiés avant que l'exemple, & l'habitude, qui conduiſent la multitude, ayent gagné, & fait taire les préjugés, qui malheureuſement tiennent l'homme attaché au joug de l'erreur & de l'ignorance. L'Inoculation n'eſt plus un probleme à réſoudre; c'eſt une Loi ſalutaire que le Légiſlateur doit impoſer au Citoyen qui n'eſt pas aſſez inſtruit & éclairé, pour ſuivre la raiſon, & pour pratiquer le bien.

Je ne vous ai pas parlé de ma propre expérience, quand je vous ai cité celle de pluſieurs ſiècles, & des Nations entières; elle n'ajoûtoit rien à la force de la Vérité: la vuë d'une goutte d'eau ne prouveroit pas davantage l'exiſtence de l'Océan à celui qui l'auroit vû lui-même. Mais, quand vous citez la Pruſſe, il me paroit néceſſaire de vous déſabuſer ſur ce qu'on y penſe, & ſur ce qu'on y a déjà fait. J'ai cru que c'étoit un devoir indiſpenſable pour moi, de me mettre au deſſus des préjugés, comme père de famille, & d'eſſayer en même tems, ſi mon exemple pouvoit contribuer à éclairer ma patrie ſur un point ſi intéreſſant pour elle. Elle en a fait la plus triſte éxpérience; cette année, je l'ai déjà dit, la petite vérole a emporté les trois quarts des enfans que l'ont eue. J'avois contre moi une Reine éclairée, dont les ſentimens étoient pour moi des arrêts; ma famille, & des perſonnes d'ailleurs très reſpectables qui regardoient la choſe comme douteuſe. Vous ſavez, Monſieur, qu'il y a des ſituations dans la vie, où les gens les plus indifférents s'intéreſſent pour nous, & nous honorent de leurs

avis.

avis. On me citoit de prétendues expériences, *experimenta inoculationis;* ou plutôt, ces contes qu'on imagine & débite pour démentir les vraies expériences que j'alléguois. On me répréſentoit qu'en perdant mes enfans par la petite vérole naturelle, c'étoit la volonté de Dieu, à laquelle il faloit ſe réſigner; & on tâchoit de m'effrayer par les reproches dont on m'accableroit, & que j'aurois à me faire, ſi l'événement étoit contraire. La perſuaſion de la vérité l'emporta ſur toutes les autres conſidérations.

Mr. le Profeſſeur *Meckel*, dont les talens diſtingués, & la capacité, vous ſont connus, a fait l'inoculation à deux enfans que j'ai; l'aîné de 7 ans n'a eu que peu de fièvre pendant deux jours; dans le ſecond de 3 ans, on n'a pas remarqué de fièvre; ils ont eu tous les deux peu de boutons, avec une abondante ſuppuration des inciſions. Quoique je n'aye arraché au grand nombre d'abord que l'aveu d'avoir été heureux, l'exemple n'a pas été ſans effet ſur ceux qui, capables de penſer, aiment le vrai, & ſe plaiſent dans le bien.

Mr. le Profeſſeur *Meckel* a inoculé heureuſement depuis, quoique beaucoup moins qu'il ne ſeroit à ſouhaiter: les progrès de la vérité ſont lents; mais la route eſt frayée, & on propoſe d'ordonner l'inoculation dans les différentes Maiſons des Orphelins qui ſont à Berlin. Vous voyez, Monſieur, que vous êtes très mal informé de ce qui ſe paſſe ici: je ne doute pas que l'amour de la Vérité, l'état d'homme de Lettres dont vous faites profeſſion, ne vous porte à révoquer ce que vous dites ſur le ſujet du Roi; des expériences faites dans ſes Univerſités, par les plus habiles Medecins, ſur l'inoculation de la petite vérole; & des Loix expreſſes & pénales par leſquelles elle a été défendue. Vous y êtes obligé, comme Membre de notre Académie; il ne ſuffit pas que vous ſoyez déſabuſé. Il eſt de vôtre devoir de détromper ceux, qui, par cette raiſon, vous ſuppoſant bien inſtruit, ont été induits par vous, ou pourroient l'être, dans une erreur, ou affermis dans une prévention dangereuſe. Vous êtes obligé en même tems de déſabuſer les Nations éclairées de l'Europe, ſur un point qui fonderoit un

préjugé déſavantageux contre ma patrie. Je me flatte que vous dépoſerez cet hommage, que vous prêtez à la Vérité, dans la Bibliothéque Royale de Paris, dédié ingénieuſement à toutes les Puiſſances de l'Europe, orné magnifiquement de leurs Armes, & duëment brodé en or & en argent, pour ſervir d'antidote à cet Ouvrage très précieux, que vous prétendez y avoir dépoſé, & donné à nôtre Europe, il y a déjà ſix ans, contre l'inoculation, par rapport à la Médecine des Grecs, des Hongrois, & des Pruſſiens. Votre zèle vous y aura fait avancer, un peu trop legèrement ſans doute, quelques petites choſes; puiſque cela vous eſt arrivé dans vôtre derniere ſavante Diſſertation, après y avoir penſé pendant ſix ans. Pour ce qui regarde le fond de la queſtion même, le ſujet eſt trop important pour ne pas mériter toute votre attention. Vous devez une réparation formelle à la Vérité, & aux hommes illuſtres auxquels vous inſultez. Vous la devez à votre patrie. Elle voudroit pouvoir oublier le célebre *Galilée*, empriſonné & forcé de ſe rétracter. Les hommes ſe paſſionnent; on pourroit lui reprocher de s'oppoſer aux progrès de la Vérité, & de la vraye Philoſophie. Il importe peu que le vrai Syſtème de notre Monde Planetaire y ſoit proſcrit, & condamné; les Corps céleſtes n'en ſuivent pas moins les loix que la Nature leur a impoſées. Il s'agit ici d'une vérité à laquelle la Société, & une partie du genre humain, devront leur conſervation.

J'ai été tenté quelquefois de regarder votre ſavante Diſſertation, pleine de vues couvertes, que mes foibles lumières ne démêlent que confuſément, comme l'apologie la plus forte de l'inoculation, & comme la ſatyre la plus ingénieuſe, & la plus fine, contre les détracteurs de cette belle découverte; à moins qu'emporté par une noble ambition, vous ne ſuiviez l'exemple d'Eroſtrate, qui, frappé de la beauté du Temple d'Epheſe, le brûla, pour ſe faire un nom.

La politique la plus adroite, & la plus profonde, avec laquelle vous ménagez la Sorbonne, la France, l'Allemagne, l'Italie, & toutes les Puiſſances temporelles & ſpirituelles, pour leur faire recevoir la

Loi

Loi en vertu de la Robe Législatrice dont vous vous êtes décoré, y régne d'un bout à l'autre; pendant que vous ne paroiſſez citer le grand *Hecquet* que pour couvrir de ridicule les objections puériles, qu'on fait contre l'inoculation. Vous la lui faites anathématiſer, parce que

1) *Elle eſt contraire aux vuës du Créateur.* Eſt-ce par inſpiration que ce grand homme l'a appris? La raiſon, & l'expérience, prouvent que c'eſt un des plus grands bienfaits de la Providence.

2) *Elle ne préſerve pas de la petite vérole naturelle.* Le contraire eſt démontré par des milliers d'expériences.

3) *Elle ne reſſemble à rien en Medecine, mais bien plutôt à la Magie.* C'eſt le comble du ridicule: les Ventouſes, les Mouches Cantharides, reſſemblent-elles plus aux Lavemens, & aux Purgations, que l'Inoculation?

4) *Elle eſt contraire aux Loix.* C'eſt apparemment de la Loi Pruſſienne qu'il veut parler. Vous ſavez, Monſieur, que c'eſt un conte ridicule.

Vous me paroiſſez rire malicieuſement, comme Démocrite, du genre humain auquel vous donnez le change bien cruellement. Si cela eſt, en conſcience, Monſieur, vous auriez du ménager un peu plus la foibleſſe humaine, au lieu de la ménager ſi habilement pour établir votre réputation, non ſeulement dans toute notre Europe, mais encore chez les Barbares. Avec ce tour adroit & ingénieux que vous donnez à vôtre Lettre, vous auriez pu citer, à plus juſte titre, Machiavel, & Lucien, dont vous exercez les talens avec tant de ſuccès, que cette kirielle de vos Confreres, Docteurs en Médecine, depuis Galien jusqu'à Mr. *Hecquet*, que vous ne citez que par pure complaiſance, ou par malice, parce qu'ils n'ont jamais ſçu un mot de l'inoculation; mais, connoiſſant le cœur humain, vous aimiez apparemment mieux cacher & couvrir de la plus rare modeſtie des talens trop ſupérieurs, & trop étrangers à votre Art, qui, au lieu de perſuader

ſuader, n'auroient fait que révolter la Faculté, & les Barbares que vous voulez policer. Emu, peut-être, & touché de la fureur avec laquelle les peuples de l'Europe s'acharnent à s'entr'égorger ſi cruellement; votre compaſſion éclairée, ſupérieure à nos foibles vuës, qui ſe bornent à la conſervation de l'eſpece humaine pour ce bas monde, voudroit-elle traiter les hommes, comme Junon traita Cléobis & Biton, dont elle récompenſa la piété, & la tendreſſe envers leur Mère, par une mort ſubite, & tranquille, pour les dérober aux afflictions de la vie humaine? Regardez-vous ceux que la petite vérole enleve comme autant de ſauvés?

Helas! vous n'avez peut-être pas tort: mais, avec ces talens ſublimes pour la Politique, avec ce crédit immenſe que vous avez dans toutes les Cours de l'Europe, ſoyez le médiateur, le pacificateur de ces haines cruelles; & permettez l'inoculation. Tous les âges vous béniront, & vous regarderont comme leur bienfaiteur. Mais j'ai tort de vouloir oſer ſuivre une imagination féconde, ardente, & forte comme la vôtre. Quel que ſoit votre but, & le vrai ſens de votre belle Diſſertation, la franchiſe de ma Nation, ennemie de toute fineſſe, m'a ramené à la lettre, & à prendre ſérieuſement, ce qui n'eſt peut-être qu'une pure plaiſanterie.

Je ne vous parle pas de nos Médecins, parce que je ne veux pas appéſantir ſur vous le poids de l'autorité, & de l'évidence. Vous vous débattez, comme le pauvre Encelade, accablé de la colère de Jupiter, ſous la maſſe énorme du Mont Etna. La Pruſſe a toujours eu, & a actuellement, des Médecins du premier ordre. Les noms de *Stahl*, de *Gundelsheim*, de *Hoffmann*, de *Lieberkhün*, gravés à côté de celui d'*Hippocrate* dans le Temple de Mémoire, ſont connus & eſtimés dans toute l'Europe. Cependant il vous plait de les renvoier aux Hongrois, Turcs, & Barbares. Vous conviendrez, Monſieur, que les *Eller*, les *Cothenius*, les *Meckel*, & d'autres Médecins d'un mérite diſtingué, qui ont ſuccédé à ces hommes célebres, n'ont pas tort d'en être un peu formaliſés; & vous leur devez une petite explication.

Pour

Pour moi, je crois que c'eſt de la Proſe toute pure, comme celle du *Gentilhomme Bourgeois*, qui la parloit ſans le ſavoir; une façon de parler, comme l'épithete de Barbares, que vous donnez au reſte du genre humain au delà des Mers, & des Alpes, qui environnent ce païs, qu'habitoit, il y a vint ſiècles, un peuple vertueux, qui ſoumettoit & éclairoit le Monde par ſes Scipions, ſes Catons, ſes Céſars, ſes Cicerons, ſes Virgiles, & ſes Marcs Aureles. Mais cela ne regarde, ni moi, ni mon ſujet; je me contente d'inférer ici une particularité de M. le Conſeiller Privé *Eller*, qu'il m'a appriſe, quand j'ai fait la lecture de cette Lettre à l'Académie. Je ſavois qu'il étoit porté pour l'inoculation; & j'aurois pû vous le citer avec le Chevalier *Sloane:* le même zèle pour le bien, les mêmes talens, & la même étendue de connoiſſances, le caractériſent. Il eſt *Archiater*, mot que vous paroiſſez avoir en grande vénération; & il a vû & traité autant de Rois, Reines, Princes & Princeſſes, que Mr. *Chriſtophorus Zanetti* de Papes, Cardinaux, Evêques & Théologiens. Ayant rencontré en 1719. à Paris un jeune Médecin, Grec de Nation, nommé *Carazza*, avec lequel il avoit fait connoiſſance à l'Univerſité de Leyde, qui lui parla de l'inoculation de la petite vérole, pratiquée à Conſtantinople par une femme Theſſalienne, il ne réſiſta pas à la curioſité d'en faire l'expérience ſur un pauvre enfant qu'il paya: & elle réuſſit fort bien. L'année 1721. il inocula à Bernburg, pour ſatisfaire la curioſité du Prince, la fille de M. de Beck, Maréchal de la Cour, âgée de ſept ans, & un garçon de cinq ans, fils du Sommelier de la Cour, avec le même ſuccès. Il fut appellé peu après à Berlin; & la cabale étant parvenuë à faire tomber dans une eſpece d'oubli cette belle découverte, par des menſonges, & des mauvais ſuccès inventés, il y renonça: mais il n'a pas ceſſé d'en être toujours le promoteur le plus zélé. Mr. *Ludolff*, Médecin des Armées du Roi, de beaucoup de réputation, animé par lui, a fait, peu avant la guerre, des expériences ſur l'inoculation dans le grand Hôpital de Berlin, qui ont eu beaucoup de ſuccès. Croyez-vous, Monſieur, qu'il y a eu des gens aſſez imbécilles ou méchans pour ſoutenir, que ces enfans inoculés n'avoient que la gale, parce qu'ils n'avoient pas été cou-

couverts de bontons depuis les pieds jusqu'à la tête? Le beau Recueil que celui des objections ridicules, des abſurdités, des menſonges, & des impoſtures, que l'attachement à l'erreur & aux préjugés, la vanité & la jalouſie, ont oppoſés à la découverte la plus belle, la plus utile au genre humain! Quel jugement la poſtérité portera-t-elle ſur le caractère & les lumiéres de notre Siècle!

Je ſuis perſuadé de votre candeur, de vos bonnes intentions, & de votre zèle pour le bien. Ce ſont ces mêmes ſentimens, l'amour de la Vérité, l'envie de la faire connoitre, d'être utile à ma patrie, & aux hommes, qui m'ont déterminé à vous répondre; & je me flatte que vous recevrez ma réponſe, comme une marque de la conſidération, & de l'eſtime avec laquelle j'ai l'honneur d'être, &c.

REMARQUES ABRÉGÉES SUR QUELQUES TRACES DE CONFORMITE' ENTRE LES CORPS DU RÉGNE VÉGÉTAL ET CEUX DU RÉGNE ANIMAL.

PAR M. GLÉDITSCH.

Traduit de l'Allemand.

Tous les corps du régne végétal ſont naturellement aſſujettis à une loi invariable, ſuivant laquelle, dans un tems déterminé, & lorsqu'ils ont atteint une certaine maturité, ils portent d'abord des fleurs, & enſuite des ſemences fécondes, par leſquelles ils conſervent & propagent leurs eſpeces naturelles ſans interruption. Que les choſes ſe paſſent effectivement ainſi, & même que le but principal de leur deſtination le demande, c'eſt ce que la Raiſon & l'Expérience dépoſent de concert. Suivant cela, il ne doit exiſter aucune production végétale qui ne ſoit pas ſoumiſe à cet ordre; quoique, dans les ſiecles précédens, divers Phyſiciens ayent conçu les choſes d'une maniere toute oppoſée, mais ſans la moindre ombre de fondement.

Toute plante eſt pourvue d'un oeil, ou bouton à fruit, c'eſt à dire, d'une partie dans laquelle ſont actuellement contenus les linéamens, mais d'une délicateſſe imperceptible, de toutes les parties qui conſtituent les fleurs & les fruits; & cet oeil, ou bouton, ſuivant la différence de l'eſpece, ſe trouve, tantôt dans un oignon, ou cayeu, tantôt dans un rejetton, quelquefois dans la tige, quelquefois ſur les branches, ou presque dans toute autre partie de la Plante. Mais il ne ſe manifeſte jamais qu'après la formation de cette partie principale de

la plante où il ſe trouve; c'eſt proprément par ſa production & par ſon dévelopement que ſe termine alors l'accroiſſement ſucceſſif de la plante, laquelle ſans cela auroit naturellement continué à croître annuellement, jusqu'au tems où elle auroit enfin pouſſé des fleurs, & porté des ſemences.

Quand l'accroiſſement de cette derniere & unique partie des plantes vient à ceſſer, ou les ſemences exiſtent déjà, ou, ce qui revient au même, il s'eſt formé dans d'autres lieux & dans d'autres parties de nouveaux yeux. Ici comme on le ſçait, les animaux s'écartent des végétaux, puisque, à très peu d'exceptions près, ils ſuivent la route conſtante de la multiplication & de la propagation par les oeufs.

Le fruit en attendant eſt toujours une ſuite de la fleur, celle-ci n'exiſtant que pour la génération & la fructification de celui-là; de façon que chaque plante propage & conſerve ſon eſpece, ſuivant l'ordre de la Nature, au moyen de ſes parties eſſentielles, c'eſt à dire, des ſemences rendues fécondes. En conſéquence de cet arrangement preſcrit par la Nature, toutes les plantes peuvent & doivent propager leurs eſpeces inconteſtablement & invariablement, jusqu'à ce que ce le moyen de le faire vienne à ceſſer entierement en elles. Dans un très grand nombre de plantes la propagation naturelle ſe fait comme dans les animaux, ſimplement & uniquement par leurs ſemences, ou oeufs, ſans qu'aucune autre voye ſe joigne à celle-là. Mais il y a auſſi quantité de plantes, qui ont le pouvoir de ſe multiplier de plus d'une maniere, outre les ſemences, & avec un ſuccès égal par des voyes différentes. Cette diverſité par laquelle les plantes ont quelquefois des moyens plus ou moins nombreux de multiplication, n'empêche pas qu'il n'en reſte beaucoup plus d'eſpeces à qui la Nature n'a accordé qu'un ſeul moyen, ſavoir celui des ſemences, à moins que quelque cas tout à fait extraordinaire ne donne lieu à une variation.

Une choſe qui eſt auſſi ſuffiſamment connue, c'eſt que pluſieurs plantes, qui ſans cela tirent leur origine des ſemences, multiplient auſſi leurs eſpeces avec un égal ſuccès par les racines, les cayeux, les oignons,

oignons, les tiges, les branches, les rejettons, ſoit du tronc, ſoit de la racine, les feuïlles même & l'écorce. Mais toutes ces multiplications dérivent du même principe, & par là même ne différent point de celle qui vient des ſemences, à quelque partie de la plante que l'opération ſoit d'ailleurs attachée. Car, pour qu'une ſemblable partie devienne un principe de multiplication, il faut, ou qu'un oeil parfait s'y ſoit déjà trouvé contenu, ou qu'il y ait dans ſa moëlle dequoi effectuer la génération & l'entiere formation qui doit s'enſuivre d'une jeune plante qui y eſt cachée. Quand même on rencontreroit à cet égard quelques exceptions, réelles ou apparentes, elles ne ſauroient être d'une grande importance; & ſi elles ont lieu dans des eſpeces, ou claſſes particulieres, dont la conſtitution naturelle n'a pas été ſuffiſamment obſervée, on n'eſt pas en droit d'en tirer aucune conſéquence certaine.

Ainſi, cette différence entre les Plantes, qui reſtraint les unes à une ſeule voye de multiplication, & en accorde à d'autres de plus nombreuſes, & qui à nos yeux pourroient avoir un air de ſuperfluité, eſt tellement réglée qu'il n'y a pas une ſeule de toutes ces eſpeces de multiplication, dans quelque quantité plus ou moins grande qu'elles ſe trouvent réunies, qui faſſe diſparoitre la propagation primordiale & générale des plantes par les ſemenees, qui demeure toujours la plus certaine & la plus conſtante.

Cependant, la ſorte de propagation qu'on obſerve, tantôt dans une plante individuelle, tantôt dans une eſpece entiere, peut bien être regardée comme la plus certaine dans un cas donné, & la plus avantageuſe rélativement à nos vuës; mais alors, le principe d'où l'on part tient toujours à des choſes purement contingentes & à des circonſtances particulieres, qui ſont hors de la plante même. Mais, tant qu'il ne s'agit que d'arriver au but principal, toutes les eſpeces de propagation ſont à peu près équivalentes.

Dans quelque plantes qui ſe propagent par la multitude de leurs rameaux, ou des rejettons, qui en ſortent en ſi grande abondance qu'ils ſemblent les affoiblir, cela peut les conduire à un état qui eſt

tout à fait contraire à la Nature. Il en eſt de même de celles qui produiſent, outre leurs fleurs & leurs fruits, de petits oignons, ou même de jeunes plantes. Il arrive ainſi aiſément que les fleurs ne ſe développent pas toujours d'une maniere convenable, & n'engendrent pas des ſemences parfaites & fécondes. Dans d'autres tems, c'eſt préciſément le contraire qu'on obſerve dans toutes ces mêmes plantes.

Mais, quiconque eſt bien accoutumé & exercé à examiner attentivement de ſemblables cas, & à en juger ſainement, apperçoit bientôt où réſide la cauſe de ces variations accidentelles. En effet, parmi les plantes, il s'en trouve dont l'efflorescence arrive trop tôt, ou trop tard, ou même deux fois dans une année; & à cela ſe joignent encore diverſes irrégularités, lesquelles dépendent des ſaiſons, de la nourriture que les plantes reçoivent, & de leur ſituation. Mais de pareilles circonſtances varient très fréquemment par rapport à la même eſpece de plante, diſparoiſſant & reparoiſſant alternativement, ſans compter toutes les modifications que l'art peut encore y apporter. En ſuppoſant donc que certaines circonſtances non-naturelles, mais d'ailleurs accoûtumées, & qui auroient produit des variations & des altérations, ne ſe rencontrent pas, l'état naturel ſe manifeſte, pour ainſi dire, de lui-même, à moins qu'un deſordre total dans la ſtructure de la plante n'y mette quelque obſtacle invincible.

Quand donc, par les raiſons qui viennent d'être alléguées, les plantes ne portent, ni fleurs, ni ſemences fécondes, le pouvoir naturel qu'elles ont d'en produire, ne laiſſe pas de ſubſiſter, d'être toujours le même en elles, & de tendre à l'accompliſſement du but capital, ſavoir la propagation & la conſervation de l'eſpece, quoique l'effet demeure ſuſpendu pendant un certain eſpace de tems.

Ainſi, dans de pareilles circonſtances, la moëlle ne pouvant produire aucunes nouvelles plantes inviſibles dans les parties deſtinées à la fructification, il s'en forme à bon compte dans les autres parties de la plante, comme dans la racine, les cayeux, les oignons, les tiges, les yeux, les rejettons, les feuïlles; & ainſi du reſte. Mais, dès que les obſta-

obſtacles viennent à être levés, il faut que les fleurs & les ſemences naiſſent & ſe forment dans le même ordre qu'auparavant.

Dans les eſpeces de plantes dont j'ai parlé précédemment, qui ont la faculté de ſe reproduire en pluſieurs manieres différentes à la fois, il arrive ſouvent que l'une de ces manieres réuſſit auſſi bien que l'autre; tandis qu'au contraire, dans d'autres plantes, la multiplication ne peut avoir lieu que par les ſemences. L'art exécute ici à la vérité bien des choſes particulieres; & les ſimples ſoins aſſidus de la culture peuvent auſſi conduire à des effets inattendus: mais, le plus ſouvent, l'une & l'autre de ces deux voyes demeure inefficace; comme le témoignent ſuffiſamment les plantes nombreuſes auxquelles on donne le nom d'annuelles. Dans ces dernieres, l'art parvient quelquefois à de petites variétés qui s'écartent de l'ordre naturel, ſurtout quand on fait agir l'art avant qu'une ſemblable plante ait atteint ſon entier dévelopement; mais, quand elle en eſt déjà à l'efflorescence, ou plus loin encore, jusqu'à la maturité des ſemences, ou que la ſaiſon accoûtumée de l'année eſt déjà écoulée, il eſt bien rare qu'on vienne à bout de rien, & toutes les peines demeurent pour l'ordinaire inutiles.

Les plantes annuelles, rélativement à la durée courte, mais naturelle, de leur vie, paroiſſent avoir de la conformité avec les inſectes qui, dans le cours de leur vie, c'eſt à dire, depuis qu'ils ſortent des oeufs jusqu'à ce qu'ils périſſent, n'engendrent & ne ſe multiplient qu'une ſeule fois; en ſorte qu'après avoir dépoſé leurs oeufs, ils ſont abattus, deviennent malades, & meurent bientôt après. Les circonſtances ſont tout à fait les mêmes par rapport aux plantes véritablement annuelles, de la vie, de l'accroiſſement, & de la durée desquelles il faut juger d'après leur climat, où, lorsque ces plantes ont acquis leur dévelopement complet, & la fructification qui le ſuit, elles ne conſervent plus le pouvoir de ſe multiplier, & meurent.

Les diverſes eſpeces de multiplication dans les plantes ont occaſionné des diſputes dans les ſiecles précédens, & ont conduit les Savans à de fauſſes conſéquences. Pluſieurs d'entr'eux ont confondu toutes

ces eſpeces avec la propagation générale par les ſemences, & en ont conclu, que les ſemences devoient indiſpenſablement exiſter dans les plantes où ces autres ſortes de multiplication avoient lieu: d'où ils ont inféré qu'il n'y avoit point dans les plantes de parties eſſentiellement deſtinées à la propagation: aſſertion qu'il me paroit ſuperflu de réfuter.

Mais, afin de pouſſer plus loin mes réflexions, je rappelle ce que j'ai déjà dit au commencement de ce Mémoire; c'eſt que toutes les plantes, avant qu'elles puiſſent arriver au terme de leur fructification, doivent avoir leurs autres parties principales, ou du moins quelques unes d'entr'elles, convenablement formées; ſans quoi l'accroiſſement va toujours ſon train, jusqu'à ce qu'à la fin la moëlle ait acquis une perfection ſuffiſante pour produire un véritable oeil, ou bouton à fruit. De cette maniere, l'accroiſſement néceſſaire de cette derniere partie prend fin dans les plantes; la moëlle perce l'écorce, & engendre les diverſes ſortes de réſervoirs, qui contiennent principalement les parties qui ſont eſſentielles à la fructification dans le régne végétal.

Pluſieurs plantes, de celles qui ont une tige durable, (*caulis perennis*,) ſe multiplient annuellement par l'efficace de leur moëlle, pleine de force & de vie, en pouſſant à une ou à deux repriſes de jeunes branches, qui ne ſont autre choſe que tout autant de plantes nouvelles & particulieres, lesquelles ſortent & pouſſent jusqu'à ce point avant les fleurs & la ſemence. Mais, comme elles ſont fortement attachées à leur plante principale, ou mere, & qu'elles en reçoivent immédiatement une nourriture conſtante, elles n'ont pas beſoin d'un autre réſervoir de nourriture plus déliée, telle qu'il s'en trouve dans ce qu'on nomme *cotyledones*, ou *placentae*, dont les plantes où la propagation ne ſe fait que par les ſemences ſont pourvues, & ont un beſoin indiſpenſable.

Dans les mêmes plantes, ſe forment les parties de la fructification au dedans des ſemences comme les plus eſſentielles, au moyen d'une prolongation de la moëlle dont la délicateſſe eſt incompréhenſible. Ce ſont autant de jeunes plantes, qui, lorsqu'elles ont atteint leur perfection,

tion, ſe ſéparent de la mere, & n'en reçoivent plus aucune nourriture. Les ſemences contiennent donc les plantes tout entieres, formées d'une maniere inviſible, & qui ſont déjà vivifiées par leur participation néceſſaire à la moëlle de leur plante-mere: pour leur premier accroiſſement elles n'ont beſoin que d'une nourriture tout à fait déliée, qui leur eſt amenée par ces cotyledons particuliers que nous venons d'indiquer, jusqu'à ce qu'elles puiſſent ſucer & pomper de l'air & de la terre des ſucs humides plus groſſiers.

Après cela, les plantes n'acquierent pas en une ſeule fois le pouvoir de propager leurs eſpeces par des ſemences fécondées; mais il leur faut pour cet effet un certain eſpace de tems, pendant lequel ſe fait toujours leur dévelopement d'une maniere conforme à un ordre bien réglé. On obſerve ce dévelopement dans les plantes, quelquefois plutôt & plus rapidement exécuté, quelquefois plus tard, & même après bien des années; de façon qu'elles ſont à cet égard fort différentes les unes des autres: ſans parler de quantité de variations & d'exceptions qui ſont cauſées par le changement de païs & de terroir, de nourriture, de ſituation, de température, & par d'autres circonſtances ſemblables.

Aux mêmes égards, on rencontre dans les animaux des diverſités caractériſtiques, qui offrent les traces les plus marquées de reſſemblance avec celles qui viennent d'être expoſées; & il n'y a perſonne qui puiſſe conſerver le moindre doute à cet égard, dès qu'il n'eſt pas entierement dénué d'expérience.

On n'inſiſtera pas ſur les preuves détaillées de ce que nous avons avancé au ſujet des plantes, pour peu qu'on ſoit au fait des eſpeces ſuivantes, & qu'on ait eu occaſion de comparer les variations qu'elles éprouvent dans les diverſes parties du Monde, ou même dans de petites contrées. Ces eſpeces ſont, le Chou ordinaire avec toutes ſes variétés, le Tabac, le Cotonnier, le Ricinus, le Chêne, les diverſes ſortes de Palmier, & pluſieurs autres. Il eſt connu que toutes ces plantes, & celles qui leur reſſemblent, varient beaucoup quant à la durée;

durée; & de là s'enſuit qu'elles ont beſoin de parvenir à un âge différent, avant que d'atteindre la perfection qui les met en état d'engendrer des ſemences fecondes.

Il m'eſt arrivé quelquefois de remarquer que des plantes qui ſe diſpoſoient pour la premiere fois à la fructification, & qui, à en juger par les apparences, étoient garnies de fleurs hermaphrodites, nombreuſes & parfaites, n'avoient cependant pas encore atteint la perfection par rapport à la ſtructure des parties fructifiantes, en ſorte qu'on ne pouvoit en attendre des ſemences fécondes. En effet, elles ne portoient point de fruit la premiere année, & n'en avoient que fort peu la ſuivante.

Dans d'autres plantes que les Botaniſtes Sexualiſtes nomment plantes monoïques & polygames, & qui produiſent toujours les parties eſſentielles à la fructification en deux fleurs ſéparées l'une de l'autre, lesquelles ne laiſſent pas de coëxiſter ſur une ſeule & même plante; j'ai obſervé quelquefois, parmi les jeunes tiges qui pouſſent autour de ces plantes, ou des arbres, que dans les commencemens elles ne produiſoient que des fleurs d'un ſeul ſexe, ſoit mâles, ſoit femelles, quoique les deux ſexes euſſent dû s'y trouver à la fois. Mais, les années ſuivantes, on y trouvoit les fleurs du ſexe qui avoit d'abord manqué, d'abord à la vérité en petit nombre, mais à la fin, avec l'âge, la plante étoit également & abondamment pourvue de l'une & de l'autre ſorte de fleurs.

A préſent, quand les plantes ont fait tout ce qui étoit néceſſaire pour parvenir à leur but eſſentiel, en portant des yeux, ou boutons à fruit, & en fourniſſant des ſemences fécondes, chaque oeil, ou chaque ſemence, ne peut remplir qu'une ſeule & unique fois la fonction à laquelle il eſt deſtiné. En effet chaque oeil, ou chaque ſemence, ouvre en quelque ſorte ſon ſein pour en laiſſer ſortir la nouvelle plante, qui y avoit été formée d'une maniere tout à fait inviſible, & que la moëlle de la plante précédente avoit vivifiée: & tout de même les jeunes animaux ſortent des oeufs fécondés, & le font en diverſes ma-

manieres, plus ou moins nombreuſes, mais analogues à celles dont nous venons de parler. Il n'importe après cela que la plante ou l'animal ainſi produits ſoyent de longue ou de courte durée, que leur deſtination ſe borne à une ſeule année, pendant laquelle doivent ſe paſſer la fécondation & la fructification, après quoi ils meurent; ou bien, que, parvenant à un âge fort avancé, les opérations ſusdites n'arrivent qu'au bout de pluſieurs années, & s'exécutent par conſéquent en pluſieurs manieres différentes.

Parmi les animaux, il y en a pluſieurs qui parviennent avec l'âge, (ſans parler des inſectes qui ſubiſſent pour cet effet leurs métamorphoſes accoûtumées,) les uns plutôt, les autres plus tard, à cette perfection & faculté qui eſt requiſe pour propager leur eſpece. On remarque la même choſe dans les productions du regne végétal. L'expérience fait voir que la culture, tant naturelle qu'artificielle, peut, rélativement à certaines vues, effectuer dans pluſieurs de ces ſujets des variations, en accélérant ou en retardant le cours de la Nature. Dans nos contrées il y a des inſectes qui, ſuivant ce cours, ne vivent gueres au delà d'un jour, & qui, éprouvant dans ce court eſpace de tems les changemens & les métamorphoſes qui leur conviennent, exécutant toutes les opérations & les fonctions propres à leur eſpece. D'autres inſectes vivent 14. 20. ou 30. jours. Les plantes offrent les mêmes circonſtances dans la durée des diverſes eſpeces de champignons, de mouſſes, & d'algues.

Quantité d'eſpeces de petits animaux, ou d'inſectes, ont une vie de 2. 3. 4. 6. à 9 mois, ſavoir depuis Avril ou Juin jusqu'à Aouſt ou Octobre de la même année; quelques uns atteignent auſſi le mois de Juin de l'année ſuivante: mais à la fin ils périſſent tous, après l'accouplement, la ponte, les premiers ſoins de leurs petits, & pluſieurs autres fonctions acceſſoires, qui s'accordent avec les vues & l'ordre de la Nature pour l'entretien & le ſoutien de la grande & vaſte oeconomie de l'Univers. Toutes ces circonſtances ſe retrouvent dans les plantes conformément à la diverſité de leur durée.

Il a été remarqué ci-deſſus que les plantes qui ne ſe propagent d'ailleurs que d'une ſeule maniere, ne laiſſent pas de pouvoir être aſſujetties à quelques variations & exceptions, tant au moyen de la culture & de l'art que par divers cas accidentels. Cela eſt exactement vrai pourvu qu'on y joigne les reſtrictions néceſſaires; & il y a des moyens d'apporter quelques changemes au terme naturel de la propagation par les ſemences & par les oeufs, ſoit en l'avançant, ſoit en le retardant. Mais, ſi l'on ne fait attention qu'à l'état naturel des plantes conſidéré en lui-même, on doit reconnoitre qu'il ne ſauroit y être pleinement transformé ou détruit, non plus que dans les animaux, en ſorte que dans certaines occaſions on doit s'attendre à le voir toujours reparoître.

Tel étant l'état des choſes, la culture & l'art peuvent à la vérité faire que des plantes qui, lorsqu'on les abandonne à la ſeule Nature, ſont réellement & infailliblement annuelles, durent 2. 3. à 4 ans, ou que des plantes qui ont naturellement deux ans de vie, en atteignent 3. 4. à 5. On prolonge auſſi ſouvent, dans des vues particulieres, la durée d'une partie de ces plantes pour quelques ſemaines ou quelques mois, lorsqu'elles approchent du terme où elles doivent mourir, ou qu'elles l'ont effectivement atteint. Mais à la fin tous les efforts de la culture & de l'art demeurent infructueux, quand la moëlle a perdu ſa force naturelle d'accroiſſement, ou que la ſtructure intérieure de la plante rend impoſſible la prolongation de ſa vie.

Un des moyens les plus aſſurés d'allonger la vie des plantes ſusmentionnées, peut conſiſter à retarder leur dévelopement, de façon qu'elles n'atteignent qu'au dernier point poſſible le terme que la Nature leur a preſcrit, tant pour s'accroître que pour vivre. Ainſi on doit les empêcher de fleurir & de conduire des fruits à maturité, ou bien, (ce qui peut s'exécuter à l'égard de quelques plantes,) en retrancher les premieres fleurs & le plus grand nombre des ſuivantes, & même en détacher d autres parties. Par ce moyen, la moëlle, dans le tems où elle a le plus de vivacité, ſe trouve forcée de s'étendre de nouveau, & de percer l'écorce de tous côtés pour en faire ſortir de nouvaux jets.

Quand

Quand une ſemblable plante a été empêchée par ces moyens, ou par d'autres, de produire de nouvelles plantes par la voye des ſemences, tandis que la moëlle eſt aſſez active dans toutes les parties pour être bientôt miſe dans un mouvement univerſel, il ſe forme très aiſément dans d'autres parties de jeunes plantes, qui ſe dévelopent avec beaucoup de ſuccès; & comme elles ſucent & exhalent avec une grande force, elles ſe conſervent ſur la plante principale, & cela eſt cauſe que celle-ci peut demeurer en vie 2. 3. à 4 fois plus longtems qu'elle n'auroit fait & pu faire ſans cela.

Ce qui vient d'être rapporté, arrive quelquefois de ſoi-même, & même aſſez communément, dans les plantes dont la vie s'étend à deux ou trois ans. Mais, qu'on puiſſe venir à bout de produire les mêmes effets dans toutes les plantes par le moyen de l'art, c'eſt ce qui eſt démenti par l'expérience journaliere. Pluſieurs plantes annuelles & autres meurent beaucoup trop-tôt, avant que d'avoir porté des ſemences, pour qu'on puiſſe les ſoumettre à ces opérations artificielles, & les traiter d'une maniere auſſi arbitraire.

Cette méthode de prolonger la vie de certaines plantes annuelles en retardant un peu leur fructification, eſt appliquable aux inſectes, entre leſquels on peut choiſir pour exemple les ſauterelles, particulierement celles des arbres qui ſont groſſes & vertes, auſſi bien que celles auſſi d'une groſſe eſpece qu'on rencontre dans les champs & dans les prairies. On ſait que le mâle, parmi ces inſectes, meurt peu après avoir fécondé la femelle, & la femelle presqu' auſſitôt après avoir dépoſé ſes œufs, après quoi elle devient foible & malade; ſouvent même il lui arrive d'expirer pendant la ponte. Cela arrive dans nos contrées vers la fin de Septembre, ou pour les ſauterelles qui ſont plus tardives, au commencement d'Octobre. Mais ſi l'on prend de ces inſectes des deux ſexes d'abord en Septembre, comme on le fait chez nous, & qu'on les mette dans deux verres, ou boëtes, à part, de façon que le mâle ne puiſſe s'accoupler avec la femelle, & que par conſéquent la femelle ne puiſſe être fécondée; alors, conſervés dans un lieu tempéré,

ils vivent jusques vers Noël, c'eſt à dire, huit à neuf ſemaines plus que de coutume; & jusqu'à la fin on entend à diverſes repriſes le bruit que ces inſectes font ordinairement.

Quand, parmi nos plantes annuelles, il s'en trouve qui ſont mâles & femelles, comme cela a lieu dans la petite Oſeille annuelle; dans la Mercuriale; dans les épinars & le chanvre; la plante mâle périt toujours un certain eſpace de tems avant la femelle, ſavoir auſſitôt que la pouſſiere des fleurs eſt entierement paſſée. Au contraire, la plante femelle verdit encore longtems après que l'autre eſt toute deſſéchée, & vit jusqu'à ce que les ſemences ayent acquis leur entiere maturité.

Il y a une foule d'inſectes dont les mâles meurent avant l'hyver, au lieu que les femelles, qui portent les œufs fécondés par les mâles, ne les dépoſent qu'au printems de l'année ſuivante, & périſſent alors, après que leurs petits ſont éclos. Il arrive quelquefois de trouver au printems, ſurtout après que l'hyver a été court & doux, des inſectes, tant mâles que femelles, des eſpeces au ſujet desquelles l'expérience fournit des preuves ſuffiſantes, qu'elles meurent encore avant l'hyver. Les endroits où on les rencontre, la douceur de l'hyver, & la conjecture même qu'on eſt fondé à faire, que ce ſont des reſtes des inſectes tardifs de l'année précédente; qui, à cauſe de la ſaiſon où ils exiſtoient, n'ont pu s'accoupler, tout cela, dis-je, nous offre un cas extraordinaire, mais qui ne ſert qu'à confirmer d'autant mieux le ſentiment que nous avons expoſé ci-deſſus.

Mais, pour revenir aux plantes durables, dont il eſt connu qu'elles ont le pouvoir de ſe propager par pluſieurs voyes, outre celle des ſemences; remarquons, que ſuivant que leur accroiſſement eſt plus lent ou plus rapide, il leur faut un eſpace de tems proportionné, & quelquefois très long, avant que de porter des ſemences fécondes, ſavoir de 3. 4. 6. 8. 10. 20. 30. à 40 années, mais auſſi, dans ces derniers cas, elles parviennent jusqu'à la plus haute vieilleſſe. La culture & l'art peuvent produire des effets nombreux & variés ſur ces plantes, en retardant un certain eſpace de tems leur fructification; & en atten-

attendant le reſte de leur accroiſſement va ſon train, jusqu'à ce qu'à la fin elles portent des fleurs & des fruits. Mais, ſi l'on continue ces opérations jusqu'à ce que la moëlle qui ſert à former de nouvelles plantes ait perdu toute ſa vivacité, les jets annuels s'affoibliront de plus en plus, de façon que la plante deviendra tout à fait ſtérile, & qu'elle périra ſans avoir jamais eu, ni fleurs, ni fruits.

En nous occupant de l'examen des circonſtances ſusdites, & en paſſant pour cet effet pluſieurs eſpeces de plante en revue, nous avons fait une attention particuliere à deux eſpeces, qui, dans nos contrées & à cauſe de la ſituation où elles s'y trouvent, n'ont jamais produit, ni fleurs, ni ſemences. Tout au moins, ſi la choſe eſt arrivée, on a eu lieu de la mettre à bon droit au nombre des cas les plus rares.

La premiere de ces Plantes eſt la *Lavendula latifolia ſterilis Moriſoni*, que pluſieurs Auteurs qualifient, *Lavendula non florida*. Cette plante, que ſon âge & ſa foibleſſe font approcher de ſa fin, ſe trouve dans la belle collection du Jardin Botanique de l'Académie Royale à Berlin; & elle y eſt venue avec d'autres plantes rares de la Succeſſion d'Orange du Roi Guillaume III. Le défunt Jardinier *Michelmann* a fait pendant trente ans pluſieurs eſſais ſur cette plante pour qu'elle produiſit des fleurs, vu qu'elle a trois ou quatre pieds de haut, & que le tige eſt presque de la groſſeur du bras. J'ai auſſi pris des rejettons & des boutures de cette plante, que j'ai mis dans des terres mêlangées de toutes ſortes de manieres, dans de l'eau, ou dans de la mouſſe, me propoſant d'arriver au même but; mais il n'a jamais été poſſible d'obtenir ni fleurs, ni ſemences, de cette plante.

On pourroit lui aſſocier celle qu'on nomme *Syringa nana*, *nunquam florens*, & la *Mentha Sinica*, *rarius florens* de *Boerhaave*, dont le Jardinier Anglois *Miller* fait mention dans ſon grand Ouvrage ſur les Jardins.

La ſeconde plante, que j'ai cultivée pendant pluſieurs années avec beaucoup de ſoin, mais ſans aucun effet, rélativement à la pro-

duction des fleurs & des fruits, & afin de pouvoir en déduire une détermination certaine de ſon eſpece, c'eſt le petit buis, que divers Auteurs nomment *Buxus humilis;* plante tout à fait commune, fort baſſe, & ayant des feuilles rondes: quelques uns l'appellent auſſi le buis nain. Il ſeroit ſuperflu d'en donner ici une deſcription plus étendue, puisqu'on s'en ſert depuis une infinité d'années, dans les grands jardins & dans les petits, pour border les plattes bandes & faire les compartimens des parterres; uſage que l'on pouſſe même trop loin au détriment du terroir. Peut-être que les Jardiniers du commun ont cru que c'étoit l'unique ou la meilleure plante qu'on pût employer à ces uſages: cependant il en exiſte pluſieurs autres, & qui ſont plus convenables.

Les anciens Botaniſtes, de concert avec les Curieux en fait de Plantes & les Jardiniers, ont diſtingué le buis en grand & petit, ou haut & bas; mais ils ont toujours déclaré qu'ils n'y avoient trouvé, ni fleurs, ni fruits. Quelques uns néanmoins ont cru qu'il fleuriſſoit, mais très rarement; d'autres ont prétendu qu'il ne fleuriſſoit jamais: mais ils ſe ſont tous accordés à regarder le petit buis comme une eſpece naturellement différente du grand. Pour moi, après pluſieurs années d'expérience, je ſuis au contraire obligé de me ranger au ſentiment, ſuivant lequel le petit buis ne doit être regardé que comme une ſimple variété du grand. On aura pleinement raiſon ſi l'on croit que le petit buis eſt tel, en partie parce qu'il eſt encore jeune, en partie à cauſe qu'en le rognant fréquemment, on ne ceſſe de le retarder, & de le mettre tellement en arriere, que la plûpart du tems il dégénere & devient ſtérile.

Mais, après ce retardement & cette dégénération du buis, il ne laiſſe pas de pouvoir arriver, qu'une partie de ces obſtacles ſoyent levés, ou ceſſent d'eux-mêmes, de ſorte que la plante revient peu à peu à ſes propriétés naturelles, ſavoir tout auſſi longtems qu'il lui reſte une force d'accroiſſement ſuffiſante. Je puis produire à cet égard des preuves de fait, qui mettent la choſe au deſſus de toute contradiction;

ce

Digitized by Google

ce ſont de grandes branches de cette eſpece de buis, chargées de fleurs & de fruits, que j'ai l'honneur de mettre dans ce moment ſous les yeux de l'Académie.

J'ai trouvé ces branches en aſſez bon nombre dans un lieu particulier & dans une circonſtance particuliere. Mais, comme peut-être dans les tems précédens on y a fait fort peu d'attention, & qu'on n'a réellement pas cherché, ni par conſéquent trouvé, des fleurs dans le cas en queſtion, il a paru ſuffiſant pour établir une diſtinction formelle, entre le buis qui fleurit & celui qui ne fleurit pas. A' préſent qu'il ſe manifeſte des fleurs & des fruits, qui n'indiquent pas la moindre différence entre le grand & le petit buis, & que l'accroiſſement complet de celui-ci lui a donné plus de reſſemblance avec celui-là, on ne doit plus balancer à réduire ces deux plantes à une ſeule eſpece naturelle.

Voici le fait. Ces plantes en fleur que je préſente ici, je les ai trouvées dans le cours de la préſente année 1757, à Droſſen dans la nouvelle Marche, ſous un tas de buis non fleuri, dans un jardin qui étoit un peu demeuré en friche. Les pieces du parterre étoient bordées de ce buis, dont la figure extérieure avoit ſouffert, dans quelques endroits en tout, & ailleurs en partie, de fort grands changemens. Je me réjouis beaucoup d'un cas auſſi rare, auſſi imprévu, & des plus intéreſſans qui puiſſent s'offrir dans ce genre.

Il y avoit environ trente ans que le buis de ce jardin avoit été planté; & depuis 1733 jusqu'à 1757 il n'avoit été, ni taillé, ni replanté. Le jardin étoit couvert d'ombre, & dans un fond, près d'une eau courante, & entre pluſieurs ſources; le terroir étoit mol, gras, & marécageux. Le buis s'y étoit élevé à une hauteur de deux à quatre pieds, & avoit deux à trois pouces d'épaiſſeur. Son buis & ſon écorce étoient beaucoup plus ſpongieux que de coûtume.

En conſidérant les branches de ce buis ainſi accru, on pouvoit parfaitement bien remarquer, comment, à meſure que la plante avoit vieilli, les petites feuïlles avoient ſouffert des altérations ſucceſſives dans leur figure. Celles qui étoient tout en bas avoient conſervé leur rondeur & leur petiteſſe; & à meſure qu'elles alloient en s'élevant, elles

les devenoient plus grandes & plus pointues. A' la fin je trouvai des indices que ce buis avoit déjà fleuri & porté des fruits depuis pluſieurs années. Je fis transporter quelques unes des plus belles tiges dans le Jardin Botanique Royal de Berlin; mais elles y ont bientôt péri.

Le petit buis eſt donc une plante tout à fait remarquable, qui, tant qu'elle demeure jeune, n'a offert ici que des branches & des tiges avec leurs rejettons, qui ſervent à la propager en les ſéparant de la racine; de ſorte qu'en continuant à tailler régulierement ce buis tout les deux ou trois ans, & à le transplanter, il conſerve ſa ſtérilité, ſes feuilles rondes & courtes, & ſa petite ſtature. Quand tout cela dure un long eſpace de tems, ce buis dégénére à la fin, & devient tout à fait méconnoiſſable, jusqu'à ce que, par négligence, on par mépris, il arrive de le laiſſer pendant pluſieurs années jouïr d'un repos, & prendre une nourriture, qui le ramenent inſenſiblement à ſon état naturel.

La longue ſtérilité de l'eſpece de Lierre dite *Hedera corymboſa Lobelii* lui mérite une place ici. Elle reçoit cette dénomination, quand, devenue vieille & forte, elle porte des fleurs & des fruits. Mais, tant qu'elle eſt encore jeune & ſtérile, on l'appelle *Hedera helix, ſive ſterilis;* &, quelque différence extérieure qu'il y ait d'abord entre celle-ci & la précédente, le cours des années les conduit à la fin à une parfaite reſſemblance, comme nous venons de voir que cela arrive au petit buis. En attendant, le lierre & le buis peuvent être aſſociés enſemble, comme deux plantes qui ne fleuriſſent que dans un âge fort avancé & très rarement; ce qui nous conduit à cette concluſion, „ c'eſt que toutes les plantes, conformément à une loi qui leur eſt „ preſcrite, fleuriſſent & portent des ſemences fécondes dans un tems „ déterminé & à un certain âge; & qu'enſuite, au moyen de ces ſe„ mences, elles propagent & conſervent ſans interruption leurs eſpe„ ces naturelles.“ Il n'importe après cela qu'outre cette voye de multiplication diverſes plantes en ayent encore pluſieurs autres, par leſquelles elles tirent en quelque ſorte leur réproduction d'elles-mêmes, & qu'on rencontre en effet à chaque pas dans le régne végétal.

SUR

SUR LE

BITUME D'ALSACE,

PAR M. SPIELMANN.

Traduit de l'Allemand. (*)

Le Rhin qui tire ſa ſource des montagnes de la Suiſſe, coule de Bâle vers Coblenz dans une vallée d'environ ſoixante lieues de longuer; elle eſt bornée au midi par le mont Jura, à l'orient & à l'occident par deux chaines de montagnes: celle du côté oriental eſt la plus haute: elle avance, de même que celle du côté occidental, par différens contours dans cette vallée, ce qui la rend très inégale. En ſe rapprochant beaucoup vers Coblenz, ces montagnes ſemblent former une eſpèce de pointe.

Les deux chaines de montagnes ont des noms différens, ſuivant leurs diverſes ſituations; celle que l'on voit à l'occident eſt connue ſous les noms de *Vôges*, Waßgauiſch Geburg, & de *Hundsruck;* les Vôges en occupent la partie meridionale, & le Hundsruck la Septentrionale. Il en eſt de même de celle qui eſt à l'orient; ſa partie méridionale s'appelle *Forêt Noire*, & la ſeptentrionale *Odenwald.*

Il n'y a rien de plus beau, ni de plus inſtructif pour un Philoſophe qui eſt curieux de la formation de notre globe, que la vuë de ces montagnes. Etant placé ſur une colline à une petite diſtance du Rhin, & promenant ſes yeux à l'entour, il obſerve les effets charmants que produiſent ces montagnes par leur différentes gradations; les plus éloignées de l'obſervateur ſont les plus hautes, & les autres, en ſe rapprochant de lui, deviennent toujours plus baſſes, jusques à ce qu'elles aboutiſſent enfin à une plaine riante. Au delà du Rhin qui par-

(*) Ce Mémoire a été fourni à l'Académie déjà traduit.

partage cette plaine, on voit comment les prairies, montant peu à peu, forment d'abord d'agréables collines & de fertiles côteaux; enſuite des montagnes plus hautes, qui, s'élevant toujours davantage, vont enfin ſe perdre dans les nuës; ce qui repréſente un amphithéatre dont la vue eſt raviſſante.

Cette vallée produit toutes les choſes néceſſaires à la vie, de ſorte que ſes habitans pourroient ſe paſſer de productions étrangeres, s'ils étoient aſſés raiſonnables pour ſe borner aux commodités ſeules, & pour ne pas rechercher des choſes qui, non ſeulement ſont ſuperflues, mais même nuiſibles à leur ſanté.

L'Alſace occupe la partie la plus méridionale de cette vallée; elle renferme dans ſa petite étendue, non ſeulement les ſusdites production utiles & néceſſaires, mais l'on y trouve encore des choſes remarquables, qu'on chercheroit en vain dans des régions plus vaſtes.

Le Bitume qu'on y rencontre mérite particulierement l'attention des Naturaliſtes; il y en a dans la partie méridionale de cette Province, qu'on nomme le *Sundgau*, auprès du village de *Hirzbach*, à une lieue d'*Altkirch*. Il eſt très probable que la partie ſeptentrionale, au delà de *Haguenau*, en eſt toute imbibée; on le travaille depuis longtems à *Lampertsloch;* on en a découvert à *Drachenbronn;* il s'en trouve dans la *forêt de Sulz;* il y en a à *Philippsbourg;* j'en poſſede qui a été tiré du voiſinage de *Birmeſenz*. *Ruland*, dans ſon *Hydriatice*, fait mention du bitume qui ſe trouve dans les eaux de *Waldsbronn*, dans la *Comté de Bitſch;* j'enai vu qui ſurnage en forme de pellicule ſur un ruiſſeau auprès de *Sturzelbronn;* les analyſes des eaux de *Niederbronn*, & d'un puits dans le *Jægerthal*, m'ont fait voir qu'il ſe continue jusques à ces endroits.

Thurneiſen, dans ſon *Traité ſur les eaux minerales*, L. VI. Ch. 38. parle d'un ancien puits près de *Gersbach*, dans le *Leberthal*, d'où ſuinte du Bitume; il en donne une aſſés ample deſcription, dont un anonyme a envoyé une copie mutilée à la Société Royale de Londres: elle ſe trouve dans l'*Abridgement* de *Lowthorp*, Tome II. p. 460. Pluſieurs

ſieurs Auteurs comme *Baccius*, *Ettmuller*, *Valentini*, *Bohnare*, en parlant de ce bitume, ſe ſont contentés, ou de ſe copier les uns les autres, ou de décrire ſimplement ce qui s'en trouve dans les *Mémoires de la Société de Londres.* Il eſt vrai qu'on ne voit plus de bitume dans le *Ieberthal;* & il n'y a même perſonne qui puiſſe ſe ſouvenir d'en avoir ſeulement entendu parler: mais différens accidens, arrivés depuis près de deux ſiècles, ne peuvent-ils pas avoir tari une ſource, dont la mine ne ceſſe pas pour cela d'exiſter?

Quoiqu'on trouve du bitume dans différens endroits de la Province, on ne le travaille pourtant que dans les environs de *Sulz;* c'eſt auſſi celui-ci qui fera l'objet de cette Diſſertation.

Je crois qu'il eſt néceſſaire de donner une deſcription du terrain où il exiſte; j'en ſerai par là plus clair, & ceux qui aiment à regarder les choſes d'un oeil philoſophique, en ſeront aidés dans leurs ſpéculations.

Sulz eſt un bourg ſitué au pied des *Vôges*, entouré de hauteurs, qui en s'élevant forment les grandes montagnes, im Waßgauiſchen Vorgebürg. Il eſt eloigné de *Strasbourg* de neuf lieues; la *forêt d'Haguenau*, dans laquelle il y a quantité de pins, eſt à ſon midi à deux lieues de diſtance. Il y a cinq lieues entre ce bourg & le *Rhin;* & dans tout l'eſpace qui eſt entre ce fleuve & *Sulz*, il n'y a que des forêts, excepté quelques petites collines, qu'on voit près de ce bourg.

Les collines près de *Sulz* ont environ quarante toiſes de hauteur; leur terre eſt argilleuſe, & produit pour la plus grande partie du froment d'hyver & de l'épeautre, une moindre quantité d'avoine, d'orge, & du mays; mais on eſt obligé de la labourer bien profondément avant de l'enſemencer, & de la laiſſer une année en friche, ſi on en veut tirer de bons grains. On y cultive auſſi des vignes, qui donnent un très bon vin; il pourroit ſervir à confirmer l'opinion de *Glauber* qui prétend, *Pharmacop. ſpagyriq.* P. III. p. 208. que le goût exquis des meilleurs vins du Rhin leur vient du *petroleum* qui ſe trouve dans leur terroir.

Les autres collines qui ne ſont pas labourées, ſont couvertes de chênes & de hêtres. Autrefois elle portoient auſſi des pins, mais aujourdhui il n'y en a presque plus.

Les collines ſont ſéparées par des prairies de douze jusqu'à cent toiſes de largeur; & on remarque qu'elles ſont couvertes d'arbres jusqu'au bas de leurs pentes, comme ſi autrefois elles n'avoient formé qu'une ſeule montagne, & qu'elles euſſent été enſuite ſéparées par quelque accident; de ſorte que les arbres dont elles étoient couvertes, ſe ſont trouvés placés ſur leurs pentes, ſans avoir ſouffert aucun dérangement, pour y former une tapiſſerie naturelle. Or, comme on ne ſçauroit ſoupçonner que le terrain ait pû ſe détacher ſans que les arbres qu'il portoit en euſſent ſouffert, les mêmes collines confirment la théorie qui eſt aujourdhui communément reçue; ſavoir que les collines contigues aux grandes montagnes en ont été ſeparées par la deſcente des eaux, dont celles-ci ont été ci-devant couvertes, & que ces mêmes eaux ayant repoſé, par différentes cauſes, ſur les côteaux, ont auſſi fendu & ſéparé en pluſieurs parties ceux-ci. Les côtés extérieurs ayant été attenués par l'action de l'air, & engraiſſés par des plantes pourries & des charognes, qui y étoient portées par le vent & cent autres cauſes, ont été rendus propres à faire germer les ſemences des arbres & d'autres plantes que le hazard y amenoit.

Il y a une vallée étroite, qui continue depuis *Sulz* jusques au village de *Lobſanne*, dans la direction d'Ouëſt; elle a une lieue de longueur. Derriere *Lobſanne*, la vallée s'éleve, ſe rétrécit, & aboutit à une forêt qui s'approche des montagnes dans la direction de Nord-Oueſt; ſa partie la plus voiſine du bourg s'appelle *bois de la paroiſſe de Sulz*, Sulzer Kirchſpiel Wald. Dans ce bois il y a un moulin qui eſt mû par l'eau de ſept fontaines, qui ont leur ſource dans le voiſinage: le moulin en a tiré ſon nom, ſieben Bronnen Mühl. Le bois change de nom au delà du moulin, & s'appelle Dracher Bronnen Wald, du village auquel il aboutit. Les champs d'*Hæſchloch*, village ſitué à une lieue de *Sulz*, vers le midi, ſont parſemés de ſcories de fer.

fer. On a encore découvert près de là des traces de charbon de terre; on en a auſſi trouvé à *Bierlebach*, village diſtant d'une demi-lieue du moulin des ſept fontaines, vers le Nord.

On a depuis longtems découvert dans les prairies attenantes, au pied d'une colline ſituée à une lieue de *Sulz* vers l'Occident, entre les villages de *Merkwiler* & *Lampertsloch*, dans le baillage de *Wœrth*, des fontaines d'eau, ſur lesquelles nageoit du bitume, dont les payſans ſe ſervent à différens uſages; comme on peut le voir dans les extraits des Auteurs qui en ont parlé, lesquels je joins ici pour ne rien omettre de tout ce regarde l'hiſtoire de mon objet. Je paſſe l'uſage médicinal auquel on a employé le bitume de *Lampertsloch*; il ne différe pas de celui qu'on attend de tout bitume, lequel ſe trouve dans tous les Auteurs qui ont écrit ſur la matiere médicale.

Tabernæ-Montanus aſſure, dans la Préface de ſon Waſſerſchatz datée de 1584, qu'il y a à *Lampertsloch* un fontaine d'huile qui rend ſur la fin d'Avril, & dans le mois de Mai, une ſi grande quantité d'huile que les payſans la ramaſſent avec de grandes cruches, pour la brûler dans leurs lampes, & pour graiſſer les roues de leurs chariots.

Hertzog, dans ſa *Chronique d'Alſace*, imprimée en 1592, fait mention d'une fontaine qui eſt auprès de *Lampertsloch*, qui fournit au mois de Mai une matiere noire & onctueuſe, reſſemblante à la Thériaque, & dont l'odeur eſt forte comme celle du *petroleum*, avec laquelle les pauvres gens graiſſent les roues; à cela il ajoute qu'il y a, pas loin de là, une pierre noire, qu'on peut pêtrir comme de la cire, & qui a la même odeur que la fontaine ſusdite.

Roeslin, dans ſes Wasgauiſchen Gebürgs Gelegenheiten, imprimées en 1593, parle d'un bitume qui ſe trouve auprès de *Lampertsloch*, en forme d'une pierre, dont l'odeur eſt très forte, & qui s'amollit étant tenu quelque tems dans les mains. Il dit encore, qu'il y a au pied de cette montagne une ſource, ſur laquelle nage une graiſſe

onctueuſe, ſemblable à de l'huile, & que pendant l'été elle ſe raſſemble en plus grande quantité que pendant l'hyver.

Libavius, *dans ſes Singularia*, P. III. L. 1. Ch. 5. & 9. dit qu'on trouve du bitume en Alſace, comme auſſi des mines de *Chalcantum*, & des ſources bitumineuſes. L. II. Ch. 10. il parle du bitume de *Lampertsloch*, & ſoupçonne qu'on en pourroit faire du *Xeraſphaltum*, ou goudron.

Jean Volcck a donné, l'an 1625, un petit Traité ſur notre bitume, ſous le titre de Hanauiſchen Erdbalſams, *Petrolei* oder weiſſen Agſteins Beſchreibung. Il y dit, que le terrain où l'on trouve le *petroleum* eſt couvert de pyrites; qu'il fournit une eau médicinale qui a la couleur du petit lait; qu'il y a, à la diſtance d'une demi lieue, ſur la montagne, une mine de fer très riche: il ajoute qu'il a diſtillé de ce bitume une huile qui reſſemble à l'huile de Karabé: il marque de plus que les payſans s'en ſervoient pour graiſſer leurs chariots, pour garantir les vernis, les couleurs, les bois, & autres matieres, contre la pourriture & les vers. Il prétend, que ce bitume mêlé avec du goudron conſerve les cordes & les voiles des vaiſſeaux, & conſeille d'enduire la partie qui eſt dans l'eau d'un mêlange compoſé de ce bitume, de ſouffre, & de chaux, pour la préſerver des vers; à cela il ajoûte qu'on peut s'en ſervir au lieu de ſuif, & pour apprêter le cuir, aſſurant que par ce moyen il devient non ſeulement ſouple, mais acquiert même une belle couleur & du luſtre, qu'il préſerve auſſi le fer de la rouïlle, & peut tenir lieu de chandelles.

Kuffer dit auſſi deux mots du bitume de *Lampertsloch*, dans ſa Beſchreibung des Marggrafen Bads, imprimée en 1624.

Reiſel dit, dans ſa Beſchreibung des Niederbronnen Bads, imprimée en 1664, qu'on trouve à *Lampertsloch* pluſieurs mines de ſoufre, de pyrites, & de cire foſſile, comme auſſi des rochers entiers de bitume & du *petroleum* liquide, dont les veines deſcendent très profondément dans la terre.

D'Ich-

D'Ichtersheim, dans ſa *Topographia Alſatiæ*, 1706, ne dit que deux mots ſur notre bitume; encore n'eſt-ce qu'une répétition de ce que *Hertzog* en a dit.

Boecler, dans ſa *Cynoſura Materiæ Medicæ*, qui a vu le jour en 1729, parle d'un *petroleum* noir, nageant ſur l'eau à *Lampertsloch*, qu'il dit avoir été employé jusqu'à ſon temps à de vils uſages.

Monſieur *Hoefel*, préſentement Phyſicien de Deux-ponts, a donné une diſſertation à Strasbourg en 1734, qui a pour titre *Hiſtoria balſami mineralis Alſatiæ, ſeu Petrolei vallis Sti. Lamperti*, der Hanauiſche Erdbalſam, Lamprechtsloch̃er Oel, oder Bächelbronn. Cette Diſſertation contient une deſcription des plus exactes que nous ayons jusqu'à préſent de ce bitume; mais je ne ſçaurois donner ici un extrait complet de ce beau Traité, ſans paſſer les bornes que je me ſuis preſcrites. Je me contenterai dont d'en tranſcrire les principales choſes qui conviennent à mon but.

„Il y a, dit il, à l'orient de *Lampertsloch* une ſource entou-
„ rée de planches, qui a douze pieds de profondeur ſur cinq de lar-
„ ge; l'eau de cette ſource eſt couverte d'un bitume dont on pouvoit
„ ramaſſer autrefois quatre livres par jour; mais, depuis que plu-
„ ſieurs petites ſources ont percé aux environs, on n'en peut plus re-
„ cueillir qu'une livre; il s'y en trouve en plus grande quantité au
„ printems qu'aux autres ſaiſons; la permiſſion annuelle de la ramaſ-
„ ſer ne ſe donne qu'au plus offrant; on en ſent l'odeur à une demi-
„ lieue à la ronde; les inſectes qui voltigent ſur la ſource ſont ſuffo-
„ qués par les vapeurs qui en exhalent, & tombent dedans. Son
„ fond eſt argilleux; & à cent quatre vingt pas de là on découvre
„ une mine de bitume ſablonneuſe, dont la veine eſt couverte dans
„ quelques endroits d'un demi-pied de terre, & dans d'autres de
„ deux pieds; elle a vingt pieds de largeur ſur quatre de profondeur.
„ J'ai trouvé, continue-t-il, au fond de la mine des pyrites jaunes &
„ blanches. L'eau de cette ſource ne differe pas de celle des autres
„ fontaines. Cinq livres de la mine ont donné par la diſtillation une

„ once

„ once de phlegme, & huit onces d'une huile empyreumatique; il eſt „ reſté dans la cornue un ſable noir & blanc, dont l'aimant a attiré „ quelques particules; l'huile de la ſource a donné par la diſtillation „ les mêmes produits que la mine. On a tiré de l'huile empyreuma- „ tique, après pluſieurs rectifications, beaucoup d'huile très fluide „ & jaunâtre; je n'ai pu, dit-il, encore faire du ſuccin de ce *petro-* „ *leum*, ni avec le ſel de Glauber, ni avec l'eſprit de nitre."

Monſieur *Schœpflin*, qui, par un effet de ſon attention ordinaire, ne laiſſe rien échapper, fait quelque mention du bitume de *Lampertsloch* dans le premier volume de ſon *Alſatia Illuſtrata*, & renvoye le lecteur à la Diſſertation de Monſieur *Hoefel*.

Je viens d'indiquer tout ce qu'on a écrit juſques ici ſur cette matiere, tant pour rendre juſtice a ceux qui l'ont traitée avant moi, que pour faire voir qu'il y a encore bien des choſes à deſirer là deſſus, & que le bitume des environs de Sulz a été travaillé avec ſuccès depuis.

On a tiré tout le bitume dont on s'eſt ſervi jusques à l'année 1742, des fontaines d'une prairie marécageuſe, comme le ſont ordinairement celles qui ſe trouvent entre des montagnes. Elle eſt ſituée vers le Sud-Oueſt, au pied d'une colline, qui a *Lampersloch* au Nord, & *Merkweiler* au Sud: la hauteur de la colline eſt de trente toiſes environ, & ſon ſommet eſt large d'un quart de lieue. L'eau de pluſieurs fontaines chargées de bitume s'écoule ſur cette prairie; l'une d'entr'elles eſt la plus remarquable par ſon abondance & par ſon ancienneté: & c'eſt d'elle que tous les Auteurs cités ci-deſſus ont parlé, & dont on a tiré le bitume principalement. On a vu de tems en tems naitre de nouvelles ſources, qui ont fait tarir les anciennes; mais la plus grande s'eſt toujours conſervée: les petites ſources qui ſubſiſtent aujourdhui, tariſſent pendant l'été, & je ne doute nullement que ſi l'on continue de travailler à la mine, & de faire écouler les eaux de la montagne, les fontaines de la prairie ne tariſſent un jour entierement. La grande ſource eſt au ſud de la mine, de niveau avec la prairie; d'un côté elle a quinze pieds de profondeur, dix-huit de l'autre,

Digitized by Google

l'autre, & cinq pieds quarrés de largeur; ſes eaux n'augmentent pas beaucoup, quoique celles des environs croiſſent conſidérablement. Il y a environ douze ans qu'on a vuidé les eaux de cette ſource, ce qui a fait tomber ſa garniture de planches, en ſorte qu'il n'en eſt reſté que quelques unes à ſa partie ſupérieure; mais on a rétabli la garniture il y a quelque temps. L'eau de la ſource eſt bleuâtre, à peu près comme le petit lait, ce qui eſt cauſé par les parties huileuſes qui y ſurnagent; elle n'a pourtant aucun goût.

On ſe ſouviendra que Monſieur *Hoefel* aſſure, que le plus de bitume qu'on pouvoit ramaſſer de ſon temps ſur les fontaines, étoit quatre livres par jour: dans l'année 1742, on a trouvé le moyen d'en tirer plus de quintaux qu'autrefois de livres.

Monſieur *Tirnis*, Suiſſe, commença cette année à fouiller dans la ſuperficie de la terre. Monſieur *de la Sablonniere*, qui avoit déjà travaillé à la mine d'aſphalte de Neufchâtel, a pouſſé le travail plus loin; & ayant pénétré jusqu'à l'intérieur de la montagne, il a découvert le lit qu'on travaille actuellement. C'eſt en 1745 qu'il commença à s'y mettre avec vigueur, & c'eſt de lui que vient le nom de *la Sablonniere* qu'on donne aujourdhui à l'enclos de la mine qu'on travaille ſur la colline dont j'ai parlé. Depuis il a fait bâtir auprès d'elle une petite maiſon pour le Directeur, & une grange ſpacieuſe pour la préparation du bitume.

On a commencé à creuſer près du pied de la colline. La bouche, ou l'ouverture du conduit, (Stollen Mundloch) eſt ſituée du côté de l'orient, & la galerie vers l'occident; elle a environ deux cens toiſes de longueur: il y a encore pluſieurs autres galeries qu'on a fait depuis pour tirer la mine. On a encore pratiqué trois puits dans la colline, dont le plus ancien qui eſt ruiné à preſent avoit vingt-deux pieds de profondeur: les deux autres, dont l'un a treize toiſes de profondeur, & l'autre qui n'a été creuſé que cette année, aboutiſſent à des galeries, dont l'une s'étend du Sud-Oueſt au Nord-Oueſt, & a environ cent toiſes de longueur.

Le nouveau puits qui a ſoixante-deux pieds, aboutit à une galerie longue de vingt toiſes, ou environ.

Les galeries de la colline ont en général huit pieds de hauteur, dont deux, qui ſont les plus proches de leur fonds, ſont garnies d'une planche ſur laquelle on marche, & au deſſous de laquelle les eaux ſe peuvent raſſembler, lesquelles ſont conduites par des canaux jusqu'à la pompe qui les tire au jour.

L'exemple de Meſſieurs *Tirnis* & *de la Sablonniere* a encouragé différens Curieux à fouiller dans d'autres endroits du voiſinage de la colline que je viens de décrire.

Il y a environ deux ans qu'on a commencé de tirer auſſi la mine de bitume de la Forêt de la paroiſſe de Sulz. L'ouverture de la galerie principale eſt dans le point de la vallée qui ſe termine dans cette Forêt: cette galerie avance de trois ou quatre toiſes vers le Sud, elle ſe tourne après vers l'Oueſt, & de là vers le Nord-Oueſt; elle a cinq pieds de hauteur, & deux pieds & demi de longeur; elle a actuellement vingt toiſes, ou environ. On a pratiqué proche de l'entrée de la galerie un puits d'où on tire la mine, par des cuveaux, comme cela ſe pratique auſſi à la colline mentionnée ci-deſſus; on pompe par le même puits qui a cinq toiſes de profondeur les eaux.

Cet établiſſement s'appelle *le Saupferch*, parce que c'eſt ici où couchent les cochons qu'on envoye au gland.

A' une demi-lieue du *Saupferch*, du côté du Nord, on a trouvé une couche de bitume, à quelques pieds ſous la terre, & large de cent vingt pas. Celle-ci n'eſt pas travaillée faute d'entrepreneurs, qui veuillent y employer quelque argent.

Le puits du *Saupferch* commence par une couche de ſable, après laquelle vient une mine de bitume; ſous celle-ci une couche de charbon de terre en pelotons, & enfin une d'argille.

En creuſant le puits de la colline, on a premierement trouvé une couche de terre de potier, d'un jaune-gris, qui a jusques à quatre pieds

pieds de largeur; enſuite une terre ſablonneuſe dans laquelle on a remarqué des veines d'un rouge brun; après cela un banc d'argille, tantôt blanche, tantôt griſe; & enfin la mine de bitume, deſſous laquelle ſe voit un banc d'argille ſemblable à celui qui eſt au deſſus: l'argille eſt d'autant plus dure qu'elle eſt plus profonde. Il s'y trouve auſſi des pyrites diſperſés par pelotons; mais, plus on y pénétre, moins on en découvre.

Les vapeurs ſouterraines s'élevent quelquefois dans la miniere de *Lampertsloch*, ou de la colline, en ſi grande quantité, qu'elles font un dommage conſidérable. Il eſt arrivé plus d'une fois, & encore tout récemment, que des eaux qui paroiſſoient onctueuſes au goût & au tact, ont percé dans la galerie, que le bitume qui nageoit ſur elles s'eſt enflammé, & que l'air a été ſi prodigieuſement ébranlé, que non ſeulement les ouvriers ont été jettés par terre, mais que les tuiles de la maiſonnette du puits ont été briſées, & qu'on a entendu, à la diſtance d'un quart d'heure, un bruit comme ſi on avoit tiré un canon.

Le bitume qu'on tire des trois endroits qui ſont exploités aujourdhui, différe à quelques égards. Je décrirai ci-après celui qu'on tire de la colline de *Lampertsloch*. Celui du *Saupferch* eſt plus puant que les autres; celui enfin qui eſt proche de la terre, eſt le plus tenace de tous: auſſi y a-t-on trouvé du véritable bitume, aſſés ſolide, qui n'étoit incorporé dans aucune autre ſubſtance.

On ſe ſert pour arriver à la mine de bitume de deux inſtrumens. L'un eſt une pêle de fer, qui fait un angle aigu avec le manche, & dont la partie antérieure eſt formée en demi-lune.

L'autre eſt un coin de fer, attaché à un manche. C'eſt le bitume qu'on tire de la mine de la colline, qui a acquis la plus grande réputation; c'eſt auſſi celui qui a fait le ſujet de mes expériences, que je vais rapporter, après avoir dit deux mots ſur la nature de la mine, & ſur la façon d'en tirer le bitume.

On appelle la mine ſur les lieux où on la tire hors de la terre, *Mine d'Aſphalte*; c'eſt une terre noire, plus ou moins onctueuſe au

tact, à proportion quelle approche d'avantage de la ſuperficie de la terre. On la tire en grandes maſſes qui, étant expoſées à l'air, tombent en petits morceaux, parce que les parties fluides qui les uniſſoient, en exhalent. *Linnæus* fait mention de cette terre dans le *Muſeum Teſſinian.* p. 40. ſous le nom de *minera bitumen friabile.*

Cette terre eſt très improprement nommée une mine, car dans le fond elle n'eſt qu'un ſable imprégné de bitume, qu'on en ſépare de la maniere ſuivante: on met cette terre dans des chaudrons de fer; on la fait bouillir avec de l'eau, ſur la ſuperficie de laquelle le bitume monte par ce moyen; on trouve au fond de la chaudiere un ſable blanc précipité. Le bitume qu'on en retire de cette façon contient encore pluſieurs parties de ſable, dont on n'a pu le ſéparer entierement, ce qui ne ſe fait qu'en faiſant fondre le bitume retiré du ſable, dans une chaudiere de fer, & en le faiſant bouillir pendant quelque tems. Par là le ſable qui s'y trouve encore mêlé, ſe précipite au fond de la chaudiere; & le bitume qui eſt au deſſus du ſable précipité, ſe trouve entierement purifié.

Rien n'eſt plus ſimple que cette méthode pour retirer le bitume du ſable dans lequel la Nature l'a caché: l'eau miſe en mouvement par la chaleur pénétre dans les interſtices du ſable, & en détache le bitume qui s'y trouve. Celui-ci qui eſt plus leger que l'eau, & qui n'en peut être diſſous, monte à la ſuperficie, & s'y aſſemble; le ſable au contraire tombe par ſon poids au fond du vaiſſeau.

Ce qui reſte de ſable dans le bitume, & qui n'en peut être ſéparé par cette premiere opération, eſt précipité par la ſeconde, dans laquelle on fond le bitume, c'eſt à dire qu'on diviſe ſes parties, & que le ſable qu'elles tenoient envelopé, ſe retire par ſon poids, & entraine avec ſoi quelques particules bitumineuſes qui n'ont pû s'en ſéparer entierement. Ce ſable reſſemble parfaitement à la terre bitumineuſe tirée de la miniere; il en a auſſi l'odeur, & s'enflamme facilement, lorsqu'on le jette au feu; dans la fabrique même on s'en ſert en guiſe de bois.

La

La Nature ſépare le ſable du bitume beaucoup plus aiſément : les eaux ſouterraines desquelles on ſçait combien de force leur mouvement poſſede, en paſſant par le lit du ſable bitumineux, ſe chargent de bitume ; le courant ſupplée ici au mouvement que nous excitons dans la fabrique par le bouillonement : le ſable qui eſt obligé de s'en détacher par la fuſion, ſe ſépare du bitume que les eaux ſouterraines ont chargé, ſous les paſſages de ces eaux par des couches ſablonneuſes & argilleuſes, au travers desquelles ces eaux ſe filtrent avant qu'elles percent au jour.

Une livre de ſable bitumineux m'a donné deux onces de bitume bien net, & quatorze de ſable, dont une once s'eſt précipitée du bitume par le raffinage.

J'ai diſtillé une livre de ſable qui reſtoit après le raffinage du bitume, & j'en ai eu deux gros d'eau, ſix gros d'huile ſubtile, & cinq gros d'huile épaiſſe ; ſubſtances dans lesquelles le feu décompoſe le bitume, comme je le dirai plus bas. Il paroit par ces expériences, que chaque livre de ſable qui ſe précipite pendant la purification du bitume, en contient au delà d'une once & demie ; & comme on retire d'une livre de terre bitumineuſe une once de ce ſable, on perd ſur chaque livre un gros environ de bitume, qu'on ne ſauroit en retirer. Cette perte peut être aiſément négligée.

Le bitume ſéparé de ſa mine eſt une matiere noire, d'une odeur aſſez forte, qui lui eſt propre ; elle n'eſt, ni bonne, ni mauvaiſe, & ne peut ſans prévention être comparée à celle du ſuccin. Quand on jette du feu ſur cette matiere, elle ne s'enflamme pas ; mais, en la jettant ſur du feu, elle s'enflamme auſſitôt & donne une fumée blanche. J'ai ramaſſé cette fumée, & j'en ai eu une ſuye très fine, mais point brillante. Le bitume brûle dans la lampe comme une huile faite par expreſſion, ſans qu'il en réſulte aucune odeur déſagréable ; il tient le milieu par ſa ténacité entre le miel & la thérébentine. Quant à ſon poids ſpécifique, on peut le comparer par la table ci-jointe, avec celui de

différentes ſubſtances que j'ai peſées dans ma chambre, dans une même heure.

Huile de giroffles -	1. 070.	Huile d'Olives d'Amendes douces	0. 923.
Eau commune -	1. 019.		
Vinaigre diſtillé -	1. 015.	de Thérébentine	0. 903.
		Acide de ſel dulcifié -	0. 884.
Bitume de Lampertsloch	1. 000	nitre dulcifié -	0. 873.
Eſprit de ſel ammoniac fait ſans eau - -	0. 980.	vitriol dulcifié Alcohol - -	0. 845.
Huile de lin -	0. 946.	Q. E. Végétal, ou Aether	0. 808.
Beure de Cacao. -	0. 942.	Naphte diſtillée du bitume	

Si l'on expoſe notre bitume à l'air pendant un certain tems, il perd non ſeulement de ſon poids, mais il devient même plus tenace, & cela plus ou moins à proportion que l'air eſt chaud; ce qui fait que, dans les grandes chaleurs, on ſent l'odeur de la mine à la diſtance de quarante pas. Les vapeurs qu'exhalent le bitume qui ſurnage ne ſont en aucune maniere nuiſibles; car les mouches, les oiſeaux, & les autres animaux, qui en approchent, n'en ſont point incommodés: il eſt vrai qu'on y trouve quelquefois des inſectes noyés, mais cela ne vient point des vapeurs nuiſibles de la fontaine; ces petits animaux y périſſent plutôt faute de nourriture; leurs ailes étant chargées par cette matiere tenace, ils ne ſauroient s'envoler.

En faiſant bouillir cette matiere, elle petille d'abord beaucoup, à cauſe des particules aqueuſes qui s'y trouvent mêlées, & devient plus tenace; en continuant de la faire bouillir jusqu'à ce qu'elle ſoit réduite à la moitié de ſon poids, elle devient dure & caſſante comme de la poix, en ſe réfroidiſſant. J'en ai tenu une partie réduite à cette conſiſtance pendant quelque tems dans l'eau bouillante; elle eſt devenue très molle, & capable de recevoir toutes ſortes de formes, ſans cependant s'attacher aux doigts.

Je

Je conclus de ces expériences, que cette matiere eſt auſſi propre pour poiſſer les navires que le goudron végétal, & qu'elle peut être encore préférable à ce dernier, en ce qu'elle préſerve les vaiſſeaux de la vermine, qui au contraire y eſt attirée par l'odeur du pin, qui eſt très agréable aux vers.

Le même bitume évaporé à un plus grand degré, devient un véritable aſphalte.

On comprend par ce que je viens dire ſur la matiere qu'on tire de la mine de *Lampertsloch*, que le nom qui lui convient le mieux eſt celui de bitume liquide; terme par lequel les Anciens ont dénoté une huile tenace qui ſort de la terre. *Dioſcoride*, L. I. Ch. 99. dit qu'on brûle le bitume liquide dans les lampes; or on ſcait que les huiles trop fluides ne ſont pas propres à cet uſage. *Pline*, dans ſon *Hiſtoire Naturelle*, L. VI. Ch. 23. parle d'une Nation qui perfectionne le bitume, & L. VII. Ch. 15. il dit que le bitume eſt tenace & gluant. L. XXXV. Ch. 4. il donne le nom de bitume à une liqueur graſſe & huileuſe qui nage ſur une fontaine. *Galien*, *de Simpl. Medicam. facult.* L. I. Ch. 17. aſſure que la ſubſtance des bitumes eſt craſſe & terreſtre.

On appelle notre bitume dans l'endroit où on le fabrique, Goudron, parce que les entrepreneurs avoient deſſein de le vendre pour calfater les vaiſſeaux. Il paroit parce que j'en ai dit plus haut qu'on l'y pourroit adapter effectivement, quoiqu'on ne l'employe jusques ici qu'à graiſſer les voitures; à cette fin on y mêle du ſavon & du ſuif, pour le rendre plus propre à cet uſage.

On nomme notre bitume auſſi *petroleum*, parce que, dit-on, c'eſt une huile qui ſort des rochers; mais rien ne retarde plus le progrés qu'on peut faire dans l'Hiſtoire naturelle que la mauvaiſe coûtume de s'attacher aux écorces étymologiques, en négligeant d'approfondir la nature des choſes, qui en eſt le but principal. L'Hiſtoire naturelle eſt une ſcience de pratique plutôt que de ſpéculation, en ce qu'elle fait connoitre, par des faits, la nature des corps utiles aux hommes.

Il

Il faut en effet mettre une grande différence entre les matieres foſſiles inflammables, connues en général ſous le nom de *petroleum*. *Mercatus*, dans ſa *Metallotheca*, p. 81. diſtingue les bitumes fluides qui deviennent tenaces, de ceux qui ne le deviennent pas. Je ſuis très ſurpris que les Auteurs modernes ayent negligé cette diſtinction, ſans laquelle il eſt impoſſible de ſe former une idée juſte des huiles foſſiles. J'admets donc deux ſortes de ces huiles, dont les unes deviennent épaiſſes & ſolides par l'évaporation, & ſe ramolliſſent enſuite par la chaleur, de maniere qu'elles ſont ſuſceptibles de toute ſorte de formes. Je les appelle *bitumes*. Les autres s'évaporent entierement par la chaleur, & il n'en reſte qu'un peu de terre noire, qui eſt une partie huileuſe brulée; je les nomme *petroleum*. Il eſt très probable que les Anciens ont compris le *petroleum* ſous le terme de *Naphte;* car le mot de *petroleum* n'a commencé à être uſité qu'au ſeizième ſiecle, comme on peut le voir dans *Agricola*, *de Natur. Foſſil.* L. IV.

J'ai vû que quelques auteurs citent *Meſuë*, au ſujet du *petroleum;* mais je n'ai pu trouver ce mot dans l'édition des deux Livres de cet Auteur, qui a paru à Veniſe en 1689. Je vois au contraire dans ſon *Grabadin*, à l'article *Oleum Philoſophorum*, qu'il diſtingue l'huile des Philoſophes en naturelle & en artificielle; la naturelle en minérale & en marine, & qu'il appelle cette derniére *Naphte*. Il eſt donc clair qu'il entend par huile des Philoſophes naturelle minérale, ce qu'on appelle aujourdhui *petroleum*.

Le bitume de *Lampertsloch* diſſout les ſubſtances animales & végétales ſuivantes : Adragant, Animé, Bdellium, Camfre, Caranna, Cire, Colofon, Copal, Encens, Encens de village, Euphorbe, Huile d'olives, Huile de térébentine, Gomme ammoniac, Gomme de lierre, les trois eſpeces de Laques, Maſtic, Myrrhe, Opopanax, Phosphore, (cette diſſolution luit dans l'obſcurité,) Sagapenum, Sang de Dragon, Styrax, Tacamahac, Térébentine.

Il eſt inutile d'avertir que le bitume devient d'autant plus ſolide, qu'il a diſſous une plus grande quantité de ſubſtances ſolides, & que l'artiſte

l'artiſte le peut adapter à différens uſages, en y joignant différentes ſubſtances auxquelles il s'unit.

Il ne diſſout point le benjoin, l'aſſa fœtida, le galbanum, & le cachou.

L'huile de vitriol ne s'échauffe pas, étant verſée ſur le bitume; mais il ſe forme de ce mêlange une maſſe ſolide & noire, qui n'a aucune transparence. Cette maſſe étant diſtillée, donne un eſprit acide très volatil; & elle ſublime au col de la cornue, & du récipient, des ſoufres: dans la cornue il reſte une terre noire & inſipide. Il ſeroit ſuperflu d'expliquer comment l'acide vitriolique a été volatiliſé, & comment le ſoufre a été produit dans cette expérience. L'eau forte, l'eſprit de nitre de Glauber, & l'eſprit de ſel, n'agiſſent point ſur notre bitume; ils n'en diſſolvent rien, même aprés de longues digeſtions. Quand on le fait bouillir avec l'eſprit de nitre, les vapeurs acides le pouſſent hors du vaiſſeau, à moins qu'il ne ſoit fort grand; le bitume devient en même tems plus tenace, & perd ſa couleur pour en prendre une jaune-rougeâtre; ce changement de couleur vient ſans doute de l'acide nitreux, qui s'attache au bitume, & qui augmente ſa tenacité.

L'eſprit de vin alkoholiſé ne produit aucun changement avec le bitume; la tenacité de celui-ci en paroit être la raiſon, car le *petroleum* de Neufchâtel, qu'on tire de ſa mine par la diſtillation, ſe diſſout dans l'alkohol; & perſonne n'ignore que les huiles faites par expreſſion deviennent diſſolubles dans l'alkohol quand elles ont été atténuées par la diſtillation. Ce n'eſt pas ici que je rendrai raiſon de ce phénomene; mais je ne ſaurois paſſer ſous ſilence que quelques Auteurs ſe trompent, quand ils aſſurent que tout *petroleum* dont l'alcohol diſſout quelque choſe, eſt falſifié par une ſubſtance réſineuſe. Ceux qu'on retire de leurs mines par la diſtillation, montrent le contraire; & encore ne vois-je pas pourquoi la chaleur ſouterraine ne pourroit pas atténuer les bitumes qu'elle fait ſortir de la terre ſous une forme fluide, au même point qu'ils acquierent par la diſtillation.

En mêlant notre bitume avec du ſel alcali fixe, il n'en réſulte rien de ſemblable au ſavon ; l'acide du bitume qui réduit l'alcali en ſel neutre, en eſt la raiſon. En calcinant le mêlange du bitume avec l'alcali, jusques à ce qu'il ne fume plus, & en tirant tout le ſel qui y eſt contenu, on obtient un ſel dont la premiere cryſtalliſation eſt couverte d'une pellicule tant ſoit peu visqueuſe, & dont les cryſtaux expoſés à une chaleur médiocre perdent leur transparence ; & quand on en jette ſur des charbons, on apperçoit à peine qu'ils décrépitent. L'eau froide ne peut pas les diſſoudre, à moins qu'on ne les diſſolve, & cryſtalliſe de nouveau ; quand on fait fondre ces cryſtaux dans un creuſet avec des charbons, ils ne donnent point de foye de ſoufre ; leur goût eſt un peu amer, & ils précipitent le mercure en forme de chaux blanche.

Ce que je viens de dire ſur les cryſtaux formés par l'acide contenu dans notre bitume & par le ſel alcali, démontre que cet acide eſt celui du ſel commun, qui ſe joignant à l'alcali produit ce qu'on appelle communément *Sel digeſtif de Sylvius*. La figure de ces cryſtaux n'a pas été bien formée, leur décrépitation a été imparfaite, & ils n'ont pû ſe diſſoudre dans l'eau froide, parce qu'il y avoit encore quelques particules huileuſes qui leur étoient adhérentes.

Notre bitume, mêlé avec l'alun, & calciné à propos, forme ce qu'on appelle *pyrophore*, ou un ſouffre qui eſt retenu dans la terre poreuſe de l'alun, lequel étant ſuffoqué tout ardent, s'enflamme de nouveau quand on lui redonne l'air. Meſſieurs *Sachs* & *Hæfel*, l'un dans ſa diſſertation de *Pyrophoris*, l'autre dans ſa Diſſertation ſur *le bitume de Lampertsloch*, ont fait la même expérience.

J'ai précipité avec une leſſive faite de notre bitume calciné avec le ſel de tartre, une diſſolution d'une partie de vitriol de Mars, & de deux parties d'alun ; ce mêlange m'a donné une chaux jaunâtre. Je fus curieux de ſçavoir pourquoi l'alcali rendu huileux ne précipitoit pas le fer ſous la forme d'une chaux bleüe ; & s'il faloit néceſſairement

pour

pour cet effet un phlogiſtique animal; ou ſi l'acide a empêché jusques ici de faire le bleu de Pruſſe avec toute autre choſe qu'avec le charbon animal.

L'Abbé *Menon* m'a fait naitre cette idée par les deux Traités qu'il a préſentés à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & qui ſont contenus dans le premier Tome des *Mémoires Etrangers*. Pour m'éclaircir à cet égard, j'ai pris du ſel alcali, & l'ayant calciné avec de l'huile qui j'avois tirée de notre bitume, après l'avoir diſtillé ſur le ſel de tartre, j'ai verſé la leſſive que j'en ai retirée dans une diſſolution de vitriol, de Mars, & d'alun, & j'ai eu une chaux bien bleuë.

Ayant cémenté le bitume avec du fer, je n'ai remarqué dans celui-ci aucun changement, comme je l'avois prévû, étant bien perſuadé que l'acide empêche le fer de ſe changer en acier, quoiqu'on lui ajoute le principe inflammable. Trois parties du même bitume diſſolvent une partie de ſouffre; cette ſolution acquiert une odeur ſulphureuſe, & le bitume en devient plus épais. On ſera peut-être ſurpris d'apprendre qu'il faut plus de bitume pour diſſoudre une certaine quantité de ſouffre qu'il ne faut des huiles faites par expreſſion, qui diſſolvent communément la moitié de leur poids de ſouffre.

La diſſolution du ſouffre dans le bitume paroit contraire à l'axiome, que plus les graiſſes ſont tenaces, & plus elles diſſolvent de ſouffre; mais on verra, en faiſant l'analyſe de notre bitume, que ſa quatrième partie n'eſt qu'une ſimple terre, & que la ſeptième partie de ſon poids eſt une huile très ſubtile, qui s'exhale à une chaleur beaucoup inférieure à celle qui eſt néceſſaire pour faire bouillir le bitume. Or, comme ce bitume ne peut diſſoudre le ſouffre, à moins qu'on ne les faſſe bouillir enſemble, l'huile ſubtile doit par conſéquent s'envoler pendant que la diſſolution ſe fait: mais, ſi on déduit du bitume la terre & l'huile ſubtile qui ne ſont rien à la diſſolution, on connoitra facilement que l'huile du bitume, qui ſeule peut diſſoudre le ſouffre, en diſſout une quantité auſſi grande que les huiles faites par expreſſion.

L'ambre gris & le ſuccin ſe diſſolvent parfaitement dans notre bitume, de même que l'arſenic, qui ſe ſublime en arſenic rouge, quand on diſtille la diſſolution.

J'ai diſtillé une livre de bitume; j'ai ai tiré onze onces d'une huile empyreumatique, & quatre de terre morte, avec deux gros d'eau, dans laquelle je ne pouvois remarquer aucune partie ſaline.

Je ne diſconviens pas qu'une partie de l'eau que j'en ai tirée ne ſoit provenûe de la décompoſition de quelques parties huileuſes. Perſonne n'ignore qu'il ſe décompoſe toujours quelque portion des huiles auſſi ſouvent qu'on les diſtille; mais le petillement de la matiere pendant l'opération, qui fait auſſi qu'on ne peut pas obtenir l'huile ſubtile dans la premiere diſtillation, m'a convaincu qu'il y avoit encore de l'eau dont on s'eſt ſervi pour la ſéparation du bitume de ſa mine, mêlée avec le bitume, & qui en ſort lorsqu'on le diſtille.

J'ai mis l'huile tirée du bitume dans une cornue; j'en ai bien nettoyé le col; & ayant changé pluſieurs fois de récipient, j'en ai tiré deux onces, & deux gros d'une huile très legere, parfaitement claire, & qui n'avoit aucune couleur. Une goutte de cette huile verſée ſur de l'eau s'étend beaucoup, & ne fait point de bruit; elle a une odeur très forte, & elle attire la flamme quand on la lui préſente; elle brûle ſur l'eau, & étant verſée dans une ſolution d'or, elle en attire le métal, & devient noire; expoſée à l'air pendant quelques jours, dans un verre débouché, elle reſte claire; elle eſt enfin parfaitement diſſoluble dans l'alcohol. Cette huile diſtillée de nouveau monte ſans aucun changement par une chaleur médiocre, & laiſſe au fond de la cornue une legere croute noirâtre. Rien n'eſt plus naturel que ce peu de terre qui reſte après la diſtillation des huiles les plus ſubtiles; pluſieurs ſe ſont imaginé qu'elle en étoit une partie hétérogene, & qu'à meſure qu'on priveroit les huiles de cette terre, elles en deviendroient plus ſubtiles. C'eſt par cette raiſon que les uns ont diſtillé l'huile pluſieurs

ſieurs fois, & que les autres y ont ajoûté différentes ſubſtances ſur leſquelles ils ont voulu les rectifier; mais, ni les uns, ni les autres, ne ſont parvenus à avoir une huile qui n'ait point laiſſé, après la diſtillation, une terre noire au fond de la cornuë. Auſſi eſt-il impoſſible d'y parvenir; car les parties d'huile qui s'attachent aux parois de la cornuë, ſeront toujours brûlées par la chaleur qui eſt néceſſaire à la diſtillation: & c'eſt admettre une choſe impoſſible, que de ſuppoſer une huile qui n'a aucune terre, parce que l'eſſence de l'huile conſiſte dans le phlogiſtique. Et qui pourroit nier que le phlogiſtique ne ſoit une terre? L'éther, cette huile ſi ſubtile, laiſſe toujours une croûte noirâtre au fond de la cornue, quand on le diſtille ſans addition. Je ne ſcaurois m'imaginer que l'huile dont je viens de parler, ſoit formée par l'action du feu. J'ai dit ci-deſſus qu'elle eſt parfaitement claire & fluide; or chacun ſçait que, plus les huiles ont ſouffert du feu, plus elles deviennent tenaces & colorées: par conſéquent il n'eſt pas probable que l'huile en queſtion ſoit formée par le feu. Ajoutons que notre huile étant une fois ſéparée du bitume, on n'en peut plus rien retirer de pareil, à quelque feu qu'on l'expoſe. Je n'héſite donc point à la mettre au rang des huiles eſſentielles éthérées.

On n'aura pas lieu de douter que cette huile ne ſoit la véritable *Naphte*, tant des anciens que des modernes, ſi l'on veut ſe donner la peine de conſulter, entre autres Auteurs, *Dioſcoride*, *Mat. Med.* L. II. Ch. 101; *Pline*, *Hiſt. Natural.* L. II. Ch. 105; *Plutarque*, dans *la Vie d'Alexandre*; *Strabon*, *Geograph.* L. XV; *Linnæus*, *Syſtem. Natur.* *Wallerius*, *Mineral.* §. 99. De même que l'argent eſt toujours argent, de quelque pays qu'il vienne, & que celui qu'on tire des mines ne differe pas de celui que la Nature nous offre tout formé, quand l'un & l'autre a été bien raffiné; ainſi la naphte ſera toujours la même, qu'elle ſoit trouvée en Syrie, en Perſe, en Italie, ou en Alſace; quoique la Nature la donne toute pure dans certains pays, & dans d'autres mêlée avec différentes matieres dont on eſt obligé de la ſéparer artificiellement.

Après la naphte, on a diſtillé quatre onces d'une huile jaune tirant ſur le rouge, dont l'odeur eſt moins pénétrante que celle de la naphte. Je ne diſconviens pas que cette huile n'ait ſouffert de l'action du feu; elle y a été trop longtemps expoſée pour n'en avoir point été altérée. On trouve dans différens pays des huiles qui ſortent de la terre, parfaitement ſemblables à celle-ci. Les Duchés de Modene, & de Parme, de même que les Provinces de Languedoc & d'Auvergne, nous en fourniſſent des exemples. Ceux qui ſeront curieux d'en ſavoir davantage, pourront conſulter *Agricola*, *de Natur Foſſil.* & *Libavius*, *Singularia*, P. III. Ce que je viens d'alléguer au ſujet de la naphte, ſuffit auſſi pour prouver, que l'huile dont je parle ne differe pas de celles que la Nature produit toutes formées, & qui n'ont pas beſoin d'être ſéparées par l'art des matieres hétérogenes, avec leſquelles elles ont été mêlées dans les entrailles de la terre, & qui ſont connues aujourdhui ſous le nom de *petroleum* blanc, ou *petroleum* rouge.

Après la diſtillation du *petroleum*, j'ai obtenu par un feu plus fort quatre onces & demie d'une huile fort épaiſſe, d'une odeur déſagréable, & qui reſſemble parfaitement à l'huile épaiſſe qui ſort la derniere, quand on diſtille la térébentine. Elle paroit quelquefois bleüe, d'autres fois rougeâtre, ſelon les différentes ſituations dans leſquelles on la conſidere. Comme je ſoupçonnois que l'épaiſſeur de cette huile venoit en partie de l'acide qui lui eſt joint, je l'ai diſtillé avec la moitié de ſon poids de ſel de tartre, & par le moyen d'un feu violent, j'en ai obtenu une grande quantité d'huile ſemblable au *petroleum;* & le ſel de tartre qui eſt reſté dans la cornue, s'eſt trouvé changé en ſel digeſtif, qui a très bien décrépité ſur les charbons, & a produit de très beaux cryſtaux quadrangulaires. Le ſel digeſtif étoit plus pur & plus aiſé à reconnoitre que celui que j'ai obtenu par la calcination du bitume avec l'alcali, parce qu'il étoit moins chargé de particules huileuſes.

Je

Je ne puis m'empêcher de remarquer, que les cryſtaux dont je viens de parler, avoient une odeur ſemblable à celle du foye de ſoufre; mais il ne s'eſt fait aucun précipité lorsque j'ai verſé du vinaigre dans la ſolution.

Monſieur *Pott*, *Obſervat. & Animadverſ. Collat.* I. a obſervé que le ſel commun fondu avec des charbons forme une maſſe qui ſent le ſouffre, mais qui, diſſoute dans l'eau, & mêlée avec des acides, ne précipite aucune matiere. Ne pourroit-t-on pas regarder ces obſervations, comme des preuves de l'analogie de l'acide du ſel avec l'acide vitriolique ?

On voit par ce que j'ai dit jusques ici à combien & à quels uſages on peut employer notre bitume. Auſſi eſt-il évident qu'il eſt une huile éthérée, dont une grande partie a été condenſée par l'acide du ſel commun.

Nous trouvons aux environs de *Sulz* du ſable, du bitume, des pyrites, & du ſel commun. Ce ſont autant de choſes qui ſe rencontrent au fond de la mer. Jusques ici on n'a point trouvé de pétrifications dans les collines dont je parle. Y a-t-il quelques communications ſouterraines entre notre ſel & la mer, par où il puiſſe tirer ſon ſel & ſon bitume ? Mais le tremblement de terre qui a ébranlé le 1. Novembre 1755, tous les endroits attenants à la mer, ne s'y eſt point fait ſentir. Ce bitume diſtille-t-il par la chaleur ſouterraine des fôrets de pins engloutics dans la terre ? Sa grande reſſemblance avec l'huile qu'on diſtille des pins, & dont on fait la poix, rend cette conjecture très probable ; mais les Hiſtoriens ne font point mention d'un accident ſi conſidérable : & d'ailleurs combien ne faudroit-il pas de forêts ſouterraines, pour fournir une auſſi grande quantité de bitume, qui coule au moins depuis près de deux ſiecles, & qui ſuffit pour imbiber un lit de ſable d'une grandeur très conſidérable ; encore n'a-t-on jamais découvert ſous la terre de ces environs, ni feuilles, ni arbres.

Je

Je n'entreprendrai pas de propoſer quelque choſe de poſitif ſur l'origine de notre bitume, car cela me conduiroit aux grandes queſtions ſur la théorie de la terre, & ſur l'origine des foſſiles ; queſtions tant de fois agitées, & avec ſi peu de ſuccès.

J'ajoûte ſeulement que notre bitume ne paroit gueres différer du *Tar de Barbados;* & que les puits de poix qui ſont aux environs de *Clermont*, dont parle Mr. d'*Argenville*, dans ſon *Enumeration Foſſil. Gallic.* reſſemblent beaucoup aux collines de *Sulz.*

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

* *
*

Digitized by Google

RECHERCHES
SUR LA CONNOISSANCE MÉCANIQUE DES CORPS.

PAR M. EULER.

I.

On peut établir une triple connoiſſance des corps, la géométrique, la mécanique, & la phyſique. La connoiſſance géométrique ne regarde que l'étendue & la figure des corps: c'eſt la partie de la Géométrie, qui eſt nommée la *Stéréometrie*, qui renferme cette connoiſſance. La connoiſſance mécanique conſidere les corps entant qu'ils ſont matiere, ſans avoir égard aux qualités dont la matiere eſt douée; & il s'agit ici de connoitre, non ſeulement la quantité de matiere dont chaque corps eſt compoſé, qu'on nomme ſa maſſe; mais auſſi la maniere dont la matiere eſt diſtribuée par toute l'étendue des corps. Cette connoiſſance eſt abſolument néceſſaire lorsqu'il eſt queſtion du mouvement des corps; & c'eſt par cette raiſon, qu'elle eſt nommée mécanique. Enfin la connoiſſance phyſique des corps renferme toutes les autres propriétés & qualités des corps, qui ſont le propre objet de la Phyſique. Table I.

II. La connoiſſance mécanique des corps eſt le fondement de la Mécanique, puiſqu'on ne ſauroit déterminer le mouvement des corps ſans connoitre leur maſſe, & comment la matiere eſt diſtribuée par toute leur étendue. C'eſt de là qu'on a tiré l'idée du centre de gravité, dont la connoiſſance eſt, comme on ſait, de la derniere importance par toute la Mécanique. L'idée du centre d'oscillation y doit auſſi être rapportée, au lieu de laquelle on peut ſubſtituer celle des *momens d'inertie*, dont je me ſuis ſervi jusqu'ici avec bien du ſuccès dans mes

recherches mécaniques. Mais je viens de découvrir encore d'autres idées ſur cette matiere, qui ſemblent porter notre connoiſſance mécanique à un beaucoup plus haut degré de perfection: du moins m'ont elles ſervi à reſoudre des problemes mécaniques, qui m'avoient paru intraitables ſans leur ſecours. Toutes ces idées jointes enſemble fourniroient un ſyſteme aſſès complet de la connoiſſance mécanique des corps.

La maſſe des corps.

III. La premiere idée que la connoiſſance mécanique des corps nous préſente, eſt celle de leur maſſe, qui eſt l'aſſemblage de toute la matiere, dont le corps eſt compoſé. Or la matiere n'entre en conſidération, qu'entant qu'elle eſt douée de l'inertie; de ſorte que la maſſe eſt la meſure de l'inertie, ou de cette qualité des corps, par laquelle ils s'efforcent de demeurer dans le même état, ou de repos, ou de mouvement uniforme rectiligne. En examinant les phénomenes de la gravité, on a trouvé que le poids de chaque corps eſt proportionnel à ſa maſſe, du moins dans la même région de la terre; & partant il eſt permis de regarder le poids de chaque corps comme la meſure de ſa maſſe. S'il eſt queſtion des corps qui ſe trouvent loin de la terre, leur maſſe ſera exprimée par le poids que ces corps auroient, s'ils étoient placés à la ſurface de la terre, & même dans la région qu'on aura choiſie pour y fixer cette meſure. Ou bien, il ſuffit de connoitre le rapport de la maſſe d'un tel corps à celle d'un corps ſur la terre, dont le poids eſt connu. On comprend, ſans que j'aye beſoin d'en avertir, que je parle ici du poids que les corps auroient dans le vuide.

Le centre de gravité.

IV. Si la matiere dont un corps eſt compoſé, étoit également diſtribuée par toute ſon étendue, la connoiſſance de ſa maſſe ſeroit ſuffiſante pour en connoitre toutes les rélations au mouvement; & la connoiſſance géométrique de ſa figure fourniroit toutes les autres idées, qui entrent dans la conſidération du mouvement: de tels corps ſont apellés homogenes. Mais, ſi la matiere eſt inégalement diſtribuée par l'étendue du corps, il en faut tenir compte dans la Mécanique; & de là réſultent pluſieurs idées, qui dépendent de la diſtribution de la matiere

tiere par l'étendue du corps, dont la plus connue eſt celle du centre de gravité. Tout le monde ſait, qu'il ſe trouve dans chaque corps un certain point, autour du quel la peſanteur eſt quaſi également diſtribuée, & dans lequel on ſe puiſſe imaginer, comme ſi toute la maſſe du corps y ſeroit réunie. Mais cette idée eſt trop vague, & demande bien des éclairciſſemens & des rectifications.

V. D'abord qu'eſt-ce que cette égale diſtribution de la matiere ou de la peſanteur autour du centre de gravité? S'imagine-t-on que, ſi l'on coupe un corps par un plan, qui paſſe par ſon centre de gravité, les deux parties ſeront également peſantes? Cela ſeroit bien vrai dans un globe ou dans un cylindre homogene, mais un cone, quoiqu'il ſoit homogene, détruit cette explication; car le centre de gravité d'un tel cone ſe trouvant dans ſon axe, à une diſtance de la baſe, qui eſt le quart de ſa hauteur, ſi l'on coupe le cone par un plan parallele à ſa baſe, & qui paſſe par ſon centre de gravité, le cone retranché ſera au cone entier comme 27 à 64. donc il ſera plus petit que la moitié. Or, ſi le corps n'eſt pas homogene, il n'arrive presque jamais, que les ſections faites par ſon centre de gravité le partagent en deux parties égales, ou également peſantes.

VI. Il en eſt de même de l'autre propriété alléguée du centre de gravité, qui ſupoſe qu'on puiſſe toujours concevoir la maſſe ou le poids entier du corps comme réuni dans ſon centre de gravité. Cela n'eſt vrai, que lorsqu'il s'agit de l'état d'equilibre, ou d'un mouvement purement progreſſif des corps, où toutes les parties ſe meuvent à chaque inſtant avec des viteſſes égales ſuivant la même direction. Or, dès que le mouvement eſt gyratoire, ou ſe fait autour d'un axe fixe, cette ſupoſition n'a plus lieu: & l'on ſait que le mouvement d'un pendule eſt bien différent de celui qu'il auroit, ſi toute ſa maſſe étoit réunie dans ſon centre de gravité. C'eſt alors à un autre point qu'il faut faire attention, & qu'on nomme le centre d'oscillation du pendule.

VII. De là il eſt évident qu'il faut mieux fixer l'idée du centre de gravité. Et d'abord, il eſt conſtant, qu'il y a dans chaque corps un

certain point, qui tient un certain milieu entre la matiere qui compoſe le corps, dont la connoiſſance eſt de la derniere importance dans toute la Mécanique. Quand le corps ſe trouve à la ſurface de la terre, ce point eſt bien le même qu'on nomme ſon centre de gravité; mais, quand même le corps ne ſe trouveroit dans aucune liaiſon avec la terre, ou qu'il ne ſeroit pas aſſujetti à l'action de la gravité, ce point ne lui ſeroit pas moins eſſentiel, & entreroit également dans la détermination de ſes mouvemens. Donc, puisque ce point eſt abſolument indépendant de la gravité, & qu'il eſt déterminé uniquement par la diſtribution de la matiere dont le corps eſt compoſé, je le nommerai plutôt le *centre de maſſe*, ou le *centre d'inertie* de chaque corps.

VIII. Il faut auſſi conſidérer, que ce centre d'inertie ne convient avec le centre de gravité du corps, que lorsque les directions de la gravité ſur tous les élémens du corps ſont paralleles entr'elles, & que le poids de chaque élément eſt proportionnel à ſa maſſe, comme on peut le ſuppoſer, quand le corps ſe trouve à la ſurface de la terre, & que ſon étendue eſt quaſi infiniment petite par rapport à la diſtance au centre de la terre. Mais, ſi le corps étoit extrêmement grand, de ſorte que, ni les directions de la gravité ne ſeroient plus paralleles entr'elles, ni les forces dont les parties du corps ſont ſollicitées, proportionnelles à leurs maſſes; l'idée même du centre de gravité n'auroit plus lieu, quoique celle du centre d'inertie lui fût également eſſentielle.

Le centre d'inertie.

IX. Par ces raiſons il convient de ſéparer tout à fait l'idée du centre d'inertie de l'action de la gravité. Il s'agit donc de donner une juſte définition de ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps. Si nous regardons à l'origine de cette idée, que fournit la Mécanique, on conſidere des forces appliquées à chaque élément du corps, qui ſoient proportionnelles chacune à l'inertie, ou la maſſe de l'élément, auquel elles ſont appliquées, & que leurs directions ſoient paralleles entr'elles. Alors on cherche la direction moyenne de toutes ces forces élémentaires; & l'on obſerve que cette direction moyenne

ne paſſe toujours par un certain point du corps, quelque direction qu'on donne aux forces élémentaires. C'eſt donc ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps, & qui eſt le même que ſon centre de gravité, lorsque le corps ſe trouve aux environs de la Terre, & qu'il n'eſt pas trop grand, pour qu'on puiſſe conſidérer les forces élémentaires de la gravité comme proportionnelles aux maſſes des élémens, & leurs directions comme paralleles entr'elles.

X. Mais, pour dégager cette définition de la conſidération des forces, qu'on rapporte le corps à un plan quelconque, en multipliant la maſſe de chaque élément par ſa diſtance à ce plan; & la ſomme de tous ces produits ſera toujours égale au produit de la maſſe entiere du corps par la diſtance de ſon centre d'inertie au même plan. C'eſt en cela que conſiſte la nature du centre d'inertie. Mais on a raiſon de douter ſi cette définition eſt poſſible, puisqu'elle ſemble plus que déterminée. Car, prenant à volonté trois plans, auxquels on rapporte le corps de la maniere preſcrite, il eſt clair que de là le centre d'inertie ſera déjà déterminé. Il eſt donc encore douteux, ſi ce point aura la même propriété à l'égard de tous les autres plans: au moins n'eſt-il pas permis de le ſuppoſer; mais cela demande une démonſtration particuliere, ſans laquelle la définition donnée ſeroit abſurde.

Le moment d'un corps par rapport à un plan.

XI. Pour rendre cette definition plus intelligible, je nommerai le moment d'un corps par rapport à un plan donné, la ſomme de tous les produits, qui réſultent en multipliant la maſſe de chaque élément du corps par ſa diſtance au-dit plan. Cela poſé, je dis, qu'il ſe trouve dans chaque corps un certain point de cette nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque eſt toujours égal à la maſſe entiere du corps multipliée par la diſtance du dit point au même plan. Enſuite, ayant démontré l'exiſtence de ce point, la définition n'aura plus de difficulté en diſant, que c'eſt ce point qu'on nomme le centre d'inertie d'un corps. Il faut remarquer ici, que, ſi le plan coupe le corps, de ſorte qu'une partie du corps ſe trouve d'un côté & l'autre de l'autre côté du plan, le moment d'une partie par rapport au

plan

plan doit être pris négativement à l'égard de l'autre; tout comme la nature du calcul exige, où les distances, qui tombent à l'autre côté du plan, doivent être censées négatives.

XII. Voilà donc un Théoreme, dont la démonstration doit précéder notre définition. Pour cet effet, je remarque d'abord que, s'il y a un point dans le corps, qui a la propriété décrite par rapport à un certain plan, il aura la même propriété par rapport à tout autre
Fig. 1. plan parallele à celui là. Car, soit LMN un corps, dont la masse $=$ M, & I le point en question, dont la distance au plan proposé soit $= f$. Qu'on considere un élément quelconque du corps en Z, dont la masse soit $= dM$, & la distance au même plan $= x$. Le moment du corps par rapport à ce plan sera donc $= \int x\, dM$, & par l'hypothese $\int x\, dM = Mf$. Qu'on prenne maintenant un autre plan parallele au précédent à la distance $= e$, & puisque l'élément dM en Z se trouve à la distance $e + x$, le moment du corps par rapport à ce plan sera $= \int (e + x)\, dM = Me + \int x\, dM = M(e + f)$ à cause de $\int x\, dM = Mf$. Or $e + f$ étant la distance du point I à ce nouveau plan, le moment du corps est égal au produit de la masse M par cette distance du point I à ce plan.

Fig. 2. XIII. Rapportons maintenant le corps à trois plans AOB, AOC, & BOC, perpendiculaires entr'eux, les trois droites AO, BO, & CO, se croisans perpendiculairement à ce point O, & l'on pourra marquer le point I dans le corps, qui ait la propriété prescrite par rapport à ces trois plans proposés. Que IH soit perpendiculaire au plan AOB, & HG à la droite OA; & nommant les ligges OG $= g$, & HI $= h$, la droite f sera la distance du point I au plan BOC, g celle au plan AOC, & h celle au plan AOB. Qu'on considere un élément quelconque du corps en Z, dont la masse soit $= dM$, la masse entiere étant $=$ M, & tirant pareillement la droite ZY perpendiculaire au plan AOB, & YX à la droite OA, soient OX $= x$, XY $= y$ & YZ $= z$. De là le moment du corps par rapport au plan BOC sera $\int x\, dM = Mf$, par rapport au plan

plan AOC $= \int y\,dM = Mg$, & par rapport au plan AOB $= \int z\,dM = Mh$: d'où trouvant les trois lignes f, g, h, le lieu du point T ſera déterminé.

XIV. Il y a donc certainement dans chaque corps un point I, qui a la propriété preſcrite par rapport aux trois plans perpendiculaires entr'eux; & partant il faut prouver, que la même propriété convient au point I par rapport à tout autre plan. Or il ſuffit de le prouver à l'égard d'un plan quelconque, qui paſſe par le point O. Car, après avoir démontré cette propriété à l'égard de tous les plans qui paſſent par le point O, puiſqu'elle a lieu auſſi pour tous les plans qui leur ſont paralleles, elle ſera vraye pour tous les plans poſſibles.

XV. Conſidérons donc un plan quelconque qui paſſe par le point O, & qui coupe le plan AOB par la droite OS, faiſant avec OA l'angle AOS $= \zeta$, & que ce plan ſoit incliné au plan AOB vers B de l'angle $= \eta$. Il s'agit donc de trouver la diſtance du point Z à ce nouveau plan. Pour cet effet, ayant tiré YP à OS, perpendiculaire, on aura $OP = x\cos\zeta + y\sin\zeta$ & $YP = y\cos\zeta - x\sin\zeta$. Que ce nouveau plan coupe la droite YZ au point Q, & QP étant perpendiculaire à OP, l'angle YPQ ſera la meſure de l'inclinaiſon, & partant YPQ $= \eta$. Donc $YQ = (y\cos\zeta - x\sin\zeta)\tang\eta$, & de là $QZ = z - (y\cos\zeta - x\sin\zeta)\tang\eta$. Maintenant, tirant ZR perpendiculaire à PQR, elle ſera perpendiculaire au plan propoſé; & à cauſe de l'angle $ZQR = 90° - \eta$, on aura $ZR = QZ.\sin ZQR = z\cos\eta - y\cos\zeta\sin\eta + x\sin\zeta\sin\eta$.

XVI. Or cette ligne ZR exprimant la diſtance du point Z au plan propoſé, le moment du corps par rapport à ce plan, à cauſe des angles ζ & η conſtans, ſera

$$\cos\eta.\int z\,dM - \cos\zeta\sin\eta\int y\,dM + \sin\zeta\sin\eta\int x\,dM$$

& puiſque $\int x\,dM = Mf$, $\int y\,dM = Mg$, $\int z\,dM = Mh$, ce moment s'exprimera en ſorte

$$Mh\cos\eta - Mg\cos\zeta\sin\eta + Mf\sin\zeta\sin\eta.$$

Mais, ſi nous menons du point I une perpendiculaire au plan propoſé OPQ, nous la trouverons par un ſemblable raiſonnement en employant les lettres f, g, h, au lieu de x, y, z, exprimée en ſorte

$$h \cos\eta - g \cos\zeta \sin\eta + f \sin\zeta \sin\eta$$

laquelle étant multipliée par la maſſe du corps M, donne un produit égal au moment du corps par rapport au plan propoſé OPQ.

XVII. Voilà donc cette vérité rigoureuſement démontrée; qu'il y a dans chaque corps un point de telle nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque eſt toujours égal au produit de la maſſe du corps par la diſtance dudit point au même plan. Donc, pour trouver un tel moment, on peut toujours conſidérer toute la maſſe du corps comme réunie dans le centre d'inertie, puiſqu' alors la maſſe multipliée par la diſtance de ce point au plan donne le moment du corps par rapport à ce plan. Comme la connoiſſance de ces momens eſt d'un très grand uſage dans la Mécanique, il eſt de la derniere importance de connoitre ce centre d'inertie de tous les corps, dont on veut rechercher les mouvemens; & c'eſt un article très eſſentiel qui appartient à la connoiſſance mécanique des corps.

XVIII. Si le plan auquel on veut rapporter le corps, paſſe par ſon centre d'inertie, le moment du corps par rapport à ce plan eſt $= o$. Ou bien le corps en eſt partagé en deux parties, dont les momens par rapport à ce plan ſont égaux. Donc, ſi l'on fait paſſer les trois plans AOB, AOC, BOC, que j'ai employés ci-deſſus pour cette recherche, par le centre d'inertie même du corps, de ſorte que ce centre ſe trouve au point O, les trois coordonnées $OX = x$. $XY = y$, $YZ = z$, qui déterminent le lieu de chaque élément du corps dM ſuppoſé en Z, ont cette propriété très remarquable, que

$$\int x\,dM = o; \qquad \int y\,dM = o, \qquad \int z\,dM = o.$$

C'eſt à dire, la ſomme de tous les produits de chaque élément du corps par chacune de ſes trois coordonnées ſe réduit à rien; ou bien, chacu-

chacune de ces trois ſommes contient autant de produits négatifs que d'affirmatifs. D'où l'on voit que le centre d'inertie ſe trouve au dedans du corps, qu'on peut nommer *le milieu mécanique du corps.*

XIX. C'eſt une verité auſſi importante que remarquable, qu'il y a dans chaque corps un tel point, que je nomme ſon centre d'inertie, & qui eſt d'ailleurs connu ſous le nom de ſon centre de gravité. Mais, puisqu'il lui eſt également eſſentiel, quand même il n'y auroit point de gravité, & qu'il dépend uniquement de ſon inertie, cette raiſon étoit ſuffiſante pour en changer le nom. L'idée des momens auxquels le centre d'inertie ſe rapporte, a auſſi quelque choſe de ſingulier; puisqu'en conſidérant les maſſes mêmes, il n'eſt pas poſſible d'aſſigner dans tous les corps un tel point, par lequel tous les plans tirés les partageroient en deux parties égales. Car, quoique trois plans, dont chacun diviſe le corps en deux parties égales, ſe croiſent dans un point, il ne s'enſuit pas que d'autres plans, qu'on feroit paſſer par le même point, diviſeroient auſſi le corps en deux parties égales, comme nous avons vu que cela arrive à l'égard des moments.

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à une ligne.

XX. Tant que le mouvement d'un corps eſt progreſſif, ou que tous ſes élémens ſe meuvent à chaque inſtant avec des viteſſes égales ſelon la même direction, il n'y a que le centre d'inertie avec la maſſe du corps, qui entre dans la détermination de ſon mouvement, de quelque façon que la matiere ſoit diſtribuée par l'étendue du corps. Mais, quand le corps ſe meut en tournant autour d'un certain axe, il ne ſuffit pas qu'on ſache ſon centre d'inertie; il y a encore une rélation tout à fait particuliere dont la détermination du mouvement dépend. C'eſt ce que je nomme *le moment d'inertie du corps*, par rapport à l'axe, autour duquel le corps tourne, & qui eſt la ſomme de tous les produits qui réſultent en multipliant la maſſe de chaque élément du corps par le quarré de ſa diſtance à cet axe, ou bien à une ligne droite quelconque, qu'on regarde comme l'axe autour duquel le corps tourne.

XXI. Puisque chacun de ces produits élémentaires renferme le quarré d'une ligne, aucun ne sauroit jamais devenir négatif : & partant le moment d'inertie d'un corps par rapport à une ligne est toujours positif, & d'autant plus grand que la masse du corps est grande, & que ses parties sont éloignées de cette ligne. Il est donc nécessaire de connoitre tous les momens d'inertie d'un corps par rapport à toutes les lignes droites, autour desquelles il pourroit tourner : & partant on demande une méthode, par laquelle on puisse aisément trouver tous ces momens. Or, quoique le nombre de ces lignes soit infini, je ferai premierement voir, qu'il suffit d'avoir trouvé ces momens d'inertie par rapport aux lignes droites qui passent par le centre d'inertie du corps ; ensuite, je montrerai qu'il suffit de connoitre seulement trois momens d'inertie par rapport à trois certaines lignes qui passent par son centre d'inertie, & que de ceux-ci il est ensuite fort aisé de conclure les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes possibles, quelque position qu'elles ayent à l'égard du corps.

Fig. 3. XXII. Je dis donc premierement, que connoissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe ID, qui passe par son centre d'inertie I, il est aisé d'en trouver le moment d'inertie du même corps par rapport à une autre ligne droite OT, parallele à l'axe ID. Car, soit un élément du corps, dont la masse $= dM$ en Z, d'où l'on tire au plan IDOT la perpendiculaire ZY; & de Y la droite YXV, perpendiculaire aux lignes ID & OT. Qu'on nomme $IX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, & puisque I est le centre d'inertie du corps, on aura, par ce que je viens de démontrer, $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, & $\int z\,dM = 0$. Or la droite $XZ = \sqrt{(yy + zz)}$ marquant la distance de l'élément du corps dM en Z à l'axe ID, le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe sera $= \int dM\,(yy + zz)$, en étendant cette intégrale par toute la masse du corps. Donc, la valeur de cette intégrale $\int dM\,(yy + zz)$ est supposée être connue.

XXIII. Soit maintenant la distance entre les deux lignes paralleles ID & OD, savoir l'intervalle $IO = XV = e$, & on aura la distance

ce de l'élément du corps dM en Z à la ligne droite OT, qui ſera $ZV = V((e+y)^2 + zz)$, à cauſe de $VY = e+y$. Donc, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT devient $= \int dM((e+y)^2 + zz) = \int dM(ee + 2ey + yy + zz) = \int eedM + 2e\int ydM + \int dM(yy + zz)$. Or, poſant la maſſe entiere du corps $= M$, on aura $\int eedM = Mee$, & à cauſe de $\int ydM = 0$, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT étant $= Mee + \int dM(yy + zz)$, ſurpaſſe toujours le moment d'inertie par rapport à l'axe ID; & l'excès eſt égal au produit de la maſſe du corps M par le quarré ee de la diſtance entre les lignes ID & OT.

XXIV. De là on voit que ſi l'on conſidere les momens d'inertie d'un corps par rapport à une infinité de lignes, qui ſont toutes paralleles entr'elles, le plus petit de tous ces momens ſera toujours celui, qui répond à la ligne qui paſſe par le centre d'inertie du corps: ce qui eſt une proprieté bien remarquable de ce point. La recherche des momens d'inertie d'un corps ſe reduit donc aux ſeules lignes qui paſſent par ſon centre d'inertie, de ſorte qu'ayant trouvé tous ces momens d'inertie, on en peut déduire aiſément les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes poſſibles. Car, quelque ligne qui puiſſe être propoſée, on n'a qu'à lui tirer une parallele par le centre d'inertie, dont l'intervalle ſoit $= e$. Qu'on prenne enſuite le moment d'inertie par rapport à cette ligne tirée par le centre d'inertie, & qu'on y ajoute le produit Mee, pour avoir le moment d'inertie par rapport à la ligne propoſée.

XXV. Mais la recherche des momens d'inertie par rapport à toutes les droites qui paſſent par le centre d'inertie du corps, demanderoit encore un travail infini, s'il n'y avoit point quelque rapport entr'eux, de ſorte qu'en connoiſſant quelques uns, on en puiſſe déterminer les autres. Pour découvrir un tel rapport, conſidérons la choſe en général, & ſuppoſons que nous connoiſſons les momens d'inertie d'un corps par rapport à trois axes IA, IB, IC, qui ſe croiſent perpendiculairement entr'eux au centre d'inertie du corps I. Enſuite, Fig. 4.

voyons ce qu'il faudroit connoitre au delà pour déterminer le moment d'inertie du même corps par rapport à tout autre axe IF, qui paſſe auſſi par le centre l'inertie I. Pour cet effet, ſoit un élément quelconque du corps, dont la maſſe $= dM$ en Z, d'où l'on tire au plan AIB la perpendiculaire ZY, & de Y à l'axe IA la perpendiculaire YX. Alors, nommant les coordonnées $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, je ſuppoſe qu'on connoiſſe à chaque point déterminé par ces coordonnées l'élément de maſſe dM qui s'y trouve.

XXVI. De là il eſt évident, que le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe IA ſera $= \int dM\,(yy + zz)$ par rapport à l'axe IB $= \int dM(xx + zz)$, & par rapport à l'axe IC $= \int dM\,(xx + yy)$. Donc, poſant les intégrales ſuivantes étendues par toute la ſubſtance du corps,

$$\int x\,x\,dM = A, \quad \int y\,y\,dM = B, \quad \int z\,z\,dM = C$$

les momens d'inertie ſeront déterminés enſorte :

Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IA = B + C$

Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IB = A + C$

Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IC = A + B$

d'où nous connoiſſons d'abord cette belle propriété, que chacun de ces trois momens d'inertie eſt plus petit que la ſomme des deux autres, puisque les quantités A, B, C, ſont néceſſairement poſitives.

XXVII. Pour la poſition d'un autre axe quelconque IF, qui paſſe auſſi par le centre d'inertie I, qu'on conçoive un plan perpendiculaire au plan ABC, dans lequel ſe trouve cet axe IF, l'interſection avec le plan ABC étant la droite IE, & ſoient les angles $AIE = \eta$, $EIF = \theta$. Qu'on mene de Y à la droite IE la perpendiculaire YP, & on aura $IP = x \cos\eta + y \sin\eta$, & $PY = y \cos\eta - x \sin\eta$ Qu'on tire de P la droite PK parallele & égale à $YZ = z$, laquelle ſe trouvera dans le plan EIF, & coupera la droite IF quelquepart en Q, de ſorte que

PQ

$$PQ = IP.\ \text{tang}\,\theta = (x\cos\eta + y\sin\eta)\,\text{tang}\,\theta \quad \&$$
$$IQ = IP:\ \cos\theta = (x\cos\eta + y\sin\eta):\ \cos\theta$$

donc $QR = z - (x\cos\eta + y\sin\eta)\,\text{tang}\,\theta.$

Baiſſons enfin de R ſur IF la perpendiculaire RS, & puisque l'angle $QRS = FIE = \theta$, nous aurons,

$$RS = QR\cos\theta = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta, \quad \&$$
$$QS = QR\sin\theta = z\sin\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta^2 : \cos\theta.$$

Ajoûtons $y\ IQ = (x\cos\eta + y\sin\eta) :\ \cos\theta$, & à cauſe de $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta^2}{\cos\theta} = \cos\theta$, nous obtiendrons :

$$IS = z\sin\theta + (x\cos\eta - y\sin\eta)\cos\theta.$$

XXVIII. Maintenant ces trois lignes

$$IS = z\sin\theta + (x\cos\eta + y\sin\eta)\cos\theta$$
$$SR = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta$$
$$RZ = PY = y\cos\eta - x\sin\eta$$

étant perpendiculaires entr'elles, & paralleles à des directions fixes, dont l'une eſt le nouvel axe IF, une autre perpendiculaire à IE dans le plan AIB, & la troiſième perpendiculaire aux deux autres, & partant auſſi donnée; on les peut regarder comme trois autres coordonnées paralleles à trois autres axes perpendiculaires entr'eux. De là la droite ZS exprimant la diſtance du point Z à l'axe IF, le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe ſera

$$\int dM(RZ^2 + SR^2) = \int dM((y\cos\eta - x\sin\eta)^2 + (z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta)^2)$$

qui ſe reduit à cette forme

$$\int dM\left\{\begin{array}{l} +xx\sin\eta^2 + yy\cos\eta^2 + zz\cos\theta^2 - 2xy\sin\eta\cos\eta - 2xz\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2yz\sin\eta\sin\theta\cos\theta \\ +xx\cos\eta^2\sin\theta^2 + yy\sin\eta^2\sin\theta^2 \quad + 2xy\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2 \end{array}\right\}$$

XXIX.

XXIX. Ayant ſuppoſé $\int x x dM = A$, $\int y y dM = B$, $\int z z dM = C$, ſi nous ſuppoſons de plus les intégrales ſuivantes priſes par toute l'étendue du corps: $\int y z dM = D$; $\int x z dM = E$; $\int x y dM = F$ le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe IF ſera

$$A(\sin\eta^2+c\sin\eta^2\sin\theta^2)+B(c\sin\eta^2+\sin\eta^2\sin\theta^2)-Cc\sin\theta^2-2D\sin\eta\sin\theta c\sin\theta-2Ec\sin\eta\sin\theta c\sin\theta-2F\sin\eta c\sin\eta c\sin\theta^2$$

Donc, ſi nous ſavions, outre les moments d'inertie par rapport aux axes IA, IB, IC, encore les valeurs des intégrales D, E, F, nous ſerions en état d'aſſigner le moment d'inertie du corps par rapport à tout autre axe IF tiré par le centre d'inertie, & partant auſſi par rapport à toutes les lignes droites.

XXX. Mais, pour rendre cette méthode encore plus ſimple, & pour éclaircir mieux la théorie des momens d'inertie, il eſt bon de conſidérer plus en détail les momens d'inertie par rapport à tous les axes tirés par le centre d'inertie. Et dabord, je remarque, puisqu' aucun de ces momens ne ſauroit devenir infini, ni évanouir, qu'il doit y avoir parmi eux tant un plus grand qu'un plus petit; & il eſt important de connoitre parmi cette infinité d'axes celui auquel répond le moment le plus grand, de même que le plus petit. Enſuite, en réfléchiſſant ſur l'uſage dans la Mécanique, on ſait que le corps ne ſauroit tourner librement, qu'autour d'un tel axe, par rapport auquel toutes les forces centrifuges des élémens du corps ſe détruiſent mutuellement. Or l'une & l'autre de ces deux conditions reviennent au même; ce qui eſt encore une très remarquable proprieté dans la théorie des momens d'inertie.

XXXI. Pour prouver cette belle harmonie, cherchons premierement quelle poſition doit avoir l'axe IF, afin que le moment d'inertie qui lui répond ſoit, ou le plus grand, ou le plus petit. Pour cet effet, on n'a qu'à différentier la formule trouvée pour le moment d'inertie par rapport à l'axe IF, en ſuppoſant les angles η & θ variables, & à egaler les différentiels à zero: Or la variabilité de l'angle η nous fournit cette équation:

$$2A(\sin\eta\cos\eta-\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2)+2B(\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2-\sin\eta\cos\eta)$$
$$-2D\cos\eta\sin\theta\cos\theta+2E\sin\eta\sin\theta\cos\theta-2F(\cos\eta^2-\sin\eta^2)\cos\theta^2=0$$

qui se réduit à cette forme:

$$A\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2-B\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2-D\cos\eta\sin\theta\cos\theta+E\sin\eta\sin\theta\cos\theta-F(\cos\eta^2-\sin\eta^2)\cos\theta^2=0$$

Mais la variabilité de l'angle θ donne cette équation

$$2A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta+2B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta-2C\sin\theta\cos\theta-2D\sin\eta(\cos\theta^2-\sin\theta^2)$$
$$-2E\cos\eta(\cos\theta^2-\sin\theta^2)+4F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta=0$$

ou bien celle-ci:

$$A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta+B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta-C\sin\theta\cos\theta-D\sin\eta(\cos\theta^2-\sin\theta^2)$$
$$-E\cos\eta(\cos\theta^2-\sin\theta^2)+2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta=0$$

De ces deux équations on déterminera les deux angles η & θ, & partant la position de l'axe IF, par rapport auquel le moment d'inertie est, ou le plus grand, ou le plus petit.

XXXII. Voyons maintenant, aussi quelle doit être la position de l'axe IF, afin que le corps puisse tourner librement autour de lui, ou que les forces centrifuges des élémens du corps se détruisent mutuellement. On sait que la force centrifuge de l'élément dM en Z est proportionnelle au produit de sa masse dM par la distance ZS de l'axe IF, ou bien à ZS. dM, & qu'elle agit selon la direction SZ. Décomposons cette force selon les directions SR, & RZ. & nous aurons la force selon SR $=$ SR. dM, & selon RZ $=$ RZ. dM. Ces deux forces étant en deux plans fixes, il faut que les unes & les autres se détruisent séparément, & non seulement les forces mêmes, mais aussi leurs moments. Or, puisque $SR=z\cos\theta-(x\cos\eta+y\sin\eta)\sin\theta$ & $RZ=PY=y\cos\eta-x\sin\eta$, il est évident qu'il y aura, tant $\int SR.\,dM=0$, que $\int RZ.\,dM=0$ puisque nous avons déjà, par la condition du centre d'inertie I, $\int x\,dM=0$, $\int y\,dM=0$, $\int z\,dM=0$.

XXXIII. Il reſte donc que les momens auſſi de ces doubles forces ſe détruiſent mutuellement. Rapportons ces momens au point fixe I, ou multiplions les forces trouvées & appliquées au point S par la diſtance $IS = z\sin\theta + (x\cos\eta + y\sin\eta)\cos\theta$, & il faudra qu'il provienne tant $\int SR.IS.dM = o$ que $\int R'Z.IS.dM = o$. Voilà donc deux équations pour la détermination de l'axe IF, qui, en ſubſtituant les valeurs aſſignées, ſeront

$$\int dM\left\{\begin{array}{l} zz\sin\theta\cos\theta - xx\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - yy\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta + xz\cos\eta\cos\theta^2 + yz\sin\eta\cos\theta^2 - 2xy\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta \\ \qquad - xz\cos\eta\sin\theta^2 - yz\sin\eta\sin\theta^2 \end{array}\right\} = o$$

&

$$\int dM\left\{\begin{array}{l} -xx\sin\eta\cos\eta\cos\theta + yy\sin\eta\cos\eta\cos\theta - xz\sin\eta\sin\theta + yz\cos\eta\sin\theta + xy\cos\eta^2\cos\theta \\ \qquad - xy\sin\eta^2\cos\theta \end{array}\right\} = o$$

Il faut étendre ces deux intégrales par toute la ſubſtance du corps pour avoir deux équations finies, d'où l'on puiſſe déterminer les deux angles η & θ.

XXXIV. Puiſque les angles η & θ ſont conſtans, nous n'avons qu'à mettre pour les formules intégrales $\int xx\,dM$, $\int yy\,dM$, &c. les valeurs ſuppoſés, & nous obtiendrons ces deux équations finies:

$$-A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta + C\sin\theta\cos\theta$$
$$+D\sin\eta(\cos\theta^2-\sin\theta^2)+E\cos\eta(\cos\theta^2-\sin\theta^2)-2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = o$$
$$-A\sin\eta\cos\eta\cos\theta + B\sin\eta\cos\eta\cos\theta + D\cos\eta\sin\theta - E\sin\eta\sin\theta + F(\cos\eta^2-\sin\eta^2)\cos\theta = o,$$

leſquelles conviennent parfaitement avec les deux équations trouvées ci-deſſus. Donc les axes, autour desquels un corps peut tourner librement, ont en même tems cette belle propriété que, par rapport à eux, le moment d'inertie du corps eſt, ou un plus grand, ou un plus petit. Il eſt donc de la derniere importance de connoitre ces axes dans chaque corps; & je les diſtinguerai des autres par le titre d'*axes principaux du corps.*

XXXV.

XXXV. Les axes principaux d'un corps ſont donc de certaines lignes droites, qui paſſent par le centre d'inertie du corps, autour desquelles le corps peut tourner librement, de ſorte que les forces centrifuges des élémens du corps ſe détruiſent mutuellement; & qui ont encore en même tems cette belle propriété, que les momens d'inertie par rapport à ces axes ſont, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Par cette derniere propriété on comprend qu'il y a dans chaque corps au moins deux axes principaux; car, puisque de tous les momens d'inertie rapportés à des axes qui paſſent par le centre d'inertie, aucun ne ſauroit devenir, ni infini, ni évanouiſſant; il faut bien, que parmi eux il y en ait un, qui ſoit le plus grand, & un qui ſoit le plus petit. Mais on verra dans la ſuite, qu'il y a effectivement dans chaque corps trois axes principaux, qui ſe croiſent au centre d'inertie à angles droits; ce qui eſt une propriété auſſi remarquable, que celle que nous venons d'obſerver. *Les axes principaux des corps.*

XXXVI. Donc, pour trouver les axes principaux d'un corps, nous n'avons qu'à réſoudre les deux équations, auxquelles nous avons été conduits par l'une & l'autre conſidération, & à en déterminer les deux angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, en regardant les ſix intégrales comme connues:

$\int xx dM = A$; $\int yy dM = B$, $\int zz dM = C$; $\int yz dM = D$, $\int xz dM = E$, $\int xy dM = F$

Or nos deux équations à réſoudre ſont:

I. $(A-B)\sin\eta\cos\eta\cos\theta - (D\cos\eta - E\sin\eta)\sin\theta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta = 0$

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - (D\sin\eta + E\cos\eta)(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0.$

dont celle-ci, à cauſe de $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ & $\cos\theta^2 - \sin\theta^2 = \cos 2\theta$, ſe réduit à cette forme:

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin 2\theta - C\sin 2\theta - 2(D\sin + E\cos\eta)\cos 2\theta + 2F\sin\eta\cos\eta\sin 2\theta = 0$

La premiere donne d'abord la tangente de l'angle θ

$$\text{tang}\,\theta = \frac{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{D\cos\eta - E\sin\eta}$$

& la ſeconde la tangente du double angle:

$$\text{tang } 2\theta = \frac{2\,D\,\sin\eta + 2\,E\,\cos\eta}{A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2\,F\sin\eta\cos\eta}.$$

XXXVII. Or, puisque $\text{tang}\,\theta - \cot\theta + 2\cot 2\theta = 0$, nous en tirons cette équation:

$$\frac{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{D\cos\eta - E\sin\eta} - \frac{D\cos\eta + E\sin\eta}{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)} + \frac{A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2\,F\sin\eta\cos\eta}{D\sin\eta + \cos\eta} = 0$$

& joignant le premier & dernier membre enſemble, on trouve

$$\frac{(AD-CD-EF)c\eta+(DF-BE+CE)\sin\eta}{(D\cos\eta - E\sin\eta)(D\sin\eta + E\cos\eta)} - \frac{D\cos\eta + E\sin\eta}{(A-B)\sin\eta c\eta - Fc\eta^2 + F\sin\eta^2} = 0$$

& poſant $\text{tang}\,\eta = t$ il en réſulte cette équation cubique:

$$t^3(DFF-DEE+(C-B)EF) - tt(E^3 - 2DDE + EFF + (B+C-2A)DF + (A-B)(B-C)E)$$
$$- t(D^3 - 2DEE + DFF + (A+C-2B)EF + (A-B)(C-A)D) + EFF - DDE + (C-A)DF = 0$$

dont la racine donne la tangente de l'angle η. De là on trouvera auſſi l'angle θ, & partant la poſition de l'axe IF ſera déterminée.

XXXVIII. Puisque cette équation cubique:

$$+ (DFF - DEE + (C-B)EF)\,t^3$$
$$- (EFF + E^3 - 2DDE + (B+C-2A)DF + (B-A)(C-B)E)\,tt$$
$$- (DFF + D^3 - 2DEE + (A+C-2B)EF + (A-B)(C-A)D)\,t$$
$$+ EFF - DDE + (C-A)DF = 0$$

a certainement une racine réelle, on en trouve un axe principal: pour les deux autres racines, il ne paroit pas de l'équation, ſi elles ſont réelles, ou imaginaires. Mais, puisque nous ſavons déjà qu'il doit y avoir au moins deux axes principaux, cette équation aura néceſſaire-

ment

ment plus qu'une racine réelle. D'où il eſt certain que toutes les racines ſont réelles ; & puisque chacune indique un axe principal, il s'enſuit, qu'il ſe trouve dans tout corps trois axes principaux.

XXXIX. Mais, ayant trouvé un axe principal par la méthode précédente, il ſera fort aiſé de trouver les deux autres par la méthode ſuivante. Soit I A cet axe principal, qu'on aura déjà trouvé, & qu'on en prenne à volonté deux autres I B & I C, qui ſoient tant entr'eux qu'au premier I A perpendiculaires, pour y rapporter les élémens du corps par les trois coordonnées $IX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Soit encore $\int x x dM = A$, $\int y y dM = B$ & $\int z z dM = C$, où il ne faut pas confondre ces lettres avec celles, que nous avons employées dans la recherche précédente. Maintenant, puisque I A eſt un axe principal, & que les forces centrifuges ſe détruiſent mutuellement, lorsque le corps tourne autour de cet axe, il faut que les intégrales $\int y x dM$ & $\int x z dM$ évanouiſſent. Donc, dans les intégrations précédentes, nous aurons $E = 0$ & $F = 0$; mais la formule $\int y z dM = D$ pourra encore avoir une valeur finie. Fig. 4.

XL. Suppoſant donc que I A eſt un axe principal du corps, ſoit I F un autre axe principal; & poſant, pour en trouver la poſition, les angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, nous aurons par le même calcul dont nous nous ſommes ſervi ci-deſſus, à cauſe de $E = 0$ & $F = 0$, ces équations :

I. $(A - B) \sin\eta \cos\eta \cos\theta - D \cos\eta \sin\theta = 0$

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0$

dont la premiere donne, ou $\cos\eta = 0$, ou $\text{tang}\,\theta = \frac{(A-B)\sin\eta}{D}$.

Or cette derniere valeur étant ſubſtituée dans l'autre équation, en produit une, qui étant diviſible par $D \sin\eta$ donne $(A-B)(A-C) - DD = 0$ qui ne détermine rien. Il faut donc qu'il ſoit, ou $\sin\eta = 0$ ou $\cos\eta = 0$. Mais la valeur $\sin\eta = 0$ donne auſſi $\text{tang}\,\theta = 0$;

ce qui conduit au même axe IA déjà connue. Il ne reſte donc que la valeur $\cos\eta = 0$, d'où l'angle AIE devient droit.

XLI. Il eſt donc clair que, pour que l'axe IF ſoit auſſi principal, l'angle AIE doit être droit, ou $\eta = 90°$; ce qui montre, que l'autre axe principal IF eſt perpendiculaire à l'axe connu IA. Or, poſant $\eta = 90°$, l'autre équation qui devient $(B-C)\sin\theta\cos\theta - D(\cos\theta - \sin\theta^2) = 0$ donne $\text{tang } 2\theta = \frac{2D}{B-C}$. Cette équation fournit une double valeur pour l'angle θ; car, ſi l'une eſt $\theta = \zeta$, l'autre ſera $\theta = \zeta + 90°$: de ſorte que voilà en tout trois axes principaux qui ſont perpendiculaires entr'eux. C'eſt bien un paradoxe, puisque la condition du plus grand & plus petit ſemble ne devoir donner que deux axes principaux, à l'un desquels réponde le plus grand, & à l'autre le plus petit moment d'inertie. Mais on ſait que la méthode des plus grands & plus petits donne ſouvent auſſi des cas, qui ne ſont, ni l'un, ni l'autre; pourvu que les changemens élémentaires y évanouiſſent; & c'eſt ici préciſément le cas.

XLII. Voilà donc une vérité bien importante, qui eſt, que dans chaque corps il y a trois axes principaux, qui ſe croiſent à angles droits dans le centre d'inertie. Ces axes principaux ont une double propriété fort remarquable; l'une, que le corps peut tourner librement autour de chacun d'eux; l'autre, que des momens d'inertie par rapport à ces trois axes, un eſt le plus grand, un autre le plus petit de tous les poſſibles, & le troiſième tient un tel milieu entre les deux autres, que, quoiqu'on change l'axe infiniment peu, le changement qui en réſulte dans le moment d'inertie, évanouïſſe. Cependant il peut arriver que deux axes deviennent indefinis, auquel cas tous les axes ſitués dans leur plan peuvent être également cenſés principaux; comme ſi dans la formule $\text{tang } 2\theta = \frac{2D}{B-C}$, devenoit & $D = 0$ & $B = C$. Car alors l'angle θ pourroit être pris à volonté. Il peut même auſſi arriver que toutes les lignes tirées par le centre d'inertie acquier-

acquierrent la propriété des axes principaux, comme dans un globe homogene.

XLIII. Ayant expliqué la méthode de déterminer les trois axes principaux de chaque corps, on les peut regarder comme connus dans la Mécanique, de même que les momens d'inertie par rapport à ces axes, que je nommerai *les trois momens principaux d'un corps.* Et alors on ſera en état d'entreprendre les plus profondes recherches, dont on ne ſauroit ſurmonter les obſtacles ſans ce ſecours. Puisque les trois axes principaux ſont perpendiculaires entr'eux, il ſera bon de les employer au lieu des trois directrices, auxquelles on rapporte les élémens du corps par le moyen de trois coordonnées qui leur ſont paralleles. Soient donc pour un corps quelconque les droites IA, IB & IC, ſes trois axes principaux, auxquels ſoient paralleles les coordonnées $IX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, qui déterminent la poſition de l'élément dM ſitué en Z; & on pourra regarder cet élément comme connu à l'égard des trois coordonnées x, y, z, auxquelles il eſt rapporté. *Les trois momens d'inertie principaux.*

XLIV. Puisque les lignes IA, IB, IC, ſont les axes principaux du corps, les intégrales $\int yz\,dM$, $\int xz\,dM$, $\int xy\,dM$ évanouïſſent, ou l'on aura dans les formules ſupérieures $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, de ſorte que les trois autres $\int xx\,dM = A$, $\int yy\,dM = B$, & $\int zz\,dM = C$ demeurent ſeulement dans le calcul. Or, poſant la maſſe du corps $= M$, ſoient ſes momens d'inertie principaux par rapport à l'axe $IA = Maa$, à l'axe $IB = Mbb$, & à l'axe $IC = Mcc$; & on aura par les intégrales

$$Maa = B + C; \quad Mbb = A + C; \quad Mcc = A - B$$

& partant réciproquement :

$$A = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa), \quad B = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb); \quad C = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)$$

De

De là le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque I F déterminé par les angles $AIS = \eta$ & $EIF = \theta$ ſera par le §. 29.

$$\tfrac{1}{2}M(bb+cc-aa)(\sin\eta^2+\cos\eta^2\sin\theta^2)+\tfrac{1}{2}M(aa+cc-bb)(\cos\eta^2+\sin\eta^2\sin\theta^2)$$
$$+\tfrac{1}{2}M(aa+bb-cc)\cos\theta^2$$

qui ſe réduit à cette forme plus ſimple,

$$Maa\cos\eta^2\cos\theta^2+Mbb\sin\eta^2\cos\theta^2+Mcc\sin\theta^2$$

XLV. Ayant donc trouvé les trois momens d'inertie principaux Maa, Mbb, & Mcc, d'un corps, il eſt fort aiſé d'en déterminer le moment d'inertie par rapport à tout autre axe quelconque IF, tiré par le centre d'inertie. Et pour rendre cette détermination plus évidente, j'obſerve que $\cos\eta\cos\theta$ exprime le coſinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IA. De même $\sin\eta\cos\theta$ exprime le coſinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IB; & $\sin\theta$ le coſinus de l'angle que fait l'axe IF avec le principal IC. Donc, ſi nous poſons les angles $AIF = \alpha$; $BIF = \xi$: $CIF = \gamma$, que fait l'axe IF avec les trois axes principaux IA, IB, IC par rapport auxquels les momens d'inertie ſont ſuppoſés Maa, Mbb, Mcc, le moment d'inertie par rapport à l'axe IF eſt $= Maa\cos\alpha^2+Mbb\cos\xi^2+Mcc\cos\gamma^2$. Où il faut remarquer que $\cos\alpha^2+\cos\xi^2+\cos\gamma^2 = 1$, puisque $\cos\alpha = \cos\eta\cos\theta$, $\cos\xi = \sin\eta\cos\theta$ & $\cos\gamma = \sin\theta$. Donc, ſi Maa eſt le plus grand, Mcc le plus petit, & Mbb le moyen moment principal; le moment d'inertie par rapport à l'axe IF ſera $= Maa-M(aa-bb)\cos\xi^2-M(aa-cc)\cos\gamma^2$, & partant moindre que Maa, ou $= Mcc+M(aa-cc)\cos\alpha^2+M(aa-bb)\cos\xi^2$, & partant plus grand que Mcc.

XLVI. Enſuite, on peut auſſi voir combien il s'eſt faut, qu'un axe quelconque I F n'ait la propriété d'un axe principal. Car, pour qu'il fût tel, il faudroit qu'il fût tant $\int S\,R.\ IS.\ dM = 0$, que $\int R\,Z.\ IS.\ dM = 0$. Or, à cauſe de $D = 0$. $E = 0$. $F = 0$, nous avons par le §. XXXIV.

$\int S\,R.$

$\int SR.\ IS.\ dM = (C - A\cos\eta^2 - B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta$ &

$\int RZ.\ IS.\ dM = (B - A)\sin\eta\cos\eta\cos\theta,$

& ſubſtituant pour A, B, C, les valeurs des momens principaux,

$$\int SR.IS.\,dM = M(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2 - cc)\sin\theta\cos\theta = M((aa-cc)\cos\alpha^2 + (bb-cc)\cos\beta^2)\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\int RZ.\ IS.\ dM = M(aa-bb)\sin\eta\cos\eta\cos\theta = M(aa-bb)\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}$$

D'où l'on voit, que, ſi les trois momens principaux ſont égaux entr'eux, ou $aa = bb = cc$, toutes les lignes IF auront la propriété des axes principaux. Mais, s'ils ſont inégaux entr'eux, il n'y a que les trois axes principaux IA, IB & IC.

XLVII. Si deux momens principaux ſont égaux entr'eux, ſavoir $Mbb = Maa$, l'axe IF aura la propriété d'un axe principal, pourvu qu'il y ait $\cos\gamma = 0$ ou $\theta = 0$. Dans le cas donc que les momens d'inertie des deux axes principaux IA & IB ſont égaux entr'eux, toute ligne IE tirée du centre d'inertie I dans le plan AIB aura la propriété d'un axe principal; & à cauſe de $\cos\gamma = 0$ & $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$, le moment d'inertie par rapport à toutes les lignes IE ſera $= Maa = Mbb$. Il en eſt de même ſi deux autres momens d'inertie principaux ſont égaux entr'eux; & toute autre ligne tirée de I dans le plan de ces deux axes principaux aura le même moment d'inertie, & la propriété d'un axe principal. Il y a donc dans ces cas une infinité d'axes principaux. Or, dans le cas où tous les trois moments d'inertie principaux ſont égaux entr'eux, toutes les lignes tirées du centre d'inertie ſeront des axes principaux.

DU MOUVEMENT DE ROTATION DES CORPS SOLIDES AUTOUR D'UN AXE VARIABLE.

PAR M. EULER.

I.

Table II. Le ſujet que je me propoſe de traiter ici, eſt de la derniere importance dans la Mécanique; & j'ai déjà fait pluſieurs efforts pour le mettre dans tout ſon jour. Mais, quoique le calcul ait aſſés bien réuſſi, & que j'aye découvert des formules analytiques qui déterminent tous les changemens dont le mouvement d'un corps autour d'un axe variable eſt ſusceptible, leur application étoit pourtant aſſujettie à des difficultés qui m'ont paru preſque tout à fait inſurmontables. Or, depuis que j'ai dévelopé les principes de la connoiſſance mécanique des corps, la belle propriété des trois axes principaux dont chaque corps eſt doué, m'a enfin mis en état de vaincre toutes ces difficultés, & d'établir les regles ſur lesquelles eſt fondé le mouvement de rotation autour d'un axe variable, en ſorte qu'on en peut faire aiſément l'application à tous les cas propoſés.

II. Or, d'abord il faut ſe rappeller, que quel que ſoit le mouvement d'un corps ſolide, on le peut toujours décompoſer en deux, dont l'un eſt le mouvement progreſſif, ou celui de ſon centre d'inertie, & l'autre eſt le mouvement de rotation qui reſteroit au corps, ſi on lui ôtoit le mouvement progreſſif, en ſuppoſant que l'eſpace fut transporté à chaque inſtant d'un mouvement égal & contraire. Il eſt démontré dans la Mécanique, que chacun de ces deux mouvemens ſuit

des

des regles particulieres, & qu'on peut déterminer chacun à part, ſans avoir égard à l'autre. Ainſi, pour déterminer le mouvement progreſſif, on conçoit la maſſe entiere du corps comme réunie dans ſon centre d'inertie, & on cherche l'effet des forces qui y agiſſent, conformément aux premiers principes de la Mécanique, ſans ſe mettre en peine ſi le corps a outre cela un mouvement de rotation, ou non? Et quand il s'agit du mouvement de rotation, il eſt permis de faire abſtraction du mouvement progreſſif. C'eſt la grande propriété du centre d'inertie, qui nous procure cette commodité dans les recherches mécaniques.

III. Je m'arrêterai ici uniquement au mouvement de rotation, & partant je conſidérerai le centre d'inertie du corps comme fixe. Alors il eſt aiſé de voir, que, quel que ſoit le mouvement du corps, il s'y trouvera à chaque inſtant une ligne droite, qui paſſe par le centre d'inertie, où le mouvement évanouït, & autour de laquelle le corps tourne à cet inſtant; c'eſt cette ligne qui eſt nommée l'axe de rotation. Donc, pour avoir une connoiſſance parfaite d'un tel mouvement, il faut qu'on puiſſe aſſigner pour chaque inſtant, tant l'axe de rotation autour duquel le corps tourne alors, que la viteſſe avec laquelle il tourne. Par conſéquent un tel mouvement eſt ſuſceptible d'un double changement, l'un dans la viteſſe de rotation, & l'autre dans la poſition de l'axe même de rotation. C'eſt donc auſſi à ce double changement que ſe réduit l'effet de toutes les forces, qui agiſſent ſur le corps. Lorsque l'axe de rotation demeure invariable, de ſorte que les forces exercent leur effet ſeulement ſur la viteſſe de rotation, les regles ſont déjà aſſez connues pour déterminer ce mouvement. Mais il n'en eſt pas de même à l'égard de la variabilité de l'axe de rotation.

IV. Tout revient donc à découvrir des regles, moyennant leſquelles on puiſſe aſſigner ces deux changemens pour un tems infiniment petit, le corps ayant un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque, & étant ſollicité par des forces quelconques. La recherche & l'explication de ces régles fera donc le ſujet de ce Mémoire. Or le plus ſûr

moyen de trouver ces régles eſt de regarder l'un & l'autre de ces deux changemens comme connu, & de chercher les forces requiſes pour les produire. Car, ayant réſolu cette queſtion en général, il ſera aiſé de renverſer la concluſion, & d'aſſigner les changemens que des forces données doivent produire. Voilà donc le plan de la méthode que je ſuivrai pour arriver au but propoſé; où il eſt clair, que tous les raiſonnemens ſeront tirés des premiers principes de la Mécanique, qui déterminent les accélérations élémentaires que des forces quelconques doivent produire dans les élémens de la matiere, dont le corps eſt compoſé.

Fig. 1. V. Soit donc propoſé un corps quelconque, dont la maſſe $= M$, & ſon centre d'inertie en I, que je conſidere comme fixe. Que ce corps tourne à l'inſtant préſent autour d'un axe de rotation quelconque IO, paſſant par ſon centre d'inertie I; & que la viteſſe angulaire ſoit $= \omega$, de ſorte que ω marque l'angle décrit par cette viteſſe dans le tems d'une ſeconde, le ſinus total étant exprimé par l'unité. De là on connoitra aiſément la vraye viteſſe de chaque élément du corps. Car, poſant ſa diſtance à l'axe de rotation $= r$, l'expreſſion ωr donnera l'eſpace décrit par cette viteſſe dans une ſeconde, puiſque ω marque un nombre abſolu. Mais, pour ramener ce mouvement aux principes de Mécanique, il faut le rapporter à des directions fixes indépendantes du corps; qui ſoient les droites IA, IB, IC, perpendiculaires entr'elles au centre d'inertie I, & que le mouvement de rotation ſe faſſe dans le ſens ABC. Pour rapporter l'axe de rotation IO à ces directions fixes, poſons les angles dont il y eſt incliné,

$$AIO = \alpha, \quad BIO = \beta, \quad CIO = \gamma$$

& puiſque les angles AIB, AIC, BIC ſont droits, on aura:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

VI. Suppoſons de plus que ce mouvement ne ſoit pas uniforme, & que l'axe de rotation IO ne demeure pas le même, mais qu'après le tems infiniment petit dt, la viteſſe angulaire ω acquierre un accroiſſement

ment $= d\varpi$; & que la ſituation de l'axe de rotation IO change en ſorte que les angles α, β, γ, ſoient augmentés de leurs différentiels $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, qui auront pourtant un tel rapport entr'eux qu'il devienne $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\beta \sin\beta \cos\beta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0$. Il faut remarquer que dt ſignifie l'élément du tems t écoulé jusqu'à preſent; & j'arrangerai le calcul en ſorte que le tems t ſoit exprimé en ſecondes, & partant par un nombre abſolu. Voilà donc non ſeulement l'état du mouvement, où je ſuppoſe que le corps ſe trouve actuellement, qui eſt renfermé dans les quantités α, β, γ, & ϖ; mais je tiendrai auſſi compte de la variabilité de ces quantités pendant le tems infiniment petit dt, puisque les fractions $\frac{d\varpi}{dt}$ & $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ contiennent tant le changement de la viteſſe angulaire, que le changement qui ſe fait dans la poſition de l'axe de rotation.

VII. Ayant établi ces changemens élémentaires, tant à l'égard de la viteſſe angulaire que de l'axe de rotation, cherchons les forces qui ſont requiſes pour produire préciſément ces mêmes changemens. Pour cet effet il faut conſidérer un élément quelconque du corps, & chercher la direction & la viteſſe dont il ſe meut à préſent: enſuite, tenant compte de la variabilité de la viteſſe & de l'axe de rotation, il ſera aiſé d'en conclurre le changement élémentaire que doit ſubir le mouvement de l'élément propoſé, tant par rapport à ſa viteſſe qu'à ſa direction. De là on connoitra les forces requiſes pour produire ce changement, & l'aſſemblage de toutes ces forces élémentaires fournira les forces finies que nous cherchons. Or, pour faciliter cette recherche, il ſera bon de décompoſer le mouvement de chaque élément du corps ſelon les trois directions fixes, IA, IB, & IC, puisqu'il eſt démontré que chacun de ces mouvemens partiaux ſuit, par rapport à l'accélération, les mêmes loix, que s'il exiſtoit tout ſeul, & qu'il ne fût pas accompagné des autres. C'eſt conformément à ce plan que je déterminerai les forces dont il eſt queſtion.

VIII. Soit donc en Z un élément quelconque du corps, dont la maſſe ſoit poſée $= dM$. Tirons du point Z au plan AIB la perpendiculaire ZY, & de Y à la directrice IA la perpendiculaire YX, pour avoir les trois coordonnées paralleles aux trois directrices fixes IA, IB, IC, que nous nommerons

$$IX = x, \quad XY = y, \quad \& \quad YZ = z.$$

Maintenant, pour connoitre le mouvement de cet élément, il faut tirer de Z à l'axe de rotation IO la perpendiculaire ZP, & alors la viteſſe du point Z ſera $= \omega . ZP$. Or, pour connoitre la direction de ce mouvement, qu'on conçoive un plan perpendiculaire à l'axe de rotation au point P, & la perpendiculaire tirée dans ce plan à la droite ZP au point Z, qui tende dans le ſens ABC, donnera la direction du mouvement. Enſuite, ce mouvement doit être décompoſé ſelon les directions Za, Zb, Zc, que je ſuppoſe paralleles aux directions fixes IA, IB, IC.

IX. Cette décompoſition du mouvement du point Z demanderoit bien des lignes à tirer, qui embrouilleroient beaucoup la figure & fatigueroient l'imagination. Pour prévenir cet inconvénient, je réduirai cette recherche à la Trigonométrie ſphérique. Soient donc dans une ſurface ſphérique, décrite autour du centre d'inertie I, les points A, B, C, les poles des directions fixes IA, IB, IC, de ſorte que les arcs de grands cercles AB, BC, CA, ſoient des quarts de cercles perpendiculaires entr'eux. Soit de plus O le point, où l'axe de rotation IO paſſe par la ſurface ſphérique; & on aura les arcs $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$. Soit outre cela Z le point où la droite IZ de la fig. 1. paſſe par la ſurface ſphérique, & poſant cette diſtance $IZ = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = s$, on aura pour les arcs de grands cercles,

Fig. 2.

$$\text{cof}\, AZ = \frac{x}{s}, \quad \text{cof}\, BZ = \frac{y}{s}; \quad \text{cof}\, CZ = \frac{z}{s}.$$

Or, puiſque dans la fig. 1. la perpendiculaire ZP eſt $= s$ ſin ZIO, & que

& que l'arc OZ fig. 2. eſt la meſure de l'angle ZIO, on aura la viteſſe du point Z = *gs* ſin OZ.

X. Tirons l'arc ZR perpendiculaire à l'arc OZ., & prenons-le égal à un quart de cercle, en ſorte qu'il tende dans le ſens ABC; & ſa tangente en Z donnera la direction du mouvement du point Z, à laquelle le rayon IR ſera parallele, quoique le centre I ne ſoit pas exprimé dans la figure. Maintenant, pour décompoſer le mouvement ſelon les directions Z*a*, Z*b*, Z*c*, fig. 1. on n'a qu'à décompoſer un mouvement qui ſe feroit dans la direction IR avec la viteſſe = *gs* ſin OZ, ſelon les trois directions IA, IB, IC, puisque ces directions ſont paralleles à celles-là. Pour cet effet, tirons les arcs de grands cercles AR, BR, CR, & par les regles de la compoſition du mouvement, nous aurons pour le point Z,

la viteſſe ſuivant la direction IA, ou Z*a* = *gs* ſin OZ. coſ AR,

la viteſſe ſuivant la direction IB, ou Z*b* = *gs* ſin OZ. coſ BR,

la viteſſe ſuivant la direction IC, ou Z*c* = *gs* ſin OZ. coſ CR.

XI. Pour exprimer analytiquement ces formules, il faut obſerver que, puisque R eſt le pole du cercle OZ, l'arc RO ſera un quart de cercle, & l'angle ROZ droit. Donc, le triangle AOR fournit cette détermination:

coſ AR = ſin AO. coſ AOR = − ſin AO. ſin AOZ,

parce que coſ AOR = coſ(360°-AOR) = coſ(ROZ+AOZ) = -ſn AOZ.

De là on aura ſin OZ. coſ AR = − ſin AO. ſin OZ. ſin AOZ.

Mais, du triangle AOZ on tire ſin OZ. ſin AOZ = ſin AZ. ſin OAZ, de ſorte que ſin OZ. coſ AR = − ſin AO. ſin AZ. ſin OAZ.

Or, ayant OAZ = BAO − BAZ, les triangles BAO, BAZ, & CAO, CAZ, où AB, AC ſont des quarts de cercles, & BAC un angle droit, donnent

coſ B

$$\text{cof BAO} = \frac{\text{cof BO}}{\text{fin AO}} = \frac{\text{cof }\beta}{\text{fin AO}}; \text{ fin BAO} = \text{cof CAO} = \frac{\text{cf CO}}{\text{fn AO}} = \frac{\text{cof }\gamma}{\text{fn AO}}$$

$$\text{cof BAZ} = \frac{\text{cof BZ}}{\text{fin AZ}} = \frac{y}{s \text{ fin AZ}}; \text{ fin BAZ} = \text{cof CAZ} = \frac{\text{cf CZ}}{\text{fn AZ}} = \frac{z}{s \text{ fn AZ}}$$

& partant $\text{fin OAZ} = \frac{y \text{ cof}\gamma - z \text{ cof}\beta}{s \text{ fin AO. fin AZ}}$: donc

$$\text{fin OZ cof AR} = \frac{z \text{ cof}\beta - y \text{ cof}\gamma}{s}.$$

XII. Par une ſemblable réduction on trouvera

$$\text{fin OZ. cof BR} = \frac{x \text{ cof}\gamma - z \text{ cof}\alpha}{s} \text{ \& fn OZ. cof CR} = \frac{y \text{ cof}\alpha - x \text{ cf}\beta}{s},$$

& partant les trois viteſſes du point Z ſelon les directions Z a, Z b, Z c, ſeront exprimées de la ſorte.

Fig. 1. La viteſſe ſuivant la direction Z $a = v\ (z \text{ cof}\beta - y \text{ cof}\gamma) = u$

La viteſſe ſuivant la direction Z $b = v\ (x \text{ cof}\gamma - z \text{ cof}\alpha) = v$

La viteſſe ſuivant la direction Z $c = v\ (y \text{ cof}\alpha - x \text{ cof}\beta) = w$

que j'indiquerai pour abréger par les lettres u, v, w. Pour en trouver les accroiſſemens qu'elles prendront dans l'élément du tems dt, il faut remarquer que, non ſeulement les quantités v, α, β, γ, croiſſent de leurs différentiels, mais qu'il faut auſſi avoir égard à la variabilité des coordonnées x, y, z, dont les différentiels ſeront les eſpaces parcourus dans le tems dt par les viteſſes u, v, w, qui conviennent aux mêmes directions. Et partant on aura

$$dx = u\,dt = v\,dt\,(z \text{ cof}\beta - y \text{ cof}\gamma)$$
$$dy = v\,dt = v\,dt\,(x \text{ cof}\gamma - z \text{ cof}\alpha)$$
$$dz = w\,dt = v\,dt\,(y \text{ cof}\alpha - x \text{ cof}\beta)$$

XIII. Ce-

XIII. Cela remarqué, nous aurons les différentiels ſuivans de nos trois viteſſes u, v, w;

$$du = z\,d.\,s\cos\beta - y\,d.\,s\cos\gamma + s\,dt\,(w\cos\beta - v\cos\gamma)$$

& en ſubſtituant pour w & v leurs valeurs, nous trouverons tant du, que dv & dw exprimés en ſorte

$$du = z\,d.\,s\cos\beta - y\,d.\,s\cos\gamma + ss\,dt\,(y\cos\alpha\cos\beta + z\cos\alpha\cos\gamma - x\sin\alpha^2)$$

$$dv = x\,d.\,s\cos\gamma - z\,d.\,s\cos\alpha + ss\,dt\,(z\cos\beta\cos\gamma + x\cos\beta\cos\alpha - y\sin\beta^2)$$

$$dw = y\,d.\,s\cos\alpha - x\,d.\,s\cos\beta + ss\,dt\,(x\cos\gamma\cos\alpha + y\cos\gamma\cos\beta - z\sin\gamma^2)$$

puisque $\sin\alpha^2 = \cos\beta^2 + \cos\gamma^2$; $\sin\beta^2 = \cos\alpha^2 + \cos\gamma^2$; $\sin\gamma^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2$.

Maintenant il faut chercher les forces qui doivent agir ſur l'élément du corps en Z, ſuivant les directions Za, Zb, Zc, pour qu'elles y produiſent préciſément ces accélérations que nous venons de trouver, pour en conclurre enſuite, par la voye d'intégration, les forces totales dont le corps doit être ſollicité, afin que les changemens ſuppoſés y ſoient produits.

XIV. Or, ſi un corps dont la maſſe $= m$ ſe meut ſur une ligne droite avec la viteſſe v, étant ſollicité ſuivant la même direction par une force $= p$, on ſait que l'incrément de la viteſſe dv produit dans l'élément du tems dt eſt proportionnel à la formule $\frac{p\,dt}{m}$. Mais, pour réduire le calcul à des meſures abſolües, ſi l'on exprime la maſſe m par le poids que le corps auroit ſur la terre, la force p par un poids qui lui ſoit égal, le tems t en ſecondes, & la viteſſe v par l'epace parcouru dans une ſeconde; il faut introduire la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde à l'endroit où l'on aura eſtimé le poids du corps. Alors la formule $dv = \frac{2gp\,dt}{m}$ conduira aux juſtes meſures. Donc, ſachant l'accroiſſement de la viteſſe dv engendré dans le tems dt, avec la maſſe du corps m, la force requiſe

pour produire cette accélération ſera: $p = \frac{m\,dv}{2g\,dt}$ agiſſant ſelon la direction du mouvement. Cette maniere d'ajuſter le calcul à des meſures abſolues différe de celle dont je me ſuis ſervi autrefois; mais elle eſt beaucoup plus commode.

XV. Donc, pour imprimer à l'élément du corps en Z, dont la maſſe $= dM$, les trois accélérations trouvées ſelon les directions Za, Zb, Zc, il faut qu'il ſoit ſollicité ſelon les mêmes directions par ces forces élémentaires.

Suivant Za par la force $= \frac{dM}{2g\,dt}.\ d\alpha$

Suivant Zb par la force $= \frac{dM}{2g\,dt}.\ d\upsilon$

Suivant Zc par la force $= \frac{dM}{2g\,dt}.\ d\varpi$

Il s'agit à preſent d'aſſembler toutes ces forces élémentaires par toute l'étendue du corps; où il eſt clair qu'il faut uniquement avoir égard à la variabilité du point Z avec l'élément de matiere dM qui s'y trouve, puiſque nous cherchons les forces qui doivent agir dans l'inſtant préſent, ſans avoir égard à leur variabilité dans la ſuite. Nous n'aurons donc d'autres variables que les trois coordonnées x, y, z, & les lettres α, β, γ, ϖ, avec leurs différentiels ſeront traitées comme conſtantes.

XVI. Puiſque nous ne regardons ici qu'à l'inſtant préſent, rien n'empêche d'établir en ſorte les trois directions fixes, IA, IB, IC, de façon qu'elles conviennent avec les axes principaux du corps; & c'eſt cette conſidération qui nous met en état de ſurmonter les difficultés que j'avois rencontrées en ſuivant d'autres méthodes. On pourroit objecter, que les variations des angles α, β, γ, étant rapportées aux directions fixes, ne ſauroient être tirées de leur rélation aux axes principaux, qui s'écartent des directions fixes dès le premier inſtant. Mais,

Digitized by Google

Mais, puisque les axes principaux tournent avec le corps autour de l'axe de rotation IO, ils en conſervent les mêmes diſtances que les directions fixes, de ſorte que, ſi l'axe de rotation demeuroit fixe, les angles α, β, γ, ſeroient conſtans à l'un & l'autre égard. Et ſi l'axe de rotation IO varie, il variera préciſément autant à l'égard des axes principaux du corps que des directions fixes. Par cette raiſon il ſera permis de ſuppoſer que les axes principaux du corps conviennent à l'inſtant préſent avec les trois directions fixes IA, IB, IC.

XVII. Cette ſuppoſition nous procure ce grand avantage, que nous pourrons intégrer fort aiſément les formules différentielles dont nous avons beſoin. Car, d'abord la nature du centre d'inertie I nous fournit ces intégrales

$$\int x\,dM = 0, \quad \int y\,dM = 0, \quad \& \int z\,dM = 0.$$

Enſuite la propriété des axes principaux donne:

$$\int xy\,dM = 0; \quad \int xz\,dM = 0; \quad \& \int yz\,dM = 0.$$

Outre cela, ſi nous introduiſons les momens d'inertie principaux du corps, & que nous poſions

le moment d'inertie par rapport à l'axe IA $= Maa$
le moment d'inertie par rapport à l'axe IB $= Mbb$
le moment d'inertie par rapport à l'axe IC $= Mcc$,

nous aurons encore ces intégrales,

$$\int xx\,dM = \tfrac{1}{2}M(bb+cc-aa); \int yy\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa+cc-bb); \int zz\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa+bb-cc)$$

XVIII. Maintenant il eſt évident, puisque les formules trouvées pour les différentiels du, dv, dw, ne contiennent que les premieres dimenſions des coordonnées x, y, z, qui ſont les ſeules variables que nous ayons à conſidérer, que les intégrales des forces élémentaires évanouiront; de ſorte que

$$\int \frac{du\,dM}{2g\,dt} = 0; \quad \int \frac{dv\,dM}{2g\,dt} = 0, \quad \int \frac{dw\,dM}{2g\,dt} = 0.$$

Cela s'entend auſſi de la condition, que le centre d'inertie I demeure en repos; car, s'il y avoit des forces finies qui agiſſoient ſur le corps, elles lui imprimeroient un mouvement progreſſif, dont je fais ici abſtraction. Mais, puisqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, il faut avoir égard, non tant aux forces ſollicitantes elles-mêmes, qui évanouiſſent, comme nous venons de le voir, qu'à leurs momens. Par cette raiſon, nous obtiendrons les forces requiſes pour produire les changemens ſuppoſés dans le mouvement du corps, quand nous intégrerons les momens des forces élémentaires par rapport aux trois axes principaux du corps.

XIX. Or les forces élémentaires trouvées au §. XV. donnent par rapport aux axes principaux les momens ſuivans;

Le moment de forces par rapport à l'axe I A,

$$\frac{d\,M}{2g\,dt}\ (y\,dw - z\,dv)$$ dans le ſens BC.

Le moment de forces par rapport à l'axe IB,

$$\frac{d\,M}{2g\,dt}\ (z\,du - x\,dw)$$ dans le ſens CA.

Le moment de forces par rapport à l'axe IC,

$$\frac{2g\,dt}{d\,M}\ (x\,dv - y\,du)$$ dans le ſens AB.

Il faut à préſent ſubſtituer au lieu des différentiels du, dv, dw, leurs valeurs trouvées dans le §. XII. & enſuite chercher les intégrales de ces formules. pour avoir les momens entiers des forces par rapport aux trois axes principaux du corps.

XX. Faiſons ces opérations pour le premier moment élémentaire, par rapport à l'axe principal I A, puisqu'il ſera aiſé d'en conclurre les deux autres par la ſeule analogie. Or l'expreſſion $y\,dw - z\,dv$ ſe changera par la ſubſtitution en celle ici:

(yy

$$(yy+zz)\,d.\,\varpi\cos\alpha - yz\,d.\,\varpi\cos\beta - xz\,d.\,\varpi\cos\gamma$$
$$+\varpi\varpi\,dt\,(xy\cos\alpha\cos\gamma - xy\cos\alpha\cos\beta + (yy-zz)\cos\beta\cos\gamma + yz(\sin\beta^2-\sin\gamma^2))$$

laquelle étant multipliée par $\frac{dM}{2g\,dt}$, & intégrée par la ſeule variabilité des trois coordonnées x, y, z, donnera, à cauſe de $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$, $\int yz\,dM = 0$, l'expreſſion ſuivante,

$$\frac{d.\varpi\cos\alpha}{2g\,dt}\int(yy+zz)\,dM + \frac{\varpi\varpi\cos\beta\cos\gamma}{2g}\int(yy-zz)\,dM.$$

Donc, en y introduiſant les momens principaux d'inertie, à cauſe de $\int(yy+zz)\,dM = M\,aa$ & $\int(yy-zz)\,dM = M\,(cc-bb)$, ce moment de forces ſera

$$\frac{M\,aa\,d.\,\varpi\cos\alpha}{2g\,dt} + \frac{M\,(cc-bb)\,\varpi\varpi\cos\beta\cos\gamma}{2g}$$

XXI. Donc, pour produire dans le mouvement du corps les changemens élémentaires ſuppoſés, tant à l'égard de la viteſſe angulaire, que de la poſition de l'axe de rotation, ſi nous poſons les momens de forces

par rapport à l'axe principal $IA = P$ dans le ſens BC,
par rapport à l'axe principal $IB = Q$ dans le ſens CA,
par rapport à l'axe principal $IC = R$ dans le ſens AB,

nous aurons:

$$P = Maa.\ \frac{d.\varpi\cos\alpha}{2g\,dt} + M\,(cc-bb).\ \frac{\varpi\varpi\cos\beta\cos\gamma}{2g}$$

$$Q = Mbb.\ \frac{d.\varpi\cos\beta}{2g\,dt} + M\,(aa-cc).\ \frac{\varpi\varpi\cos\gamma\cos\alpha}{2g}$$

$$R = Mcc.\ \frac{d.\varpi\cos\gamma}{2g\,dt} + M\,(bb-aa).\ \frac{\varpi\varpi\cos\alpha\cos\beta}{2g}$$

Et partant réciproquement ces trois momens de forces produiront préciſément les changemens ſuppoſés.

XXII. Il faut donc des forces pour produire ces changemens, à moins que les trois valeurs trouvées pour P, Q, & R, n'évanouiſſent; ce qui pourra bien arriver, quoique, ni la viteſſe angulaire v, ni les angles α, β, γ, ne demeurent les mêmes. Mais ſuppoſons, que, tant la viteſſe angulaire v que la poſition de l'axe de rotation doive demeurer la même; & pour cet effet il faut que le corps ſoit ſollicité par ces trois momens de forces:

$$P = M(cc-bb).\frac{vv\cos\beta\cos\gamma}{2g};\quad Q = M(aa-cc)\frac{vv\cos\gamma\cos\alpha}{2g}$$

$$\&\quad R = M(bb-aa).\frac{vv\cos\alpha\cos\beta}{2g}$$

lesquels n'évanouiſſent pas tous à la fois, à moins que des trois coſinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, deux n'évanouïſſent. Cela arrive ſi l'un des angles α, β, γ, évanouït, ou bien, ſi l'axe de rotation convient avec un des trois axes principaux. Or j'ai déjà fait voir, qu'un corps ne ſauroit tourner librement autour d'un axe, à moins que ce ne ſoit un axe principal du corps: & cette même propriété m'a conduit à la connoiſſance des axes principaux.

XXIII. Maintenant nous ſommes en état de réſoudre le probleme direct, auquel cette recherche aboutit principalement, & qui eſt conçu en ces termes:

Un corps étant ſollicité par des forces quelconques, pendant qu'il tourne autour d'un axe de rotation donné avec une viteſſe angulaire donnée, déterminer les changemens élémentaires, qui ſeront produits tant dans la viteſſe angulaire que dans la poſition de l'axe de rotation.

Il ne s'agit ici que d'un inſtant de tems, auquel je regarde la poſition des axes principaux comme connue, qui ſoient IA, IB, IC, par rapport

port auxquels les momens d'inertie du corps ſoient Maa, Mbb, Mcc; où M marque la maſſe du corps. Que le corps tourne donc à préſent autour de l'axe IO, dans le ſens ABC, avec la viteſſe angulaire $= \omega$, & que la poſition de cet axe ſoit déterminée par ces angles que l'axe de rotation fait avec les axes principaux, AIO $= \alpha$, BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$.

XXIV. Pour les forces ſollicitantes, qu'on cherche leurs momens par rapport aux axes principaux du corps, qui ſoient

pour l'axe IA $=$ P dans le ſens BC,
pour l'axe IB $=$ Q dans le ſens CA,
pour l'axe IC $=$ R dans le ſens AB.

Alors, pendant l'élément du tems dt, la viteſſe angulaire ω prendra un accroiſſement $= d\omega$, & l'axe de rotation changera de ſituation par rapport aux axes principaux du corps, en ſorte que les angles α, β, γ, ſeront augmentés de leurs différentiels $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. Et ces changemens élémentaires ſeront déterminés par les trois équations ſuivantes :

$$d.\,\omega \cos\alpha + \frac{cc-bb}{aa}.\,\omega\omega\,dt\cos\beta\cos\gamma = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$d.\,\omega \cos\beta + \frac{aa-cc}{bb}.\,\omega\omega\,dt\cos\alpha\cos\gamma = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$d.\,\omega \cos\gamma + \frac{bb-aa}{cc}.\,\omega\omega\,dt\cos\alpha\cos\beta = \frac{2gR\,dt}{Mcc}.$$

C'eſt donc la ſolution du probleme propoſé.

XXV. De ces formules on peut d'abord réſoudre cette queſtion, qui ſeroit d'ailleurs fort difficile :

Si le corps étant en repos eſt ſollicité par des forces quelconques, trouver l'axe IO, autour duquel le corps commencera à tourner, & la viteſſe angulaire infiniment petite, qu'il recevra dans l'élément du tems dt.

Ici

Ici les momens de forces P, Q, R, ſont donnés; & l'on a $\upsilon = 0$. d'où il faut chercher les angles α, β, γ, avec le différentiel $d\upsilon$. On aura donc à réſoudre ces équations:

$$d\upsilon \cos\alpha = \frac{2gP\,dt}{Maa}; \quad d\upsilon \cos\beta = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}; \quad d\upsilon \cos\gamma = \frac{2gR\,dt}{Mcc}$$

d'où nous tirons d'abord $\cos\beta = \frac{Qaa}{Pbb}\cos\alpha$ & $\cos\gamma = \frac{Raa}{Pcc}\cos\alpha$

& de là à l'aide de l'équation $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$,

$$1 = \cos\alpha^2\left(1 + \frac{QQa^4}{PPb^4} + \frac{RRa^4}{PPc^4}\right) \text{ & } \cos\alpha = \frac{P}{aa} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

& les deux autres angles β, γ, ſeront déterminés ainſi:

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}, \text{ & } \cos\gamma = \frac{R}{cc} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

& la viteſſe élementaire $d\upsilon = \frac{2g\,dt}{M}\sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$.

XXVI. Les trois équations générales que nous venons de trouver, peuvent être transformées en pluſieurs formes. Ainſi, ſi nous multiplions la premiere par $\cos\alpha$, la ſeconde par $\cos\beta$, la troiſieme par $\cos\gamma$, leur ſomme donnera:

$$d\upsilon + \left(\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right)\upsilon\,dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{2g\,dt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

où $$\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc} = -\frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aa\,bb\,cc}$$

d'où l'on voit que, ſi deux des momens principaux ſont égaux entr'eux, le ſecond terme s'en va toujours; & alors, s'il n'y a point de forces

ſollicitantes, la viteſſe angulaire ne change point. On voit auſſi, que, ſi le corps tourne autour d'un axe principal IA, de ſorte que $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$, & que les forces ſollicitantes ne donnent qu'un moment P par rapport au même axe, de ſorte que $Q = 0$, & $R = 0$, on aura $d\omega = \frac{2gP\,dt}{Maa}$; & outre cela $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$: ou bien, l'axe de rotation ne ſera point changé; & l'effet de la force P ſera employé à accélérer le mouvement de rotation. Or c'eſt préciſément la formule connue depuis longtems.

XXVII. Mais, ſi l'on veut déterminer le mouvement de rotation tout entier d'un corps ſollicité par des forces quelconques, il faut avoir égard aux changemens continuels des axes principaux du corps, & y rapporter à chaque inſtant l'axe de rotation, & les momens des forces ſollicitantes. Donc, la poſition des axes principaux étant variable, il les faut rapporter à des directions fixes du Monde. Pour cet effet je conſidere une ſphere fixe, décrite autour du centre d'inertie du corps, qui ſoit repréſentée dans la fig. 3. où PQSR eſt un cercle fixe, & P un point fixe. Qu'après le tems $= t$ ſec. les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, d'où ayant tiré au point P les arcs de grands cercles AP, BP, & CP, ſoient ces arcs $AP = l$, $BP = m$, $CP = n$, & les angles $QPA = \lambda$. $QPB = \mu$, $QPC = \nu$. De là on a d'abord Fig. 3.

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1.$$ enſuite $$\cos(\mu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos m}{\sin l \sin m},$$

$$\cos(\nu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos n}{\sin l \sin n}, \quad \& \quad \cos(\mu - \nu) = -\frac{\cos m \cos n}{\sin m \sin n}.$$

XXVIII. Que le corps tourne à préſent autour de l'axe IO, avec la viteſſe angulaire $= \omega$, dans le ſens ABC; & pour la poſition du point O ſoient les arcs de grands cercles $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$, & comme les trois coordonnées de ci-deſſus n'entrent plus en conſidé-

ration, posons pour abréger nos formules: $\varpi \cos\alpha = x$, $\varpi \cos\beta = y$, & $\varpi \cos\gamma = z$; & nous aurons $\varpi\varpi = xx + yy + zz$. Ensuite, cherchons les momens des forces sollicitantes par rapport aux axes principaux, IA, IB, IC, du corps, qui soient P, Q, R, dans les sens BC, CA, & AB. Cela posé, nos équations pour déterminer les variables x, y, z, seront:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa}.\, yz\, dt = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb}.\, xz\, dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc}.\, xy\, dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc}$$

& ayant trouvé ces quantités x, y, z, on aura les angles α, β, γ, par les formules $\cos\alpha = \frac{x}{\varpi}$; $\cos\beta = \frac{y}{\varpi}$; $\cos\gamma = \frac{z}{\varpi}$.

XXIX. Mais il faut aussi considérer qu'à cause du mouvement de rotation les points A, B, C, & partant les arcs l, m, n, & les angles λ, μ, ν, sont variables. Le point A tournera autour du point O avec la vitesse $= \varpi \sin OA = \varpi \sin\alpha$, dans le sens BC; & partant, dans le tems dt, le point A décrira le petit arc $A\alpha = \varpi\, dt \sin\alpha$, perpendiculaire à l'arc OA. Donc, tirant $a\alpha$ perpendiculaire à l'arc PA, nous aurons $dl = -A\alpha$, & $d\lambda = -\frac{a\alpha}{\sin l}$; mais, à cause de l'angle OAa droit, on trouve $A\alpha = \varpi\, dt \sin\alpha . \sin OAP$, & $a\alpha = \varpi\, dt \sin\alpha . \cos OAP$. Or le triangle BAP fournit:

$\cos BAP = \frac{\cos m}{\sin l}$, & le triangle CAP donne $\cos CAP =$

$-\sin$

$-\sin BAP = \frac{\cos n}{\sin l}$; ou, $\sin BAP = \frac{-\cos n}{\sin l}$. De la même maniere les triangles BAO & CAO donnent:

$$\cos BAO = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}; \quad \cos CAO = \sin BAO = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}.$$

D'où, puisque l'angle $OAP = BAP + BAO$, il s'enſuit

$$\sin OAP = \frac{\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n}{\sin \alpha \ \sin l} \text{ \& } \cos OAP = \frac{\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n}{\sin \alpha \ \sin l}$$

XXX. Subſtituons ces valeurs, & nous aurons

$$dl = \frac{-\varkappa dt\,(\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n)}{\sin l} \text{ \& } d\lambda = \frac{-\varkappa dt\,(\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n)}{\sin l^2}$$

où, ſi nous mettons au lieu de $\varkappa \cos\beta$, $\varkappa \cos\gamma$, les valeurs y & z, nous obtiendrons les ſix équations qu'il faut encore joindre aux trois que nous avons déjà trouvées ci deſſus §. 28.

$dl \sin l = dt\,(y \cos n - z \cos m)$; $d\lambda \sin l^2 = -dt\,(y \cos m + z \cos n)$

$dm \sin m = dt\,(z \cos l - x \cos n)$; $d\mu \sin m^2 = -dt\,(z \cos n + x \cos l)$

$dn \sin n = dt\,(x \cos m - y \cos l)$; $d\nu \sin n^2 = -dt\,(x \cos l + y \cos m)$

Voilà donc neuf équations, dans lesquelles eſt renfermée la ſolution de tous les problemes, où il s'agit du mouvement de rotation de quelque corps ſolide. Or il faut remarquer, qu'à cauſe de la rélation entre les quantités l, m, n, & λ, μ, ν, il ſuffit de prendre trois des ſix dernieres, ſavoir deux du premier rang, & une de l'autre.

XXXI. Il eſt bon de remarquer encore quelques belles rélations entre les arcs & angles l, m, n, & λ, μ, ν. J'ai déjà exprimé les coſinus de la différence entre deux de ces angles; mais on en peut auſſi aiſément donner leurs ſinus. Car, du triangle APB on tire

$\sin(\mu-\lambda)$: $1 = \sin BAP$: $\sin m$ or $\sin BAP = \frac{-\cos n}{\sin l}$; & partant

$\sin(\mu-\lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m}$. Voilà donc les rélations ſuivantes

$$\sin(\mu-\lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m};\ \sin(\nu-\mu) = \frac{-\cos l}{\sin m \sin n};\ \sin(\lambda-\nu) = \frac{-\cos m}{\sin l \sin n}$$

$$\cos(\mu-\lambda) = \frac{-\cos l \operatorname{cf} m}{\sin l \sin m};\ \cos(\nu-\mu) = \frac{-\cos m \operatorname{cf} n}{\sin m \sin n};\ \operatorname{cf}(\lambda-\nu) = \frac{-\cos l \operatorname{cf} n}{\sin l \sin n}$$

De là nous pouvons déduire celles-ci:

$$\sin\mu = \frac{-\sin\lambda \cos l \operatorname{cf} m - \operatorname{cf}\lambda \operatorname{cf} n}{\sin l \sin m};\ \cos\mu = \frac{-\cos\lambda \operatorname{cf} l \operatorname{cf} m + \sin\lambda \operatorname{cf} n}{\sin l \sin m}$$

$$\sin\nu = \frac{-\sin\lambda \cos l \operatorname{cf} n + \cos\lambda \operatorname{cf} m}{\sin l \sin n};\ \cos\nu = \frac{-\cos\lambda \operatorname{cf} l \operatorname{cf} n - \sin\lambda \operatorname{cf} m}{\sin l \sin n}$$

XXXII. En comparant cette méthode de déterminer le mouvement de rotation avec les eſſais que j'ai propoſés autrefois, on y remarquera d'abord des avantages très réels, ſurtout à l'égard de l'application à tous les cas qu'on veut examiner. Et quand on rencontrera encore des difficultés, à cauſe de la multitude des variables, ce n'eſt plus dans la Mécanique qu'il faut chercher les moyens de les ſurmonter, puiſqu'il ſemble que la nature d'un tel mouvement n'eſt pas ſuſceptible d'un calcul plus ſimple. Tout dépendra à préſent de l'adreſſe du calculateur, qui doit puiſer dans l'Analyſe les ſecours néceſſaires pour réſoudre les équations qui renferment la détermination du mouvement: mais il n'eſt pas douteux, qu'il n'y ait une infinité de cas qui ſoient abſolument irréſolubles à cauſe des bornes de l'Analyſe. Pour donner un exemple de l'application de cette méthode, ſoit propoſé le probleme ſuivant.

Un

Un corps ſolide n'étant ſollicité par aucune force, s'il a reçu un mouvement de rotation quelconque autour d'un axe différent de ſes axes principaux, déterminer la continuation de ſon mouvement.

XXXIII. Ayant donc $P = 0$, $Q = 0$, & $R = 0$, nous aurons à réſoudre les équations ſuivantes:

$$\text{I.}\quad dx + \frac{cc-bb}{aa}\,yz\,dt = 0$$

$$\text{II.}\quad dy + \frac{aa-cc}{bb}\,xz\,dt = 0$$

$$\text{III.}\quad dz + \frac{bb-aa}{cc}\,xy\,dt = 0$$

IV. $dl \sin l = dt(y\cos n - z\,\mathrm{c}\sin m)$; VII. $d\lambda \sin l^2 = -dt(y\,\mathrm{c}\sin m + z\,\mathrm{c}\sin n)$

V. $dm \sin m = dt(z\cos l - x\,\mathrm{c}\sin n)$; VIII. $d\mu \sin m^2 = -dt(z\,\mathrm{c}\sin n + x\,\mathrm{c}\sin l)$

VI. $dn \sin n = dt(x\,\mathrm{c}\sin m - y\,\mathrm{c}\sin l)$; IX. $d\nu \sin n^2 = -dt(x\,\mathrm{c}\sin l + y\,\mathrm{c}\sin m)$

Des trois premieres nous tirons d'abord:

$$\frac{aax\,dx}{bb-cc} = \frac{bby\,dy}{cc-aa} = \frac{cczdz}{aa-bb} = xyz\,dt$$

Donc, poſant $xyz\,dt = du$, & pour abréger,

$$\frac{bb-cc}{aa} = \mathrm{A};\quad \frac{cc-aa}{bb} = \mathrm{B};\quad \frac{aa-bb}{cc} = \mathrm{C},$$

nous trouverons en intégrant,

$$xx = 2\,\mathrm{A}u + \mathfrak{A};\quad yy = 2\,\mathrm{B}u + \mathfrak{B};\quad zz = 2\,\mathrm{C}u + \mathfrak{C},$$

& de là $$dt = \frac{du}{\sqrt{(2\mathrm{A}u+\mathfrak{A})\,(2\mathrm{B}u+\mathfrak{B})\,(2\mathrm{C}u+\mathfrak{C})}}$$

XXXIV. Par rapport aux lettres A, B, C, il faut remarquer que $Aaa + Bbb + Ccc = 0$, & $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$. De là il eſt évident que $aaxx + bbyy + cczz$ ſera égal à une quantité conſtante $\mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc$. Or cette expreſſion ſe réduit à celle-ci $\omega\omega(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2)$, où la formule $aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2$ étant multipliée par la maſſe du corps M, exprime le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation IO, autour duquel le corps tourne à préſent. Donc, poſant ce moment d'inertie $= Mrr$, la quantité $Mrr\,\omega\omega$, qui exprime ce qu'on nomme la force vive du corps, demeure invariable, ou bien le corps conſervera toujours la même force vive. Puisque dans le mouvement progreſſif, s'il n'y a point de forces ſollicitantes, le corps conſerve toujours la même viteſſe, il s'enſuit, quelque mouvement qu'on imprime à un corps, qu'il conſervera toujours la même force vive.

XXXV. La derniere équation différentielle trouvée §. XXXIII. ſert à déterminer pour tout tems t la variable u, et de là on définira les quantités

$$x = V(2Au + \mathfrak{A});\ y = V(2Bu + \mathfrak{B});\ z = V(2Cu + \mathfrak{C})$$

D'où la viteſſe angulaire dont le corps tourne à préſent, ſera

$$\omega = V(2(A + B + C)u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$$

Or pour la poſition de l'axe de rotation IO à l'égard des axes principaux du corps, laquelle eſt déterminée par les angles α, $\mathfrak{G}$, γ, on aura

$$\cos\alpha = \frac{x}{\omega};\ \cos\mathfrak{G} = \frac{y}{\omega};\ \cos\gamma = \frac{z}{\omega}.$$

Mais nous ne ſavons pas encore la poſition des axes principaux du corps pour l'inſtant préſent, qu'il faut chercher par la réſolution des ſix autres équations, les trois premieres étant deja parfaitement réſolues.

XXXVI. Pour faciliter cette recherche, il eſt bon d'obſerver que les trois premieres équations y peuvent beaucoup contribuer. Car, ſi nous

ſi nous multiplions la premiere par $aa \cos l$, la ſeconde par $bb \cos m$, et la troiſieme par $cc \cos n$, nous obtiendrons cette ſomme:

$$0 = aadx\cos l + bbdy\cos m + ccdz\cos n + ccyzdt\cos l - bbyzdt\cos l + aaxzdt\cos m - ccxzdt\cos m + bbxydt\cos n - aaxydt\cos n$$

laquelle, par les équations IV. V. & VI. ſe change en cette forme:

$$0 = aadx\cos l + bbdy\cos m + ccdz\cos n - aaxdl\sin l - bbydm\sin m - ccxdn\sin n$$

qui étant intégrable donne

$$aax\cos l + bby\cos m + ccz\cos n = \text{Conſt.} = \mathfrak{D}$$

& nous avions déjà $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Donc, ſi nous avions encore une ſeule équation intégrale entre les arcs l, m et n, nous pourrions déterminer chacun à part. Or les équations IV. V. VI. fourniſſent cette équation differentielle aſſés ſimple

$$x\,dl\sin l + y\,dm\sin m + z\,dn\sin n = 0$$

XXXVII. Au lieu des arcs l, m, n introduiſons une nouvelle variable v, en poſant $x\cos l + y\cos m + z\cos n = v$. & à cauſe de la propriété remarquée nous aurons:

$$dv = dx\cos l + dy\cos m + dz\cos n \text{ ou}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{A\cos l}{x} + \frac{B\cos m}{y} + \frac{C\cos n}{z}.$$

& maintenant tout revient à déterminer v par u. Pour cet effet il faut chercher les valeurs de $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, de ces trois équations:

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

$$aax\cos l + bby\cos m + ccz\cos n = \mathfrak{D}$$

$$x\cos l + y\cos m + z\cos n = v$$

dont la réſolution mene enfin à cette formule irrationelle

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l} + AAa^4yyzz - \mathfrak{D}\mathfrak{D}(xx + yy + zz) \\ + BBb^4xxzz + 2\mathfrak{D}v(aaxx + bbyy + cczz) \\ + CCc^4xxyy - vv(a^4xx + b^4yy + c^4zz) \end{array}\right\}}$$

XXXVIII.

XXXVIII. Mettons pour abréger le ſigne $V(..)$ pour cette formule, & l'on trouvera les valeurs ſuivantes:

$$\text{cof}\,l = \frac{\mathfrak{D}x(Cccyy - Bbbzz) + bbccxv(Bzz - Cyy) + Aaayz\,V(...)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\text{cof}\,m = \frac{\mathfrak{D}y(Aaazz - Cccxx) + aaccyv(Cxx - Azz) + Bbbxz\,V(..)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\text{cof}\,n = \frac{\mathfrak{D}z(Bbbxx - Aavyy + aabbzv(Ayy - Bxx) + Cccxy\,V(..)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

Et ſi nous ſubſtituons ces valeurs dans l'équation différentielle $\frac{dv}{du} = \frac{A\,\text{cof}\,l}{x} + \frac{B\,\text{cof}\,m}{y} + \frac{C\,\text{cof}\,n}{z}$, nous parviendrons à cette équation à intégrer:

$$\frac{dv}{du}(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy) =$$

$$ABC\mathfrak{D}(aaxx + bbyy + cczz) - ABCv(a^4xx + b^4yy + c^4zz) + \frac{AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy}{xyz}V(..)$$

XXXIX. Maintenant nous n'avons qu'à ſubſtituer au lieu de x, y, z leurs valeurs aſſignées ci-deſſus, qui donnent:

$$AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy = AAa^4\mathfrak{BC} + BBb^4\mathfrak{AC} + CCc^4\mathfrak{AB} - 2ABCu(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)$$

$$AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy = AAaa\mathfrak{BC} + BBbb\mathfrak{AC} + CCcc\mathfrak{AB} - 2ABCu(\mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc)$$

$$xx + yy + zz = 2(A + B + C)u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$

$$aaxx + bbyy + cczz = \mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc$$

$$a^4xx + b^4yy + c^4zz = \mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4$$

Poſons

Posons ensuite pour abréger,

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=E;\ \mathfrak{A}aa+\mathfrak{B}bb+\mathfrak{C}cc=F;\ \mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4=G;$$

$$AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C}+BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C}+CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B}=H$$

$$AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C}+BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C}+CCc^4\mathfrak{A}\mathfrak{B}=K.$$

d'où il s'ensuit $K=EG-FF$.

XL. En introduisant ces valeurs à cause de $A+B+C=-ABC$, notre formule irrationelle sera

$$V(..)=(K-2ABCGu+2\mathfrak{D}\mathfrak{D}ABCu-\mathfrak{D}\mathfrak{D}E+2\mathfrak{D}Fv-Gvv)$$

& notre équation différentielle deviendra

$$\frac{dv}{du}(K-2ABCGu)=ABC\mathfrak{D}F-ABCGv+\frac{H-2ABCFu}{xyz}V(..)$$

qui se réduit à cette forme,

$$\frac{Kdv-ABCF\mathfrak{D}du-2ABCGudv+ABCGvdu}{V(K-\mathfrak{D}\mathfrak{D}E+2ABC(\mathfrak{D}\mathfrak{D}-G)u+2\mathfrak{D}Fv-Gvv)}=\frac{Hdu-2ABCFudu}{V(2Au+\mathfrak{A})(2Bu+\mathfrak{B})(2Cu+\mathfrak{C})}$$

dont il s'agit de trouver l'intégrale.

XLI. Comme le dernier membre de cette équation ne renferme que la seule variable u, il est évident que, si l'on pouvoit trouver une fonction de u, par laquelle le premier membre étant multiplié devint intégrable, on auroit la résolution complette de cette équation. J'ai déjà exposé une methode de trouver de tels facteurs; & si l'on en fait l'application à cette équation proposée, on découvre ce facteur cherché $=\frac{1}{K-2ABCGu}$; ou bien, si nous divisons notre équa-

tion par $K - 2ABCGu$, l'un & l'autre membre deviendra intégrable, ou conſtructible par des quadratures. Multiplions donc par $\frac{\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$, et mettons le dernier membre

$$\frac{(H - 2ABCFu)\,du.\,\sqrt{G}}{(K-2ABCGu)\sqrt{(2Au+\mathfrak{A})(2Bu+\mathfrak{B})(2Cu+\mathfrak{C})}} = dU$$

de ſorte que U puiſſe être regardé comme une fonction connue de la variable u, dont nous avons déjà le rapport au tems t.

XLII. Pour le premier membre, en le multipliant par $\frac{G}{(K-2ABCGu)\sqrt{G}}$, la formule radicale pourra être repréſentée en ſorte:

$$\sqrt{((G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)-(Gv-\mathfrak{D}F)^2)}$$

à cauſe de $K = EG - FF$; & partant ce premier membre ſera

$$\frac{(K-2ABCGu)\,G\,dv + ABCG\,(Gv-\mathfrak{D}F)\,du}{(K-2ABCGu)\sqrt{((G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)-(Gv-\mathfrak{D}F)^2)}}$$

qui, poſant $K-2ABCGu = pp$, $Gv-\mathfrak{D}F = q$, & $G-\mathfrak{D}\mathfrak{D} = ff$, prendra cette forme $\frac{p\,dq - q\,dp}{p\sqrt{(ffpp-qq)}}$, qui, poſant $q = ps$, ſe change en celle-ci $\frac{ds}{\sqrt{(ff-ss)}}$, dont l'intégrale eſt Arc. ſin $\frac{s}{f} =$ Arc. ſin $\frac{fp}{q}$. Et partant l'intégrale du premier membre ſera

$$\text{Arc. ſin } \frac{Gv - \mathfrak{D}F}{f\sqrt{(K-2ABCGu)}} = \text{Arc ſin } \frac{Gv-\mathfrak{D}F}{\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)}}$$

LIII.

XLIII. Cette quantité eſt donc égale à la formule intégrale

$$U = \int \frac{(H - 2ABCF\,u)\,du\,\sqrt{G}}{(K - 2ABCG\,u)\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}}$$

& conſidérant U comme un angle, notre équation intégrale ſera:

$$\frac{Gv - \mathfrak{D}F}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCG\,u)}} = \text{ſin U.}$$

d'où nous tirons

$$\frac{\sqrt{((G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCG\,u) - (Gv - \mathfrak{D}F)^2)}}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCG\,u)}} = \text{coſ U,}$$

de ſorte que notre formule irrationnelle réſulte

$$\sqrt{(..)} = \frac{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCG\,u)}}{\sqrt{G}}\ \text{coſ U}$$

XLIV. Subſtituons ces valeurs pour v, & la formule irrationnelle dans les expreſſions aſſignées ci-deſſus pour les cóſinus des arcs l, m, & n; & après avoir fait les réductions néceſſaires, nous trouverons.

$$\text{coſ}\,l = \frac{\mathfrak{D}aax}{G} + \frac{bbccx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCG\,u)}}\cdot\text{ſin U} + \frac{A\,aayz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G}(K - 2ABCG\,u)}\text{coſ U}$$

$$\text{coſ}\,m = \frac{\mathfrak{D}bby}{G} + \frac{aacc\,y(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCG\,u)}}\,\text{ſin U} + \frac{B\,bbxz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G}(K - 2ABCG\,u)}\,\text{coſ U}$$

$$\text{coſ}\,n = \frac{\mathfrak{D}cc\,z}{G} + \frac{aabbz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCG\,u)}}\,\text{ſin U} + \frac{C\,cc\,xy\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D}}}{\sqrt{G}(K - 2ABCG\,u)}\,\text{coſ U}$$

Donc, puiſqu'on peut définir pour un tems écoulé quelconque t la quantité u, & de celle-ci les variables x, y, z, avec la formule intégrale U, on connoitra auſſi pour le même tems les arcs l, m, & n; de

ſorte que le probleme eſt réſolu juſqu'à la détermination des angles λ, μ, ν, dont il ſuffit de chercher un ſeul.

XLV. Mais, puisque nous avons trouvé, tant les quantités x, y, z, que les arcs l, m, n, exprimés par la ſeule quantité u, & qu'il y a $dt = \frac{du}{xyz}$, la détermination de l'angle $QPA = \lambda$ n'aura aucune difficulté par le moyen de l'équation différentielle $d\lambda = -\frac{dt\,(y \cos m + z \cos n)}{\sin l^2}$. Cependant, puisqu'il n'y a point de raiſon de chercher plutôt cet angle λ, que les deux autres μ & ν, il ſemble qu'on fera mieux de chercher l'angle QPO, que fait l'arc PO avec le cercle fixe PQS. Poſons donc l'angle $QPO = \varphi$; & puisque nous avons déjà trouvé $\sin OAP = \frac{\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n}{\sin\alpha \sin l}$, & $\cos OAP = \frac{\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n}{\sin\alpha \sin l}$, nous aurons $\cos OP = \cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n = \frac{v}{s}$, à cauſe de $v = x \cos l + y \cos m + z \cos n$. Mais nous venons de trouver $v = \frac{\mathfrak{D}F}{G} + \frac{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})\,(K - 2ABCGu)}}{G} \sin U$, & pour s nous avons $ss = E - 2ABCu$.

XLVI. Que dans le tems infiniment petit dt le pole de rotation O ſoit transporté en o, & tirant l'arc Ao, & la perpendiculaire Op, nous aurons $op = d\alpha$; & puisque le pole O change également par rapport aux axes principaux, ſoit que nous les regardions comme fixes, ou que nous tenions compte de leur mouvement, conſidé-

sidérons l'angle BAO, pour lequel nous avons cos BAO = $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, & sin BAO = $\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$. De là nous tirerons d. BAO = OAo = $\frac{-d\alpha\cos\alpha\cos\gamma - d\gamma\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\beta}$, & partant Op = $-\frac{d\alpha\cos\alpha\cos\gamma - d\gamma\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\beta}$. Prolongeons l'arc oO en V, & nous aurons tang AoO = tang AOV = $\frac{-\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\beta} - \frac{d\gamma\sin\alpha\sin\gamma}{d\alpha\cos\beta}$, & O$o$ = $\frac{d\alpha}{\cos AOV} = V(d\alpha^2\sin\alpha^2 + d\beta^2\sin\beta^2 + d\gamma^2\sin\gamma^2)$ qui se réduit à cette forme Oo = $\frac{1}{g}V(dx^2+dy^2+dz^2-dg^2)$.

Maintenant, pour trouver l'angle POV nous avons pour l'angle AOP

$$\sin AOP = \frac{\sin OAP.\ \sin l}{\sin PO} = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\ \sin PO} \quad \&$$

$$\cos AOP = \frac{\cos l - c\alpha\, c OP}{\sin\alpha\ \sin PO} = \frac{\sin\alpha^2\cos l - c\alpha\, c\beta\, c m - \cos\alpha\, c\gamma\, c n}{\sin\alpha\ \sin PO}$$

& partant

$$\sin POV = \frac{(\cos\gamma c m - c\beta c n)c AOV - (\sin\alpha^2 c l - c\alpha\, c\beta c m - c\alpha c\gamma c n)\sin AOV)}{\sin\alpha\ \sin PO}$$

XLVII. Or Oo sin POV donne le petit arc Oq perpendiculaire à l'arc Po, lequel étant auſſi = $d\Phi$ sin PO, nous aurons

$$d\Phi\sin PO = Oo\sin POV = \frac{d\alpha\sin POV}{\cos AOV}, \text{ \& partant}$$

$$d\Phi = \frac{d\alpha}{\sin\alpha\sin PO^2}(\cos\gamma c m - c\beta c n - (\sin\alpha^2 c l - c\alpha c\beta c m - c\alpha c\gamma c n)\tan AOV).$$

Subſtituons ici la valeur de tang $AOV = \frac{-d\alpha \cos\alpha \cos\gamma - d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{d\alpha \cos\beta}$, & parceque $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\beta \sin\beta \cos\beta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0$, nous trouverons

$$d\Phi \sin PO^2 = (d\gamma \cos\beta \sin\gamma - d\beta \sin\beta \cos\gamma)\cos l + (d\alpha \sin\alpha \cos\gamma - d\gamma \cos\alpha \sin\gamma)\cos n + (d\beta \cos\alpha \sin\beta - d\alpha \sin\alpha \cos\beta)\cos n.$$

Or, puisque $\cos\alpha = \frac{x}{\mathfrak{x}}$; $\cos\beta = \frac{y}{\mathfrak{x}}$, $\cos\gamma = \frac{z}{\mathfrak{x}}$, on aura $d\beta \sin\beta = \frac{y\,d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}} - \frac{dy}{\mathfrak{x}}$, & $d\gamma \sin\gamma = \frac{z\,d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}} - \frac{dz}{\mathfrak{x}}$, donc

$$d\gamma \cos\beta \sin\gamma - d\beta \sin\beta \cos\gamma = \frac{z\,dy - y\,dz}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \frac{du(\mathfrak{B}zz - \mathfrak{C}yy)}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}yz} = \frac{x\,dt(\mathfrak{B}zz - \mathfrak{C}yy)}{\mathfrak{x}\mathfrak{x}},$$

& partant, à cauſe de $\mathfrak{B}zz - \mathfrak{C}yy = B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}$, nous aurons

$$d\Phi = \frac{dt\,(x(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})\cos l + y(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})\cos m + z(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})\cos n)}{E - 2ABCu - vv}$$

XLVIII. Subſtituons enfin pour $\cos l$, $\cos m$ & $\cos n$ leurs valeurs trouvées; & puisque

$$aaxx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}) + bbyy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C}) + cczz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}) = -H + 2ABCFu$$

$$bbccxx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})^2 + aaccyy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})^2 + aabbzz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})^2 =$$

$$(aaxx + bbyy + cczz)(AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy) - xxyyzz(Aaa + Bbb + Ccc)^2 = F(H - 2ABCFu)$$

$$Aaa(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}) + Bbb(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C}) + Ccc(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}) = ABCF$$

De là nous concluons: $\frac{d\Phi(E - 2ABCu - vv)}{dt} =$

$$-\frac{\mathfrak{D}(H - 2ABCFu)}{G} + \frac{F(H - 2ABCFu)\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\sin U + \frac{ABCFxyz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G}(K - 2ABCGu)}\cos U$$

Ou

Où il faut remarquer qu'il y a $GG(E - 2ABCu - vv) =$
$(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})FF+G(K-2ABCGu)-(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)\sin U^2$
$- 2\mathfrak{D}FV(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu).\sin U$

XLIX. Puisque $dU = \frac{dt(H - 2ABCFu)VG}{K - 2ABCGu}$, & $du = xyzdt$,

notre différentiel $d\Phi$ sera égal à une fraction, dont le numérateur est
$-\mathfrak{D}fC(K-2ABCGu)VG+FdUVG(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu).\sin U$

$$+ \frac{ABCFGduVG(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}{V(K - 2ABCGu)} \cos U$$

& le dénominateur:
$(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})FF+G(K-2ABCGu)-2\mathfrak{D}FV(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu).\sin U$
$- (G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)\sin U^2$

Pour abréger cette formule, posons $V(K - 2ABCGu) = s$, & $V(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D}) = h$, de sorte que $ABCGdu = -sds$, & le numérateur sera:

$- \mathfrak{D}ssdUVG + Fhsd UG.\sin U - Fhds VG.\cos U$

& le dénominateur:

$$hhFF + Gss - 2\mathfrak{D}Fhs\sin U - hhss\sin U^2$$

L. Ayant introduit ces valeurs abrégées, nous aurons à intégrer cette formule

$$d\Phi = \frac{-\mathfrak{D}ssdU + Fhsd U\sin U - Fhds\cos U}{FFhh+Gss-2\mathfrak{D}Fhs\sin U - hhss\sin H^2} VG$$

laquelle, à cause de $hh = G - \mathfrak{D}\mathfrak{D}$, se réduit à

$$d\Phi = \frac{-\mathfrak{D}ssdU + Fhsd U\sin U - Fhds\cos U}{(Fh - \mathfrak{D}s\sin U)^2 + Gss\cos U^2} VG$$

dont

dont l'intégrale eſt évidemment:

$$\varphi = \text{Arc. tang.} \frac{Fh - \mathfrak{D}s\sin U}{s\cos U.\sqrt{G}}.$$

ou bien $\text{tang}\,\varphi = \frac{Fh - \mathfrak{D}s\sin U}{s\cos U.\sqrt{G}}$.

Cette formule, en reſtituant pour s & h les valeurs ſuppoſées, ſe réduit à celle ci:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{F\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})} - \mathfrak{D}\sin U\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\cos U\sqrt{G}(K - 2ABCGu)}$$

LI. On peut donc trouver cet angle $QPO = \varphi$ indépendamment de la quantité v, où je n'ai pas introduit une nouvelle conſtante, puisque le cercle fixe PQS peut être établi à volonté. Donc, ſuppoſant cet angle φ connu, puisque nous venons de trouver $s\sin PO = \sqrt{(E - 2ABCu - vv)}$, cette quantité eſt égale à $\frac{\sqrt{((Fh - \mathfrak{D}s\sin U)^2 + Gss\cos U^2)}}{G}$; & partant à $\frac{s\cos U}{\cos\varphi.\sqrt{G}}$; de ſorte que $s\sin PO = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}}.\frac{\cos U}{\cos\varphi}$,

et $\sin PO = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(E - 2ABCu)}}.\frac{\cos U}{\cos\varphi}$, &

$$\cos PO = \frac{\mathfrak{D}F + \sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}\sin U}{G\sqrt{(E - 2ABCu)}}$$

Or, ayant trouvé l'angle $QPO = \varphi$, il en faut retrancher l'angle APO pour avoir l'angle $QPA = \lambda$. Pour cet effet nous avons

$$\sin APO = \frac{x\cos m - y\cos n}{s\sin PO\sin l} \text{ \& } \cos APO = \frac{x\sin l^2 - y\cos l\cos m - x\cos l\cos n}{s\sin PO\sin l}$$

LIII.

LII. Quand j'ai traité ce problème la premiere fois, ſans faire réflexion que la quantité $aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n$ étoit une quantité conſtante, il m'a été impoſſible de déterminer les arcs l, m, n malgré tous les efforts que je fis pour réſoudre les équations n°. IV, V, VI du §. XXXIII, quoique j'euſſe déjà déterminé les quantités x, y & z, par le tems t. Auſſi m'imaginai-je, que ce problème conçû en general ſurpaſſoit les forces du calcul; & je ne crûs pas d'y réuſſir mieux en compoſant ce Mémoire. Je vis donc avec bien de la ſurpriſe que la méthode que j'ai employée ici, m'a conduit au but propoſé, laquelle mérite par cette raiſon d'autant plus d'attention, qu'elle nous fournit un exemple, combien il eſt dangereux de prononcer ſur l'impoſſibilité de réſoudre quelque probleme, quoiqu'on y rencontre les plus grandes difficultés, qui ſemblent même ſurmonter toute l'adreſſe du calcul. Par cette raiſon il vaudra bien la peine de mettre devant les yeux toutes les parties de la ſolution de ce problème.

PROBLEME.

Un corps ſolide d'une figure quelconque n'étant ſollicité par aucunes forces, ſi on lui imprime un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement.

LIII. Si le corps a un mouvement progreſſif, puisqu'il demeurera pérpetuellement le même, qu'on l'en dépouille, en ſorte que ſon centre d'inertie demeure en repos; & la queſtion revient à déterminer le mouvement de rotation, ou pour chaque tems écoulé tant l'axe de rotation que la viteſſe angulaire. Pour cet effet, il faut conſidérer les trois axes principaux du corps, qui ſoient IA, IB, IC, et par rapport à eux les momens d'inertie Maa, Mbb, & Mcc. Rapportons le corps à une ſphere fixe décrite autour du centre d'inertie du corps I; qu'après le tems $= t$ ſecondes les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, dans la ſurface de la ſphere, & l'axe de rotation au point O, autour duquel le corps tourne dans le ſens ABC avec la viteſſe angulaire $= \omega$, où ω marque l'angle décrit dans une ſeconde, le ſinus total, ou le rayon de la ſphere, étant $= 1$. Fig. 1. Fig. 3.

LIV. Posons pour ce tems de t secondes écoulé depuis le commencement: $\omega \cos AO = x$; $\omega \cos BO = y$; $\omega \cos CO = z$: & soit pour abréger $\frac{bb-cc}{aa} = A$; $\frac{cc-aa}{bb} = B$; $\frac{aa-bb}{cc} = C$. Cela posé, s'il fut au commencement $x = V\mathfrak{A}$; $y = V\mathfrak{B}$; & $z = V\mathfrak{C}$, & partant la vitesse angulaire $= V(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, il faut intégrer cette équation $dt = \frac{du}{V(\mathfrak{A}+2Au)(\mathfrak{B}+2Bu)(\mathfrak{C}+2Cu)}$, en sorte que, faisant $t = 0$, il devienne $u = 0$. De là on aura pour le tems indéfini t la valeur de u, & ensuite:

$x = V(\mathfrak{A} + 2Au)$; $y = V(\mathfrak{B} + 2Bu)$; $z = V(\mathfrak{C} + 2Cu)$

d'où l'on tirera la vitesse angulaire

$$\omega = V.(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)$$

puisque $A + B + C = -ABC$. Après cela on connoitra aisément les arcs OA, OB, OC, des formules $\cos AO = \frac{x}{\omega}$; $\cos BO = \frac{y}{\omega}$; $\cos CO = \frac{z}{\omega}$, qui déterminent la situation de l'axe de rotation IO par rapport aux axes principaux du corps.

LV. Ensuite, pour trouver la position des axes principaux à l'égard de la sphere fixe, où je prends à plaisir un point fixe P avec un cercle fixe PQS, posons les arcs $PA = l$, $PB = m$, $PC = n$, & soit pour abréger:

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = E$; $\mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c = F$; $\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4 = G$

$$AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B} = H$$
$$AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B} = K$$

Qu'on cherche maintenant un arc, ou angle U, de sorte que

$$U = \int \frac{(H - 2ABCFu)\,du\,VG}{(K-2ABCGu)V(\mathfrak{A}+2Au)(\mathfrak{B}+2Bu)(\mathfrak{C}+2Cu)}$$

qui

qui renferme une conſtante arbitraire, outre laquelle on y introduiſe encore une autre $\mathfrak{D}$; & alors on aura:

$$\text{cſ}t = \frac{\mathfrak{D}\,nax}{G} + \frac{bbccx(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\text{-}C\mathfrak{B})\sqrt{(G\text{-}\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\text{ſn}U + \frac{Aaa)z\sqrt{(G\text{-}\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G}(K\text{-}2ABCGu)}\,\text{cſ}U$$

$$\text{cſ}m = \frac{\mathfrak{D}\,bby}{G} + \frac{aaccy(C\mathfrak{A}\text{-}A\mathfrak{C})\sqrt{(G\text{-}\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\text{ſn}U + \frac{Bbbxz\sqrt{(G\text{-}\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G}(K\text{-}2ABCGu)}\text{cſ}U$$

$$\text{cſ}n = \frac{\mathfrak{D}\,ccz}{G} + \frac{cabbz(A\mathfrak{B}\text{-}B\mathfrak{A})\sqrt{(G\text{-}\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\text{ſn}U + \frac{Cccxy\sqrt{(G\text{-}\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G}(K\text{-}2ABCGu)}\text{coſ}U$$

LVI. Pour ces deux conſtantes, dont l'une eſt $\mathfrak{D}$, & l'autre renfermée dans l'arc U, il les faut prendre en ſorte, que pour le commencement où $t = 0$ & $u = 0$, les arcs l, m, n, deviennent auſſi grands qu'ils ont été préciſement alors. Car, quoiqu'il y en ait trois, il ſuffit d'en avoir déterminé deux, à cauſe de leur rélation $\text{coſ}l^2 + \text{coſ}m^2 + \text{coſ}n^2 = 1$. Enfin, pour la poſition à l'égard du cercle P Q S, ſi nous poſons l'angle O P Q $= \Phi$, nous aurons en introduiſant une nouvelle conſtante pour l'ajuſter à l'état initial,

$$\text{tang}(\Phi + \mathfrak{F}) = \frac{F\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})} - \mathfrak{D}\,\text{ſin}U.\ \sqrt{(K-2ABCGu)}}{\text{coſ}U.\ \sqrt{G}(K-2ABCGu)}$$

$$\text{Or, ſin APO} = \frac{z\text{coſ}m - y\text{cſ}n}{x\,\text{ſin PO.ſin}l}\text{, \& }x\text{ſin PO} = \frac{\sqrt{(K-2ABCGu)}}{\sqrt{G}}.\ \frac{\text{coſ}U}{\text{cſ}(\Phi+\mathfrak{F})}$$

Par ces formules le probleme propoſé eſt parfaitement réſolu.

Autre ſolution du même Probleme.

LVII. La ſolution précédente n'eſt ſi compliquée que parce qu'elle ſe rapporte en général à un point fixe quelconque P, & à un cercle fixe P Q S quelconque, d'où il doit y entrer un grand nombre de conſtantes. Mais, puiſque ces lieux fixes ſont arbitraires, on les peut établir en ſorte, que nos formules deviennent beaucoup plus ſimples.

La conſtante $\mathfrak{D}$ dépend principalement du point P, & rien n'empêche, qu'on ne le prenne au commencement en ſorte qu'il devienne $G - \mathfrak{D}\mathfrak{D} = 0$, ou $\mathfrak{D} = \sqrt{G} = \sqrt{(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)}$. Alors, ayant trouvé l'angle U comme ci-deſſus, on aura par des formules fort ſimples

$$\text{cof}\, l = \frac{aax}{\sqrt{G}}; \quad \text{cof}\, m = \frac{bby}{\sqrt{G}}; \quad \text{cof}\, n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}.$$

& partant pour déterminer ces arcs l, m, n, on n'a pas même beſoin de chercher l'angle U. Or pour l'angle $OPQ = \Phi$, on aura, en négligeant la conſtante $\mathfrak{F}$, cette équation tang $\Phi = -\frac{\text{ſin U}}{\text{cof U}}$, ou bien $\Phi = -$ U. de ſorte que

$$\Phi = \int \frac{(H - 2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)(\mathfrak{B} + 2Bu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$$

LVIII. Mais ayant exprimé ſi commodément les arcs l, m, & n, on peut immédiatement déterminer les angles $QPA = \lambda$, $QPB = \mu$, & $QPC = \nu$, par les premieres formules N°. VII. VIII. & IX. Car, puisque ſin $l^2 = \text{cof}\, m^2 + \text{cof}\, n^2 = \frac{b^4yy + c^4zz}{G}$

$= \frac{G - a^4xx}{G}$, & $y\,\text{cof}\, m + z\,\text{cof}\, n = \frac{bbyy + cczz}{\sqrt{G}} = \frac{F - aaxx}{\sqrt{G}}$

nous aurons $d\lambda = \frac{-dt(F + aaxx)}{G - a^4xx}$, ou bien

$$d\lambda = \frac{-du(\mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc - 2Aaau)\sqrt{G}}{(\mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4 - 2Aa^4u)\sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)(\mathfrak{B} + 2Bu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$$

Outre cela, nous trouverons, puisque $K = G(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) - FF$

$$\text{ſin PO} = \frac{aaxx + bbyy + cczz}{2\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{G}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)}$$

&

& $\sin PO = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)}$. & delà

$$\sin APO = \frac{Aaayz\sqrt{G}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}(G - a^4xx)}$$

$$\& \cos APO = \frac{Gx\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)} - Faax}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}(G - a^4xx)}$$

Or, pour avoir le point P, on n'a qu'à prendre au commencement $\cos AP = aa\sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{G}}$; $\cos BP = bb\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{G}}$ & $\cos CP = cc\sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{G}}$.

LIX. Il ſera bon de voir, comment ces ſimples formules données pour $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, ſatisfont aux équations N°. IV. V. & VI. Puisque $dx = Ayzdt$; $dy = Bxzdt$ & $dz = Cxydt$: les formules $\cos l = \frac{aax}{\sqrt{G}}$; $\cos m = \frac{bby}{\sqrt{G}}$, & $\cos n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}$, donnent $dl \sin l = \frac{-Aaayzdt}{\sqrt{G}}$; $dm \sin m = \frac{-Bbbxzdt}{\sqrt{G}}$; $dn \sin n = \frac{-Cccxydt}{\sqrt{G}}$

Or $y\cos n - z\cos m = \frac{(cc - bb)yz}{\sqrt{G}} = \frac{-Aaayz}{\sqrt{G}}$, & de même $z\cos l - x\cos n = \frac{-Bbbxz}{\sqrt{G}}$; $x\cos m - y\cos l = \frac{-Cccxy}{\sqrt{G}}$;

d'où l'égalité eſt évidente. Mais la principale circonſtance qui fournit cette commodité, eſt que $a^4xx + b^4yy + c^4zz$ eſt une quantité conſtante $= G$, ſans laquelle il n'y auroit point $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Pour cet effet il faut obſerver, qu'il y a non ſeulement $Aaa + Bbb + Ccc = 0$, mais auſſi $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$, de ſorte que tant $aaxx + bbyy + cczz$ que $a^4xx + b^4yy + c^4zz$ ſont des quantités conſtantes. Mais dévelopons quelques cas particuliers.

I. Si tous les momens d'inertie ſont égaux.

LX. Puisque $aa = bb = cc$, nous aurons $A = o$, $B = o$, $C = o$, & partant $x = V\mathfrak{A}$; $y = V\mathfrak{B}$, & $z = V\mathfrak{C}$. Donc $s = V(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$. La viteſſe angulaire s demeurera donc toujours la même, & l'axe de rotation ne changera point par rapport aux axes principaux, puisque les arcs AO, BO, CO demeurent auſſi conſtans. Enſuite, à cauſe de $\text{cof}\,l = \frac{aaV\mathfrak{A}}{aaV(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})} = \text{cof}\,AO$, $\text{cof}\,m = \text{cof}\,BO$, & $\text{cof}\,n = \text{cof}\,CO$, le point fixe P tombe en O. D'où nous voyons que l'axe de rotation IO demeure auſſi fixe. Concevons donc le point O en P, & l'angle $QOA = \lambda$ ſera exprimé par cette équation :

$$d\lambda = \frac{-duV(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}{V\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = -dtV(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) = -sdt$$

qui eſt par conſéquent proportionel au tems. Tout cela revient à ce qui eſt dejà connu d'ailleurs, qu'un tel corps, où les momens d'inertie ſont égaux entr'eux, quelque mouvement de rotation qu'il ait reçu, le conſerve toujours uniformement, & que l'axe de rotation demeure fixe, ou dirigé conſtamment vers le même point du Ciel.

II. Si deux momens principaux d'inertie ſont egaux entr'eux.

LXI. Soit donc $bb = cc$, & nous aurons $A = o$; $B = 1 - \frac{aa}{cc}$ & $C = \frac{aa}{cc} - 1$, ou $B = -C$. Il faudra donc intégrer cette formule $dt = \frac{du}{V\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - 2Cu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}$, d'où $t = \frac{1}{2CV\mathfrak{A}}\,\text{Arc. ſin}\,\frac{4Cu - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}} - \frac{1}{2CV\mathfrak{A}}\,\text{Arc. ſin}\,\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$ pour

pour faire en ſorte que u évanouiſſe, poſant $t = 0$. Nous aurons donc pour le tems écoulé de t ſecondes

$$u = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{4C} \text{ſin } 2C(t + \delta)\sqrt{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{4C}$$

prenant δ en ſorte que ſin. $2C\delta\sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$, & partant

$\text{cof } 2C\delta\sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$: par conſéquent

$$u = \frac{2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{4C} \text{ſin } 2Ct\sqrt{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{4C}(1 - \text{cof } 2Ct\sqrt{\mathfrak{A}}) \text{ ou}$$

$$u = \frac{(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\text{ſin } Ct\sqrt{\mathfrak{A}} + 2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}.\ \text{cof } Ct\sqrt{\mathfrak{A}}}{2C} \text{ſin } Ct\sqrt{\mathfrak{A}}.$$

& de là:

$x = \sqrt{\mathfrak{A}}$; $y = \sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)}$; $z = \sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}$ & $s = \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$

LXII. La viteſſe de rotation demeure donc toujours la même, & puisque $\text{cof } AO = \frac{x}{s} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$, l'axe principal IO, par rapport auquel le moment d'inertie eſt $= Maa$, les deux autres étant égaux entr'eux $= Mcc$, cet axe conſervera toujours la même inclinaiſon à l'axe de rotation IO. Enſuite, qu'on prenne un tel point fixe P qu'il y eût au commencement $\text{cof } PA = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$;

$\text{cof } PB = \frac{cc\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{G}}$, & $\text{cof } PC = \frac{cc\sqrt{\mathfrak{C}}}{\sqrt{G}}$, où $G = \mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}c^4 + \mathfrak{C}c^4$;

& après le tems de t ſecondes on aura

$$\text{cof } PA = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}};\ \text{cof } PB = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)}}{\sqrt{G}};\ \text{cof } PC = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}}{\sqrt{G}}$$

de

de ſorte que le point A conſerve toujours la même diſtance AP du point fixe P. Enfin, prenant $F = \mathfrak{A} aa + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) cc$, on aura $d\lambda = \frac{-dt}{cc} V(\mathfrak{A} a^4 + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) c^4)$, ou bien le point A tournera uniformement autour du point P. De même, pour l'angle $QPO = \phi$ on aura $d\phi = \frac{-dt}{cc} VG$, où l'angle APO eſt auſſi conſtant.

LXIII. Puisque l'arc PA eſt conſtant, ſon coſinus étant $= \frac{aaV\mathfrak{A}}{VG}$, & que cet arc tourne uniformement autour du point fixe P avec la viteſſe angulaire $= V(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \frac{\mathfrak{A} a^4}{c^4})$ dans le ſens RQ, au lieu de conſidérer le point O, examinons l'angle PAB, dont le coſinus eſt $= \frac{\cos m}{\sin l} = \frac{V(\mathfrak{B} - 2Cu)}{V(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$, & le ſinus $= \frac{-\cos n}{\sin l} = \frac{-V(\mathfrak{C} + 2Cu)}{V(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$. Le coſinus de cet angle étoit au commencement $= \frac{V\mathfrak{B}}{V(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$, & ſon ſinus $= \frac{-V\mathfrak{C}}{V(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$. Donc, poſant après le tems t cet angle $PAB = \omega$, nous aurons $d\omega \cos\omega = \frac{-Cdu}{V(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})(\mathfrak{C} + 2Cu)}$, & partant $d\omega = \frac{-Cdu}{V(\mathfrak{B} - 2Cu)(\mathfrak{C} + 2Cu)} = -Cdt V\mathfrak{A}$.

D'où nous voyons que l'arc AB tourne uniformement autour du point A, dans le ſens BP, avec la viteſſe angulaire $= CV\mathfrak{A}$. De cette manie-

maniere on ſe repréſentera le plus diſtinctement le mouvement du corps, en diſant que le point du corps A tourne uniformement autour du point fixe P, & que cependant le corps lui même tourne uniformement autour du point A.

LXIV. Puisque les poles B & C peuvent être pris à volonté, pourvu qu'ils ſoient éloignés du pole A de 90°, le mouvement d'un tel corps pourra être repréſenté en général de cette maniere. Premierement, le pole A tournera autour d'un point fixe P uniformement, pendant que le corps lui même tourne auſſi uniformement autour du pole A. Enſuite, poſant l'arc $AP = \zeta$, la viteſſe angulaire, dont l'arc PA tourne autour de P vers PQ, $= \varepsilon$, & la viteſſe angulaire, dont le corps tourne autour du pole A dans le ſens BP, $= \delta$.

Les équations $\text{cof}\,\zeta = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$ ou $\text{tang}\,\zeta = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}$;

$\varepsilon = \sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\frac{\mathfrak{A}a^4}{c^4})}$ & $\delta = (\frac{aa}{cc}-1)\sqrt{\mathfrak{A}}$, donnent

$$\frac{\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{\sqrt{\mathfrak{A}}} = \frac{aa}{cc}\text{tang}\,\zeta \;\&\; \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{cc}{aa-cc}\sqrt{(\frac{a^4}{c^4}\text{tang}\,\zeta^2+\frac{a^4}{c^4})} = \frac{aa}{(aa-cc)\,\text{cf}\,\zeta},$$

de ſorte que $\varepsilon : \delta = aa : (aa-cc)\,\text{cof}\,\zeta$. Qui eſt le rapport entre les viteſſes angulaires ε & δ.

REMARQVES GÉNÉRALES

SUR LE

MOUVEMENT DIURNE DES PLANETES

PAR M. EULER.

Table III. Après la découverte de la véritable préceſſion des équinoxes, & de la nutation de l'axe de la terre, on répreſente en ſorte le mouvement diurne de la terre, que pendant qu'elle tourne uniformement autour de ſon axe, cet axe même ait un certain mouvement, par lequel il réponde ſucceſſivement à differens points du Ciel: & l'on a dreſſé des tables à l'aide desquelles on calcule pour chaque tems propoſé, tant la longitude des poles de la terre que leur diſtance aux poles de l'écliptique.

Cette maniere d'enviſager le mouvement diurne de la terre paroit d'abord la plus naturelle & la plus convenable pour la pratique: & on aura de la peine à s'imaginer qu'elle ſoit aſſujettie à de fort grandes difficultés, non pas à l'égard des petites irrégularités de ce mouvement, lesquelles peut-être ne ſont pas encore toutes connues, mais à l'egard de la maniere même de concevoir ce mouvement.

Car d'abord je demande, qu'eſt-ce que l'axe de la terre? On me répondra bien, que c'eſt une certaine ligne droite qui paſſe par le centre, ou plutôt le centre de gravité de la terre, autour de laquelle la terre acheve ſes révolutions. Quelque claire que paroiſſe cette définition, j'y trouve de fort grandes difficultés: car comment eſt-ce que nous connoiſſons cette ligne qu'on nomme l'axe de la terre? On recourra au Ciel, où, l'on dira, qu'on découvre toujours deux points diamétralement oppoſés, qui ſemblent du moins pour quelque tems être en repos, & autour

tour desquels le Ciel avec les étoiles nous paroit achever ſes révolutions. On nomme ces points les poles de la terre, & la droite tirée de l'un à l'autre, entant qu'elle paſſe par le centre de la terre, ſon axe. Je ne m'arrêterai pas ici à l'objection qu'on pourroit tirer de la diſtance des étoiles, que l'on peut bien regarder comme infinie, même par rapport au diametre de l orbite de la terre. Je conviens plutôt, que quel que ſoit le mouvement de la terre, il y a toujours au Ciel deux points en repos, qui ſemblent immobiles pour un inſtant au moins. Or, puisque ces points ſont variables, on ſuppoſe gratuitement, que la ligne droite tirée de l'un à l'autre paſſe toujours par les mêmes points de la terre: & ſi cela n'arrivoit pas, les poles terreſtres ne ſeroient pas des points fixes ſur la ſurface de la terre, comme on le ſoutient. Mais il y a plus; ces points fixes du Ciel ne repondent pas à l'axe prétendu de la terre. Car, puisque cet axe eſt ſuppoſé mobile, les points au Ciel, vers lesquels il eſt dirigé, le ſeront auſſi; & partant on ne ſauroit dire qu'ils ſont ces points fixes du Ciel, autour desquels le Ciel tourne au moins pendant un inſtant. Il eſt vrai que le mouvement de l'axe de la terre eſt ſi lent, qu'on peut le regarder pendant longtems comme immobile: & c'eſt auſſi la raiſon, pourquoi l'incongruité dont je parle ici, n'eſt d'aucune conſéquence. Mais, pour mettre cette matiere dans tout ſon jour, concevons une autre Planete, qui tourne comme la terre autour d'un certain axe; mais que cet axe lui même ait un mouvement beaucoup plus rapide, de ſorte que les points du Ciel vers lesquels cet axe eſt dirigé, changent tous les inſtans aſſès ſenſiblement de place: & il eſt évident qu'on ne ſauroit ſoutenir, que le Ciel tourne autour de ces points pendant un ſeul inſtant.

Voudra-t-on inſiſter ſur le mot d'inſtant, & dire que, quelque rapide que ſoit le mouvement desdits points dans le Ciel, on les peut pourtant regarder comme fixes pendant un inſtant, & y rapporter le mouvement angulaire du Ciel, attendu que pendant un inſtant ces points ne changent pas de place. Mais on pourroit dire la même choſe de tous les autres points du Ciel avec autant de fondement; & on réduiroit par ce moyen le Ciel tout entier au repos, quelque ra-

pide que fût ſon mouvement. D'ailleurs la raiſon alléguée, qu'on puiſſe regarder un point en repos pendant un inſtant, quoiqu'il ſoit en mouvement, eſt tout à fait fauſſe: car il ne s'agit pas ici du changement de place, qui évanouit toujours dans un inſtant, quelque rapide que ſoit le mouvement, mais du véritable repos, du moins pendant un inſtant; puiſqu'on ſait que la viteſſe ne dépend pas du tems. Donc, quand on dit que les points autour desquels le Ciel tourne, ſont fixes pendant un inſtant; on ne veut pas dire qu'ils ne changent pas de place, mais que leur viteſſe eſt effectivement nulle. Or un tel repos ne convient pas abſolument aux points du Ciel, vers lesquels eſt dirigé l'axe mobile de quelque planete: & partant, ſi nous jugeons du mouvement diurne d'une planete par le mouvement apparent du Ciel, qui ſe fait toujours autour d'un axe fixe pendant un inſtant, il eſt certain que cet axe du Ciel ne convient pas avec l'axe mobile de la planete, autour duquel on conçoit qu'elle tourne, & que cette maniere de repréſenter le mouvement diurne des Planetes n'eſt pas d'accord avec les Obſervations du Ciel, d'où l'on détermine la poſition & le mouvement de leurs axes.

Or l'idée même d'un corps qui tourne autour d'un axe, pendant que cet axe ſe meut d'un mouvement quelconque, eſt aſſujettie à de grandes difficultés, qu'on rencontre même en ne conſidérant les choſes qu'*in abſtracto*. Car, ſoit QRST un corps ſphérique qui tourne autour d'un axe, qui paſſe par ſon centre & le point P, pendant que ce point P, qu'on nommera ſon pole, eſt emporté par un mouvement quelconque, le centre demeurant toujours en repos. Que ce pole ſoit maintenant en P, autour duquel concevons un cercle ABCD, ou plutôt quatre points A, B, C, D; & en quelque endroit O que le pole P ſoit transporté, il s'agit de déterminer les lieux où ces quatre points ſe trouveront alors, tant à cauſe du mouvement de rotation autour de ce pole, qu'à cauſe du mouvement propre du pole. Car il eſt clair, que la connoiſſance de ce mouvement compoſé exige la poſition de ces quatre points pour tous les endroits O, où le pole P parvient ſucceſſivement.

Fig. 1.

Or,

Or, quelque aiſée que paroiſſe cette queſtion, en ſuppoſant connu, tant le mouvement du pole P, que la viteſſe angulaire du corps autour de ce pole pour chaque tems propoſé; pour peu qu'on y réfléchiſſe, on y rencontrera des obſtacles inſurmontables. Nous n'avons qu'à en conſidérer le cas le plus ſimple, où le mouvement de rotation eſt ſuppoſé nul: & il n'y a point de doute que, quand le pole P ſeroit transporté en Q, après avoir parcouru le quart de cercle PQ, les quatre points A, B, C, D ne ſe trouvent aux points a, b, c, d, marqués dans la figure. Mais, par la même raiſon, ſi le pole P étoit transporté en R par l'arc de cercle PR, les points A, B, C, D, devroient ſe trouver en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: & ſi le pole paſſoit de R en Q, les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, parviendroient en b, c, d, a, dont la poſition eſt tout à fait différente de celle que ces points auroient, ſi le pole P étoit transporté en Q par l'arc PQ; quoique dans l'un & l'autre cas le mouvement de rotation ſoit ſuppoſé nul. D'ailleurs la queſtion ne fournit aucune raiſon, pourquoi la poſition des points A, B, C. D, devroit être différente, ſelon que le pole ſeroit parvenu par différens chemins de P en Q. Il ne ſera donc pas poſſible d'aſſigner la poſition de ces quatre points, quand le pole P ſera parvenu à un lieu quelconque O: & à plus forte raiſon, la queſtion envelopera des incongruités, quand on ſuppoſe au corps un mouvement de rotation.

On peut même regarder cette queſtion comme indéterminée; & il y faudroit ajouter encore une condition, qui détermineroit le mouvement du corps au cas même, où le mouvement de rotation eſt ſuppoſé évanouïſſant. La moins choquante ſeroit à mon avis de dire que, dans ce cas, les points A, B, C, D, conſervaſſent conſtamment la même ſituation à l'égard de la direction, ſuivant laquelle le pole ſe meut à chaque inſtant. Cette condition conviendroit encore le mieux avec les idées que nous nous formons ſur l'abſence d'un mouvement de rotation, & expliqueroit la diverſe poſition desdits points, le pole étant parvenu en Q, ou par l'arc PQ, ou par le chemin PRQ. Mais il faut avouer que cette condition eſt tout à fait étrangere aux principes de la Mécanique. Cependant, en l'admettant, on eſt en état de déterminer

le vrai mouvement du corps, dès que celui du pole & celui de rotation ſeroient donnés pour chaque inſtant.

Mais, quoiqu'on voulût ſe ſervir de cette maniere pour repréſenter le mouvement d'une Planete ſur ſon centre, il n'y auroit rien qui nous obligeroit de regarder un point de la Planete comme ſon pole, plutôt que tout autre. Ainſi, lorsqu'il s'agit de la terre, on pourroit prendre un point quelconque de ſa ſurface pour ſon pole, & le vrai mouvement de ce point ſeroit le mouvement du pole. Enſuite, on pourroit concevoir pour chaque lieu de ce pole un certain mouvement de rotation, lequel joint au mouvement du pole produiroit le vrai mouvement de la terre. Il eſt vrai que cette repréſentation deviendroit pour la plûpart fort compliquée, quelque ſimple qu'on ſuppoſât le mouvement en lui-même; mais il faut avouer que cette idée ne contient rien, qui nous indique les points préférables à tous les autres, où l'on devroit placer les poles. On dira bien qu'il eſt raiſonnable de choiſir ceux qui ſont aſſujettis au plus petit mouvement; mais cette regle n'eſt pas eſſentielle au ſujet, & quoiqu'il y ait de tels points ſur la terre, on a lieu de douter encore, ſi les autres planetes ſont douées de tels points. Peut-être que, quand même il y auroit de tels points pour un certain tems, ces mêmes points acquerroient dans la ſuite un mouvement plus rapide que d'autres.

Or ces inconvéniens n'ont pas lieu dans l'autre maniere de repréſenter le mouvement diurne des planetes, en déterminant pour chaque tems les points du Ciel autour desquels la Planete tourne, du moins pendant un inſtant, comme autour de points fixes; & en aſſignant pour chaque inſtant la viteſſe de cette rotation. Pour mieux comprendre cette maniere, & pour en voir la diverſité d'avec la précédente, concevons encore un corps ſphérique, (car la figure ne change rien dans notre recherche,) qui ſoit entouré d'une ſurface ſphérique immobile pour pouvoir y rapporter le mouvement du corps. Qu'il tourne au commencement autour du point A; & après un
Fig. 2. tems $= t$ autour du point P de la ſurface immobile, de ſorte qu'on puiſſe pour chaque moment aſſigner le point de la ſurface immobile,

autour

autour duquel le corps tourne alors avec la viteſſe de rotation. Ce n'eſt donc pas le point du corps A, qui parvient après le tems t en P, mais P eſt plutôt un point imaginaire dans la ſurface immobile, qui repréſente le pole de rotation pour un inſtant. Or, quoiqu'un moment après la rotation ſe faſſe autour du point p, il ne faut pas s'imaginer que le point P ait été tranſporté en p, l'un & l'autre demeurant fixe: ce qui diſtingue eſſentiellement cette maniere de la précédente.

Pour déterminer plus aiſément ce mouvement, concevons dans la ſurface immobile un point fixe Z, auquel on tire les arcs de grands cercles AZ, PZ & pZ. Et puisqu'au commencement A eſt le pole de rotation, ſoit $AZ = a$. Enſuite, après le tems $= t$, le pole de rotation étant en P, ſoit l'angle $AZP = q$, & l'arc $ZP = p$, poſant le rayon de la ſphere $= 1$, de ſorte que p & q ſoient des fonctions du tems t; d'où pour le tems $t + dt$ on aura l'angle $PZp = dq$, & l'arc $Zp = p + dp$. Pour la viteſſe angulaire, ſuppoſons qu'au commencement le pole étant en A, le corps tourne dans le tems infiniment petit dt par l'angle $= n\,dt$; & après le tems t, le pole étant en P, par l'angle $= v\,dt$. Cela poſé, voyons quel ſera le mouvement d'un point quelconque du corps, qui au commencement aura été en M.

Poſons donc l'arc $AM = f$, & l'angle $ZAM = g$; or, après le tems t, ce point ſoit parvenu en V, & nommons l'arc $PV = x$, & l'angle $ZPV = y$, qui ſont les deux quantités qu'il faut déterminer pour connoitre le vrai mouvement du point M. Donc, puisque le corps tourne autour du pole fixe P, pendant le tems dt, le point V ſera transporté en v, de ſorte que l'arc $Pv = PV = x$, & l'angle $VPv = v\,dt$, par conſéquent l'angle $ZPv = y - v\,dt$. Or v ſera le lieu de notre point après le tems $t + dt$ depuis le commencement, le pole étant maintenant en p; & partant nous aurons $pv = x + dx$, & l'angle $Zpv = y + dy$.

Tirons de P ſur Zp, & de p ſur Pv, les perpendiculaires Pq & pr; & à cauſe de l'angle $PZp = dq$ & $ZP = p$, nous aurons

pq

$pq = dp$ & $Pq = dq \sin p$. Donc, $Pp = V(dp^2 + dq^2 \sin p^2) = ds$ pour abréger: & de là $\sin pPq = \frac{dp}{ds}$, & $\cos pPq = \frac{dq \sin p}{ds}$. Or l'angle ZPq étant droit, nous aurons $\sin ZPp = \frac{dq \sin p}{ds}$ & $\cos ZPp = \frac{-dp}{ds}$. Maintenant, l'angle ZPv étant $= y - v\,dt$, ou en négligeant la particule infiniment petite $v\,dt$, seulement $= y$, on en tire $\sin pPr = \sin(y - ZPp) = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{ds}$, & $\cos pPr = \cos(y - ZPp) = \frac{-dp \cos y + dq \sin p \sin y}{ds}$,

Donc $pr = -dp \sin y - dq \sin p \cos y$ & $Pr = -dp \cos y + dq \sin p \sin y$, d'où nous concluons $pv = Pv - Pr$ ou $x + dx = x + dp \cos y - dq \sin p \sin y$, de sorte que nous ayons

$$dx = dp \cos y - dq \sin p \sin y.$$

De là nous connoitrons auſſi l'angle Pvp, puisque $pr = Pvp \sin pv$, ce qui donne $Pvp = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x}$.

Mais ces déterminations ne ſont pas ſuffiſantes pour définir l'angle $Zpv = y + dy$, & en tirer la valeur différentielle dy; car, puiſqu'il s'agit d'une différence infiniment petite, il ne ſera plus permis de négliger dans les angles Ppq & Ppr ces particules infiniment petites: mais, ſi nous en voulions tenir compte, nous tomberions dans des formules très embarraſſantes. Or le plus ſur moyen nous eſt fourni par ce beau théoreme ſur l'aire des triangles ſphériques, qui eſt toujours égale à l'excès des trois angles ſur deux droits, poſant le rayon de la ſphere $= 1$. Donc l'aire du quadrilatere $ZPvp$ eſt égale à l'excès de ſes quatre angles ſur 4 droits, dont la meſure eſt $= 2\pi$, prenant $\frac{1}{2}\pi$ pour

pour la meſure d'un angle droit. Or les quatre angles de cette figure ſont 1°. $PZp = dq$; 2°. $ZPv = y - vdt$; 3°. $Pvp = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x}$ & 4°. $Zpv = 2\pi - y - dy$; & partant l'excès de leur ſomme ſur 4 droits ou, 2π, eſt

$$dq - vdt - \frac{dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x} - dy,$$

qui exprime l'aire de la figure. Mais on ſait que l'aire du triangle PZp eſt $= dq(1 - \cos p)$, & du triangle $Pvp = \frac{-(dp \sin y + dq \sin p \cos y)}{\sin x}$ $(1 - \cos x)$; dont la ſomme étant égalée à l'expreſſion trouvée produit cette équation:

$$-vdt - dy = -dq \cos p + \frac{dp \sin y + dq \sin p \cos y}{\text{tang } x}$$

d'où nous tirons

$$dy = -vdt + dq \cos p - \frac{dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\text{tang } x}.$$

Cette équation jointe à la premiere, qui eſt

$$dx = dp \cos y - dq \sin p \sin y;$$

contient la ſolution du probleme; où p, q & v, ſont regardés comme des fonctions du tems t.

Voilà donc deux équations différentielles, d'où il faut déterminer les deux inconnues x & y. La choſe reviendroit au même, ſi au lieu de ces deux inconnues on vouloit chercher l'angle AZV avec l'arc ZV; & alors on arrivera au but par la ſyntheſe ſuivante, qui eſt fort ſimple. Fig. 3.

Puisque $ZP = p$, $AZP = q$, & $VPv = vdt$, poſons l'angle $AZV = u$, & l'arc $ZV = z$, pour ſavoir l'angle $PZV = u - q$.

Tirons ſur Z V les perpendiculaires P R & $v s$, de même que l'arc Vv, qui ſera perpendiculaire ſur les arcs égaux P V & Pv, & nous aurons Vv = $v dt$ ſin PV, & ſin PR = ſin ZP. ſin PZV = ſin P V. ſin P V Z, de ſorte que ſin P V. ſin P V Z = ſin p ſin (u — q). Or la Trigonométrie ſphérique donne

$$\text{tang PVZ} = \frac{\text{ſin } p \text{ ſin } (u - q)}{\text{coſ } p \text{ ſin } z - \text{ſin } p \text{ coſ } (u - q)}$$

Mais, puisque Vs = — dz, & Vs = Vv coſ sVv = Vv ſin PVZ, nous aurons d'abord

$$- dz = v dt \text{ ſin PV ſin PVZ} = v dt \text{ ſin } p \text{ ſin } (u - q)$$

Enſuite, à cauſe de VZv = du, on aura vs = du ſin z. Or vs = Vs cot PVZ, ou — dz = du ſin z tang PVZ d'où nous tirons cette ſeconde équation:

$$- dz = \frac{du \text{ ſin } p \text{ ſin } z \text{ ſin } (u - q)}{\text{coſ } p \text{ ſin } z - \text{ſin } p \text{ coſ } z \text{ coſ } (u - q)} = v dt \text{ ſin } p \text{ ſin } (u - q)$$

de ſorte que nous ayons ces deux équations

I. $0 = dz + v dt \text{ ſin } p \text{ ſin } (u - q)$

II. $du \text{ ſin } z = v dt \text{ (coſ } p \text{ ſin } z - \text{ſin } p \text{ coſ } z \text{ coſ } (u - q))$

Or ayant trouvé z & u, on en tire

coſ PV = coſ x = coſ p coſ z + ſin p ſin z coſ (u — q) &

$$\text{tang ZPV} = \text{tang } y = \frac{\text{ſin } z \text{ ſin } (u - q)}{\text{ſin } p \text{ coſ } z - \text{coſ } p \text{ ſin } z \text{ coſ } (u - q)}$$

Puisque le rapport de ces dernieres coordonnées u & z aux précedentes x & y eſt connu, ces dernieres formules ſe réduiſent aux premieres. Cependant il ne paroit pas, comment on puiſſe réſoudre en général ces équations, & pour des cas particuliers on ſe ſervira plus commodément, tantôt des unes, & tantôt des autres. Comme s'il n'y avoit aucun mouvement de rotation, ou qu'il fut v = 0, les dernie-

dernieres formules montrent d'abord $dz = 0$, & $du = 0$; d'où l'on voit que dans ce cas tous les points du corps ne changent pas de place.

Conſidérons le cas où le pole P demeure en repos, quel que ſoit le mouvement de rotation $v\,dt$; ce qui arrive lorsque p & q ſont des quantités conſtantes: alors les premieres donnent d'abord $dx = 0$, & partant $x = \text{conſt.}$ Soit donc $x = f$, & l'autre $dy = -v\,dt$, & partant $y = g - \int v\,dt$. Or les dernieres formules méneroient pour ce cas à un calcul fort ennuyeux.

Suppoſons, comme il arrive à peu prés ſur la terre, que le pole P ſe meut uniformement dans un petit cercle AP autour du point fixe Z, qui repréſente le pole de l'écliptique, & que le mouvement de rotation demeure toujours le même. On aura donc $p = a$; $dq = m\,dt$ & $v = n$; d'où les premieres formules donnent:

$$dx = -m\,dt \sin a \sin y \;\&\; dy = -n\,dt + m\,dt \cos a - \frac{m\,dt \sin a \cos y}{\text{tang } x}$$

& partant l'une diviſée par l'autre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n - m\cos a}{m \sin a \sin y} + \frac{1}{\text{tang } x \text{ tang } y}.$$

Multiplions par $dx \sin x \sin y$ pour avoir

$$dy \sin x \sin y - dx \cos x \cos y = \frac{n - m\cos a}{m \sin a}\, dx \sin x$$

dont l'intégrale eſt,

$$-\sin x \cos y = C + \frac{m\cos a - n}{m \sin a} \cos x.$$

Donc $$\cos y = \frac{(n - m\cos a)\cos x}{m \sin a \sin x} - \frac{h}{\sin x}.$$

Poſons pour abréger $\frac{n - m\cos a}{m \sin a} = k$, de ſorte que $\cos y = \frac{k\cos x - h}{\sin x}$

& $dy = -kmdt\sin a - \frac{mdt\sin a\,(k\cos x - h)}{\sin x\tang x}$, ou bien

$dy = \frac{-mdt\sin a\,(k - h\cos x)}{\sin x^2}$. Or la valeur de $\cos y$ donne

$dy\sin y = \frac{dx\,(k - h\cos x)}{\sin x^2}$; & cette valeur ſubſtituée mene à cette équation: $-mdt\sin a\sin y = dx$. Mais, à cauſe de

$$\sin y = \frac{+\sqrt{(\sin x^2 - kk\cos x^2 + 2hk\cos x - hh)}}{\sin x},$$

nous aurons: $mdt\sin a = \frac{-dx\sin x}{\sqrt{(1-hh+2hk\cos x-(1+kk)\cos x^2)}}$.

dont l'intégrale ſe trouve

$$mt\sin a + C = \frac{1}{\sqrt{(1+kk)}}\,A\sin\frac{(1+kk)\cos x - hk}{\sqrt{(1-hh+kk)}}.$$

& partant

$$\cos x = \frac{hk}{1+kk} + \frac{\sqrt{(1-hh+kk)}}{1+kk}\sin\left(C + mt\sin a\sqrt{(1+kk)}\right)$$

Enſuite, ayant trouvé x pour le tems écoulé t, on aura

$$\cos y = \frac{k\cos x - h}{\sin x}, \text{ ayant poſé } k = \frac{n - m\cos a}{m\sin a}.$$

Pour déterminer les conſtantes h & C, ſupoſons qu'il y eût au commencement $x = AM = f$, & l'angle $y = ZAM = g$: donc

$\cos g = \frac{k\cos f - h}{\sin f}$; & partant $h = k\cos f - \sin f\cos g$;

d'où l'on obtient

$$\sqrt{(1-hh+kk)} = \sqrt{(\sin g^2 + (k\sin f + \cos f\cos g)^2)}$$

Enſui-

Enſuite pour la conſtante C on aura:

$$\frac{(1+kk)\cos f - kk\cos f + k\sin f\cos g}{V(\sin g^2 + (k\sin f + \cos f\cos g)^2)} = \sin C = \frac{\cos f + k\sin f\cos g}{V(\sin g^2 + (k\sin f + \cos f\cos g)^2)}$$

Donc $\cos C = \frac{\sin f \sin g\, V(1 + kk)}{V(\sin g^2 + (k\sin f + \cos f\cos g)^2)}$, &

$$\text{tang } C = \frac{\cos f + k\sin f\cos g}{\sin f \sin g\, V(1 + kk)}$$

Par conſéquent nous aurons:

$$\cos x = \frac{kk\cos f - \sin f\cos g + (\cos f + k\sin f\cos g)\cos\odot + \sin f\sin g\sin\odot . V(1+kk)}{1+kk}$$

poſant $m\,t \sin a.\ V(1 + kk) = \odot$, & enſuite

$$\cos y = \frac{k\cos x - k\cos f + \sin f\cos g}{\sin x}$$

A' l'aide de ces deux formules on pourra déterminer le mouvement de chaque point du corps, qui ſera d'autant plus variable, plus les cöefficiens de $\sin\odot$ & $\cos\odot$ ſeront grands, qui dépendent du lieu du point M, dont on cherche le mouvement. Or on pourroit prendre un tel point, que ces cöefficiens évanouïſſent tous les deux; & alors, tant x que y, ſeront des quantités conſtantes; & ce point conſervera toujours la même ſituation par rapport au pole, autour duquel la planete tourne à chaque inſtant. Le mouvement de ce point ſera donc auſſi lent que le changement du pole, & paroitra délivré de toute rotation. Ce ſera donc le point, qu'on pourra regarder dans la premiere maniere comme le pole de la planete, ou la droite qui en eſt tirée par le centre, comme l'axe de la planete, quoique ce point ſoit toujours différent du point du Ciel autour duquel ſe fait la rotation à chaque inſtant.

Pour trouver donc ce point, ou l'axe de la Planete, on n'a qu'à prendre f & g en ſorte que $\text{tang}\ \sin f \sin g$ que $\cos f + k \sin f \cos g$

évanouiſſe. Poſons donc g, ou l'angle ZAM $=$ 180°, pour avoir ſin g, $=$ 0, & cof $g = -1$; & nous trouverons tang $f = \frac{1}{k} = \frac{m \text{ ſin } a}{n - m \text{ cof } a}$: d'où nous connoiſſons l'arc AM $= f$; & alors ce point M conſervera toujours la même diſtance au pole P, & ſe trouvera dans l'arc ZP prolongé, lorsque f a une valeur poſitive.

Pour la terre cette diſtance f évanouït presque tout à fait. Car, puisque dans l'intervalle d'un jour la terre fait une révolution entiere, & le pole n'avance dans un ſens contraire que par un angle $= \frac{51}{365}$ ſecondes, nous aurons $n : m = 360° : \frac{-51''}{365}$, ou $\frac{n}{m} = \frac{-60.60.360.365}{51}$ ou $\frac{n}{m} = -9281647$. Donc, puisque $n = 23°, 29'$, nous aurons tang $f = \frac{-0,3984}{9281647}$, & $f = -\frac{1}{112}$ ſeconde. Puisque cette différence eſt imperceptible, on peut ſans aucune erreur regarder ce point comme le vrai pole de la terre.

Comme l'exiſtence d'un tel axe qui accompagne toujours également le vrai pole, a lieu dans l'hypotheſe, que le pole avance uniformement dans un petit cercle, & que la planete conſerve toujours la même viteſſe de rotation, il ſera important d'examiner, en quelles autres hypotheſes un tel axe puiſſe auſſi exiſter. Pour cet effet nous n'avons qu'à ſuppoſer conſtamment $x = f$, & $y = g$, afin que le point M nous montre cet axe. Alors nos premieres équations nous fourniſſent

$$dp \text{ cof } g - dq \text{ ſin } p \text{ ſin } g = 0 \quad \& \quad v\,dt = dq \text{ cof } p - \frac{dp \text{ ſin } g - dq \text{ ſin } p \text{ cof } g}{\text{tang } f}$$

d'où

d'où nous tirons $dq = \frac{dp \cos g}{\sin g \sin p}$, & de là

$$v\,dt = \frac{dp \cos g \cos p}{\sin g \sin p} - \frac{dp}{\tang f \sin g}.$$

Ou bien il faut 1°. que $\frac{dq \sin p}{dp}$ ſoit une quantité conſtante, & 2°, que $\frac{dq \cos p}{dp} - \frac{v\,dt}{dp}$ ſoit auſſi une quantité conſtante, ſavoir la premiere égale à $\frac{\cos g}{\sin g}$, & la ſeconde à $\frac{1}{\tang f \sin g}$. Quand un tel rapport entre le mouvement du pole & celui de rotation n'a pas lieu, il eſt douteux ſi le mouvement de la planete peut être réduit à un certain axe, comme dans ce cas. Car, s'il arrivoit, par exemple, que pendant que le pole marche uniformement dans un petit cercle, le mouvement de rotation devint ſubitement plus rapide, il eſt clair qu'après cette accélération l'axe de rotation ſeroit différent de celui qui auroit eu lieu auparavant, & que la planete n'auroit pas un axe fixe, dans le ſens auquel on eſt accoutumé de ſe l'imaginer.

Par ce que je viens d'expoſer, on comprend que c'eſt un probleme extrémement difficile, que de déterminer le mouvement de rotation d'une planete, quoiqu'on connoiſſe pour chaque tems le point du Ciel, autour duquel elle tourne avec la viteſſe de rotation. La ſolution dépend de l'intégration de deux équations différentielles, qui paroit extrémement difficile. Conſidérons plus ſoigneuſement les deux premieres, & poſant pour abréger,

$$-v + \frac{dq \cos p}{dt} = L;\ \frac{dp}{dt} = M \text{ \& } \frac{dq \sin p}{dt} = N$$

de ſorte que L, M, & N, ſoient des fonctions du tems t, & nos deux équations pour déterminer les inconnues $PV = x$ & $ZPV = y$ ſeront.

dx

$dx = M\,dt\,\cos y - N\,dt\,\sin y$; $dy = L\,dt - \frac{M\,dt\,\sin y - N\,dt\,\cos y}{\text{tang } x}$

ou $dy \sin x = L\,dt \sin x - M\,dt \cos x \sin y - N\,dt \cos x \cos y$

d'où nous tirons les deux combinaiſons ſuivantes,

$dx \cos x \sin y + dy \sin x \cos y = L\,dt \sin x \cos y - N\,dt \cos x = d.\sin x \sin y$

$dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y = M\,dt \cos x - L\,dt \sin x \sin y = d.\sin x \cos y$.

Pour dégager ces formules des ſinus & coſinus, poſons $\sin x \sin y = r$ & $\sin x \cos y = s$, d'où nous tirons $\sin x^2 = rr + ss$ & $\cos x = \sqrt{(1 - rr - ss)}$, & nous obtiendrons les deux équations ſuivantes

$$dr = L\,s\,dt - N\,dt\,\sqrt{(1 - rr - ss)}$$

$$ds = -L\,r\,dt + M\,dt\,\sqrt{(1 - rr - ss)}$$

Voilà donc deux équations différentielles ordinaires, dont il faut chercher la réſolution; ce qui eſt un objet de la pure analyſe. Puisque la réſolution générale eſt aſſujettie à de fort grandes difficultés, il ſera important de remarquer un cas aſſez général, où l'on peut achever l'intégration. Car, en combinant ces dernieres équations, on aura

$$M\,dr + N\,ds + L\,N\,r\,dt - L\,M\,s\,dt = 0.$$

Soit pour abréger $L\,dt = d\theta$; & le cas que j'ai en vüe aura lieu, lorsque $M = N$ tang θ, ou $\int L\,dt = A$ tang. $\frac{M}{N}$. Poſons donc $M = T \sin\theta$, & $N = T \cos\theta$, de ſorte que $T = \sqrt{(MM + NN)}$, & la derniere équation prendra cette forme:

$$dr \sin\theta + ds \cos\theta + r\,d\theta \cos\theta - s\,d\theta \sin\theta = 0$$

dont l'intégrale eſt évidemment

$$r \sin\theta + s \cos\theta = \text{Conſt.} = \sin\gamma.$$

Donc $s = \frac{\sin\gamma - r \sin\theta}{\cos\theta}$; laquelle valeur étant ſubſtituée dans la premiere donne

$dr \cos$

$dr\cos\theta + rd\theta\sin\theta - d\theta\sin\gamma + T\,dt\cos\theta\sqrt{(\cos\theta^2 - \sin\gamma^2 + 2r\sin\gamma\sin\theta - rr)} = 0.$

Posons $r = u\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta$ pour avoir

$du\cos\theta^2 + T\,dt\cos\theta\sqrt{(\cos\theta^2 - \sin\gamma^2 + \sin\gamma^2\sin\theta^2 - uu\cos\theta^2)} = 0$

& en divisant par $\cos\theta^2$

$$du + T\,dt\sqrt{(\cos\gamma^2 - uu)} = 0 \text{ ou } \frac{du}{\sqrt{(\cos\gamma^2 - uu)}} + T\,dt = 0.$$

Donc $A\sin\frac{u}{\cos\gamma} + \int T\,dt = 0.$

Soit $\int T\,dt = \odot$, & ayant $u = -\cos\gamma\sin\odot$, on aura $r = \sin\gamma\sin\theta - \cos\gamma\cos\theta\sin\odot$, & $s = \sin\gamma\cos\theta + \cos\gamma\sin\theta\sin\odot$. Donc $\sin x = \sqrt{(\sin\gamma^2 + \cos\gamma^2\sin\odot^2)}$ & $\cos x = \cos\gamma\cos\odot$. Enfin

$$\text{tang } y = \frac{\text{tang }\gamma\ \text{tang }\theta - \sin\odot}{\text{tang }\gamma + \text{tang }\theta\sin\odot}$$: d'où l'on tire evidemment

$$y = \theta - A\,\text{tang}\,\frac{\text{tang }\gamma}{\sin\odot}.$$

Donc, prenant $\odot = C + \int dt\sqrt{(MM + NN)}$, toutes les fois que $\int L\,dt = A\,\text{tang}\,\frac{M}{N}$, les deux inconnues x & y se déterminent en sorte:

$$\cos x = \cos\gamma\cos\odot \text{ \& } y = A\,\text{tang}\,\frac{M}{N} - A\,\text{tang}\,\frac{\sin\odot}{\text{tang }\gamma}.$$

Ce cas intégrable nous mene encore à quelques autres. Car posons $\sqrt{(1 - rr - ss)} = u$, pour avoir ces deux équations

I. $dr - Lsdt + Nudt = 0$
II. $ds - Mudt + Lrdt = 0$

& puisque $-rdr - sds = udu$, nous en tirons cette troisieme semblable aux précédentes:

III. $du - Nrdt + Msdt = 0.$

Premier cas intégrable. Donc, puisque les deux premieres ont été intégrées dans le cas $\int L\,dt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N}$, en ſorte que poſant

$$\int L\,dt = \theta \;\&\; \int dt \sqrt{(MM + NN)} = \Theta$$

nous en avons obtenu

$$\left.\begin{aligned} r &= \sin\gamma \sin\theta - \cos\gamma \cos\theta \sin\Theta \\ s &= \sin\gamma \cos\theta + \cos\gamma \sin\theta \sin\Theta \end{aligned}\right\} \;\&\; u = \cos\gamma \cos\Theta$$

Second cas intégrable. La ſeconde avec la troiſieme admettra auſſi l'intégration dans le cas $\int M\,dt = A \operatorname{tang} \frac{N}{L}$, car poſant

$$\int M\,dt = \eta \quad \&\; \int dt \sqrt{(NN + LL)} = H$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} s &= \sin\xi \sin\eta - \cos\xi \cos\eta \sin H \\ u &= \sin\xi \cos\eta + \cos\xi \sin\eta \sin H \end{aligned}\right\} \;\&\; r = \cos\xi \cos H$$

Troiſieme cas intégrable. De la même maniere la troiſieme avec la premiere fournira une ſolution lorsque $\int N\,dt = A \operatorname{tang} \frac{L}{M}$. Alors poſant

$$\int N\,dt = \zeta \quad \&\; \int dt \sqrt{(LL + MM)} = \Sigma$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} u &= \sin\alpha \sin\zeta - \cos\alpha \cos\zeta \sin\Sigma \\ r &= \sin\alpha \cos\zeta + \cos\alpha \sin\zeta \sin\Sigma \end{aligned}\right\} \;\&\; s = \cos\alpha \cos\Sigma$$

où il faut remarquer que $\cos x = u$ & $\operatorname{tang} y = \frac{r}{s}$; & outre cela:

$$L = -v + \frac{dq \cos p}{dt}; \quad M = \frac{dp}{dt} \;\&\; N = \frac{dq \sin p}{dt}.$$

Le cas du milieu renferme celui où le pole ſe mouvoit dans un petit cercle uniformément, pendant que la rotation étoit auſſi uniforme; mais

mais il eſt infiniment plus général, d'où il mérite une attention particuliere. Or d'abord nous avons $\int M dt = c + p$, d'où la condition de ce cas $\frac{N}{L} = \text{tang} \int M dt$ donne

$$\frac{dq \sin p}{dq \cos p - v dt} = \text{tang}\,(c + p), \quad \& \text{ partant}$$

$$v dt = \frac{dq \cos p \,\text{tang}\,(c + p) - dq \sin p}{\text{tang}\,(c + p)} = \frac{dq \sin c}{\sin (c + p)}$$

d'où nous concluons $H = \int \frac{dq \sin p}{\sin (c + p)}$ à cauſe de $L = N \cot (c + p)$,

& $\sqrt{(NN + LL)} = \frac{N}{\sin (p + c)}$. Par conſéquent notre ſolution ſera; poſant $\eta = p + c$,

$$\cos x = \sin \mathfrak{G} \cos \eta + \cos \mathfrak{G} \sin \eta \sin H.$$

$$\text{tang}\, y = \frac{\cos \mathfrak{G} \cos H}{\sin \mathfrak{G} \sin \eta - \cos \mathfrak{G} \cos \eta \sin H}$$

Nous avons rapporté jusqu'ici le mouvement du pole à un point fixe Z, qui dépend de notre volonté; ne changeant rien dans le mouvement même. Donc, ayant réuſſi à intégrer nos équations pour un certain point fixe Z, ſi l'on veut rapporter le mouvement à un autre point fixe quelconque, l'intégration doit également réuſſir, puiſqu'elle découle de la précédente.

Délivrons nos recherches de la conſidération du point arbitraire Z; & puiſque l'arc $PV = x$ n'en dépend point, poſons l'angle $VPp = z$, & nous aurons l'angle $ZPV = y = 90° + z + pPv$.

Or, poſant comme ci-deſſus $-v + \frac{dq \cos p}{dt} = L$; $\frac{dp}{dt} = M$;

& $\frac{dq \sin p}{dt} = N$, on aura $\sin pPv = \frac{M}{\sqrt{(MM + NN)}}$, &

$\cos pPv = \frac{}{\sqrt{(MM + NN)}}$, & $\tang pPv = \frac{M}{N}$, & de là

$dy = dz + \frac{N\,dM - M\,dN}{MM + NN}$; & $\sin y = \frac{-M \sin z + N \cos z}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$,

& $\cos y = \frac{-N \sin z - M \cos z}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$.

Cela posé, puisque nos équations sont

$$dx = dt(M \cos y - N \sin y) \;\&\; dy = L\,dt - \frac{dt}{\tang x}(M \sin y + N \cos y)$$

par ces substitutions elles seront changées en

$$dx = -\,dt \cos z \sqrt{(MM + NN)} \quad \&$$

$$dz \sin x = dt \cos x \sin z \sqrt{(MM + NN)} + L\,dt \sin x + \frac{(M\,dN - N\,dM)\,dt \sin x}{MM + NN}$$

Posons pour abréger:

$$\sqrt{(MM + NN)} = I \quad \& \quad L + \frac{M\,dN - N\,dM}{(MM + NN)\,dt} = K,$$

pour avoir

$$dx + I\,dt \cos z = 0 \quad \& \quad dz \sin x - I\,dt \cos x \sin z - K\,dt \sin x = 0$$

Posons comme auparavant

$$\sin x \sin z = r; \; \sin x \cos z = s \quad \& \quad \cos x = u,$$

& la combinaison fournira ces équations:

$$dr - K\,s\,dt = 0 \quad \& \quad ds + K\,r\,dt + I\,u\,dt = 0$$

où, puisque $rr + ss + uu = 1$, cette troisieme y peut être ajoutée: $du - I\,s\,dt = 0$; donc $I\,dr - K\,du = 0$.

Ici

Ici on peut remarquer auſſi trois cas intégrables:

1°. Si $I = o$, ce qui ne ſauroit avoir lieu, à moins qu'il ne fût $M = o$ & $N = o$. Alors on aura $u = c$; & $s = V(1 - cc - rr)$, donc $K\,dt = L\,dt = \frac{dr}{V(1 - cc - rr)}$, & partant

A ſin $\frac{r}{V(1 - cc)} = \int L\,dt = \theta$, poſant $\int L\,dt = \theta$. Enſuite $r = V(1 - cc).\,\text{ſin}\,\theta$; $s = V(1 - cc).\,\text{cof}\,\theta$; & $u = c$: ce qui eſt le cas du pole repoſant.

2°. Le ſecond cas ſeroit $K = o$, mais puisque le troiſieme le renferme, j'y paſſe dabord.

3°. Soit $K = mI$, & l'équation $dr - m\,du = o$ donne: $r = mu + n$; & $s = V(1 - uu - (mu + n)^2)$; d'où la troiſieme donne: $\int I\,dt\,V(1 + mm) = \text{Aſin}\frac{u(1 + mm) + mn}{V(1 + mm - nn)}$:

& de là $u = \frac{-mn}{1 + mm} + \frac{V(1 + mm - nn)}{1 + mm}\,\text{ſin}\int I\,dt\,V(1 + mm)$

$r = \frac{n}{1 + mm} + \frac{mV(1 + mm - nn)}{1 + mm}\,\text{ſin}\int I\,dt\,V(1 + mm)$

& $s = \frac{V(1 + mm - nn)}{V(1 + mm)}\,\text{cof.}\int I\,dt\,V(1 + mm)$.

Ce troiſième cas a donc lieu ſous cette condition:

$$L\,dt = \frac{N\,dM - M\,dN}{MM + NN} + m\,dt\,V(MM + NN),$$

$$\text{ou } \int L\,dt = \text{A tang}\,\frac{M}{N} + m\int dt\,V(MM + NN);$$

d'où, si $m = 0$, réſulte le premier des cas précédens; mais si m eſt une quantité conſtante quelconque, ces cas intégrables ſeront différens des précédens.

On pourra trouver encore d'autres cas intégrables en poſant $y = z + T$, prenant pour T une fonction quelconque du tems t; alors, faiſant cette ſubſtitution, on aura

$$dx = dt \cos z (M \cos T - N \sin T) - dt \sin z (M \sin T + N \cos T)$$

$$dz \sin x = (L dt - dT) \sin x - dt \cos x \sin z (M \cos T - N \sin T) - dt \cos p \cos z (M \sin T + N \cos T)$$

& de là poſant $\sin x \sin z = r$; $\sin x \cos z = s$ & $\cos x = u$, de ſorte que $rr + ss + uu = 1$, on tirera ces trois équations:

I. $dr - s(L dt - dT) + u dt (M \sin T + N \cos T) = 0$

II. $ds - u dt (M \cos T - N \sin T) + r (L dt - dT) = 0$

III. $du - r dt (M \sin T + N \cos T) + s dt (M \cos T - N \sin T) = 0$

qui étant ſemblables aux trois ſupérieures, en poſant $L - \frac{dT}{dt}$; $M \sin T + N \cos T$ & $M \cos T - N \sin T$, au lieu de L, N & M, les trois cas intégrables ſeront:

1°. Si $\int L dt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N}$ comme ci-deſſus.

2°. Si $\int dt (M \cos T - N \sin T) = A \operatorname{tang} \frac{dt (M \sin T + N \cos T)}{L dt - dT}$

3°. Si $\int dt (M \sin T + N \cos T) = A \operatorname{tang} \frac{L dt - dT}{dt (M \cos T - N \sin T)}$

Or outre cela, ſi $\operatorname{tang} T = \frac{\beta M - \alpha N}{\alpha M + \beta N}$, on pourra trouver l'intégrale comme ci-deſſus, ſi

$$\int L dt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N} + \gamma \int dt \sqrt{(MM + NN)}$$

Tant

Tant de cas intégrables devroient bien enfin mener à l'intégration générale.

Or on peut encore trouver plusieurs autres cas, comme on verra par le probleme suivant:

PROBLEME

Les lettres L, M & N marquant des fonctions quelconques de la variable t, & x, y, z étant des quantités inconnües, en sorte que $xx + yy + zz = 1$, trouver les conditions des fonctions L, M & N, qui rendent intégrables ces trois équations:

$$\text{I.}\quad dx - Lydt + Nzdt = 0$$
$$\text{II.}\quad dy - Mzdt + Lxdt = 0$$
$$\text{III.}\quad dz - Nxdt + Mydt = 0$$

dont deux renferment déjà la troisieme.

SOLUTION

Nous avons déjà vu trois cas où l'intégration a lieu, qui sont

$$1°.\ \text{si } \int L dt = A\,\text{tang}\frac{M}{N};\quad 2°.\ \text{si } \int M dt = A\,\text{tang}\frac{N}{L};\quad 3°.\ \text{si } \int N dt = A\,\text{tang}\frac{L}{M}.$$

Donc, quand nous pourrons trouver des substitutions, qui changent les trois équations proposées en d'autres d'une forme semblable, celles-ci nous fourniront de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Posons $x = x' \cos P - y' \sin P$ & $y = x' \sin P + y' \cos P$, afin que $xx + yy = x'x' + y'y'$, & les deux premieres équations seront changées en celles-ci.

$$dx' \cos P - dy' \sin P - x' dP \sin P - y' dP \cos P + Nzdt = 0$$
$$- Lx' dt \sin P - Ly' dt \cos P$$

$$dx' \sin P + dy' \cos P + x' dP \cos P - y' dP \sin P - Mzdt = 0$$
$$+ Lx' dt \cos P - Ly' dt \sin P$$

dont

dont la combinaiſon fournit celles-ci:

$$dx' - y'(dP + L\,dt) + z\,dt\,(N\cos P - M\sin P) = 0$$
$$dy' - z\,dt\,(N\sin P + M\cos P) + x'(dP + L\,dt) = 0$$
$$dz - x'dt(N\cos P - M\sin P) + y'dt(N\sin P + M\cos P) = 0$$

dont les trois cas intégrables ſeront:

$$\int L\,dt + P = A\,\text{tang}\,\frac{N\sin P + M\cos P}{N\cos P - M\sin P} = A\,\text{tang}\,\frac{M}{N} + P$$

$$\int dt\,(N\sin P + M\cos P) = A\,\text{tang}\,\frac{N\cos P - M\sin P}{L\,dt + dP}\,dt$$

$$\int dt\,(N\cos P - M\sin P) = A\,\text{tang}\,\frac{L\,dt + dP}{(N\sin P + M\cos P)\,dt}$$

dont le premier eſt déja compris dans les précédens.

Si nous changeons ſemblablement les variables y & z, nous trouverons ces cas:

$$\int dt\,(L\sin Q + N\sin Q) = A\,\text{tang}\,\frac{L\cos Q - N\sin Q}{M\,dt + dQ}\,dt$$

$$\int dt\,(L\cos Q - N\sin Q) = A\,\text{tang}\,\frac{M\,dt + dQ}{(L\sin Q + N\cos Q)\,dt}$$

Outre cela un pareil changement dans les deux variables z & x fournira ces conditions:

$$\int dt\,(M\sin R + L\cos R) = A\,\text{tang}\,\frac{M\cos R - L\sin R}{N\,dt + dR}\,dt$$

$$\int dt\,(M\cos R - L\sin R) = A\,\text{tang}\,\frac{N\,dt + dR}{(M\sin R + L\cos R)\,dt}$$

Si

Si nous regardons les trois équations dérivées comme les principales, de ſorte qu'au lieu des lettres L, M & N, nous ayons à préſent

$$L + \frac{dP}{dt}; \quad M \cos P + N \sin P \quad \& \quad N \cos P - M \sin P,$$

nous en tirerons encore les quatre conditions ſuivantes

$$\int dt\,(L \sin Q + \frac{dP}{dt} \sin Q + N \cos P \cos Q - M \sin P \cos Q) = A \operatorname{tang} \frac{L \cos Q + \frac{dP}{dt} \cos Q - N \cos P \sin Q + M \sin P \sin Q}{M \cos P + N \sin P + \frac{dQ}{dt}}$$

$$\int dt\,(L \cos Q + \frac{dP}{dt} \cos Q - N \cos P \sin Q + M \sin P \sin Q) = A \operatorname{tang} \frac{M \cos P + N \sin P + \frac{dQ}{dt}}{L \sin Q + \frac{dP}{dt} \sin Q + N \cos P \cos Q - M \sin P \cos Q}$$

$$\int dt\,(M \cos P \sin R + N \sin P \sin R + L \cos R + \frac{dP}{dt} \cos R) = A \operatorname{tang} \frac{M \cos P \cos R + N \sin P \cos R - L \sin R - \frac{dP}{dt} \sin R}{N \cos P - M \sin P + \frac{dR}{dt}}$$

$$\int dt\,(M \cos P \cos R + N \sin P \cos R - L \sin R - \frac{dP}{dt} \sin R) = A \operatorname{tang} \frac{N \cos P - M \sin P + \frac{dR}{dt}}{M \cos P \sin R + N \sin P \sin R + L \cos R + \frac{dP}{dt} \cos R}$$

De ces quatre conditions on peut encore former deux fois quatre nouvelles, en mettant pour les trois lettres L, M, N, les mêmes dans cet ordre M, N, L, ou dans celui-ci N, L, M. Enſuite, pour ces mêmes lettres dans ces dernieres formules, on peut écrire

$$L + \frac{dS}{dt}; \quad M \cos S + N \sin S; \quad N \cos S - M \sin S,$$

ou bien $M + \frac{dS}{dt}$; $N \cos S + L \sin S$; $L \cos S - N \sin S$;

ou encore $N + \frac{dS}{dt}$; $L \cos S + M \sin S$; $M \cos S - L \sin S$;

& cela encore en changeant l'ordre de ces quantités, de ſorte que le nombre de telles formules peut être multiplié à l'infini, en mettant toujours dans les formules dernierement trouvées pour les lettres L, M, N, ces nouvelles valeurs. Par ce moyen on parviendra à des ordres plus compliqués, qui contiendront un angle arbitraire de plus, comme ſont P, Q, R, S; leſquels pouvant être pris à volonté, la multitude des cas qui admettent l'intégration, eſt tout à fait inconcevable; ce qui eſt d'autant plus remarquable, que généralement, ſans ſuppoſer une certaine rélation entre les quantités L, M & N, il ne paroit point de méthode qui puiſſe conduire à l'intégration. C'eſt un ſujet qui ſemble tout à fait nouveau dans l'Analyſe, & qui pourra donner occaſion à quantité de belles découvertes.

DE

DE

LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES

ET DE

LA SOMMATION DES SERIES,

PAR M. WALMESLEY.

La méthode des differences eſt d'une ſi grande utilité dans pluſieurs parties des Mathématiques, que j'ai crû qu'il ne ſeroit pas inutile d'en développer les principes. Elle ſert à la ſolution d'un grand nombre de problemes de différente eſpéce; mais je me ſuis reſtraint à l'appliquer à la quadrature des courbes, & à faire voir l'uſage qu'on en peut faire dans l'Aſtronomie.

Comme la ſommation des ſéries à beaucoup de rapport à la méthode des différences, j'ai auſſi ajoûté quelque choſe touchant cette théorie. L'on ſçait que ces matieres ont été traitées par MM. *Newton*, *Stirling*, *Euler*, & autres Geométres: ainſi j'ai tâché de profiter de ce qu'ils en ont écrit.

PROBLEME I.

Faire paſſer une courbe parabolique par autant de points donnés qu'on voudra.

SOLUTION.

Soient donnés les points P, Q, R, S, T, &c. (Fig. 1.) desquels à une droite AO priſe à volonté, qu'on tire les lignes PA, QL, RM, SN,

SN, TO, &s. paralleles entre elles, & faiſant avec AO un angle donné, & regardant ces lignes comme autant d'ordonnées à la courbe qu'on cherche, on tirera d'un point quelconque Z de la ligne AO une autre droite parallele ZK, qu'on ſuppoſe rencontrer la courbe en K: cela poſé, on nommera AZ, x; ZK, y; AL, a; AM, b; AN, c; AO, d; &c. & l'équation de la courbe aura cette forme

$$y = A + Px + Qx(x-a) + Rx(x-a)(x-b) + Sx(x-a)(x-b)(x-c) + Tx(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + \text{&c.}$$

Si l'on prenoit le point Z de l'autre côté du point A, il faudroit mettre le ſigne — devant x.

1°. Comme l'équation générale qu'on cherche, doit convenir à tous les cas poſſibles, on voit que, s'il n'étoit donné qu'un point P, on auroit $x = 0$, & $y = PA = A$, & tous les termes excepté le premier doivent être nuls, leſquels par conſéquent ſeront multipliés par x. S'il étoit donné deux points P, Q, dans ce cas a ſera égale à l'une des valeurs de l'abſciſſe, & au lieu d'une courbe on auroit une ligne droite qui paſſeroit par les points P & Q, dont l'équation ſeroit $y = A + Px$, & tous les autres termes de l'équation générale étant nuls ſeront multipliés par $x - a = 0$. Pareillement, ſi trois points P, Q, R, étoient donnés, on auroit $x - b = 0$, & la courbe ſeroit la parabole ordinaire dont l'équation eſt $y = A + Px + Qx(x-a)$, les autres termes de l'équation étant multipliés par $x - b$ pour qu'ils s'évanoüiſſent. De même, ſi quatre points étoient donnés, la courbe ſeroit la parabole cubi-

cubique, & ſon équation $y = A + Px + Qx\,(x - a) + R\,x\,(x - a)\,(x - b)$, & ainſi des autres cas. Par conſéquent l'équation cherchée aura la forme que nous lui avons donnée.

22. Pour trouver la valeur des coëfficients A, P, Q, R, &c. on ſuppoſera l'abſciſſe x ſucceſſivement égale à 0, a, b, c, d, &c. & les ordonnées correſpondantes à A, α, β, γ, δ, &c. & on aura les équations ſuivantes

$$A = A$$

$$\alpha = A + aP$$

$$\beta = A + bP + bQ(b-a)$$

$$\gamma = A + cP + cQ(c-a) + cR(c-a)(c-b)$$

$$\delta = A + dP + dQ(d-a) + dR(d-a)(d-b) + dS(d-a)(d-b)(d-c) \text{ \&c.}$$

on retranchera chacune de ces équations de celle qui ſuit, & on diviſera les reſtantes par la diſtance reſpective des ordonnées, ce qui donnera

$$\frac{\alpha - A}{a} = P$$

$$\frac{\beta - \alpha}{b-a} = P + bQ$$

$$\frac{\gamma - \beta}{c-b} = P + Q(c+b-a) + cR(c-a)$$

$$\frac{\delta - \gamma}{d-c} = P + Q \times \overline{d+c-a} + R \times \overline{d^2 + dc + c^2 + ab - b + a \times d + c} + dS \times \overline{d-a \times d-b}$$

&c.

on retranchera chacune de ces équations les unes des autres, & on diviſera les reſtantes par la diſtance reſpective des ordonnées priſes

deux à deux, & faiſant $\frac{\beta - \alpha}{b - a} = 1P$, $\frac{\gamma - \beta}{c - b} = 2P$, $\frac{\delta - \gamma}{d - c} = 3P$, & il viendra

$$\frac{1P - P}{b} = Q$$

$$\frac{2P - 1P}{c - a} = Q + cR$$

$$\frac{3P - 2P}{d - b} = Q + R \times \overline{d + c - a} + dS \times \overline{d - a} \qquad \&c.$$

En opérant de la même façon, & faiſant $\frac{2P - 1P}{c - a} = 1Q$, $\frac{3P - 2P}{d - b} = 2Q$, &c. on aura

$$\frac{1Q - Q}{b} = R$$

$$\frac{2Q - 1Q}{d - a} = R + dS \qquad \&c.$$

& de là en faiſant $\frac{2Q - 1Q}{d - a} = 1R$, &c. on tirera

$$\frac{1R - R}{d} = S \qquad \&c.$$

De la même maniere on pourroit déterminer les coëfficients des autres termes. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

Par cette façon d'opérer il eſt clair, que ſi on a une ſuite d'ordonnées A, 1A, 2A, 3A, 4A, &c. qui correſpondent aux abſciſſes o, a, b, c, d, &c. & qu'on ſuppoſe.

1A

$$\frac{1A-A}{a}=P,\ \frac{2A-1A}{b-a}=1P,\ \frac{3A-2A}{c-b}=2P,\ \frac{4A-3A}{d-c}=3P,\ \&c.$$

$$\frac{1P-P}{b}=Q,\ \frac{2P-1P}{c-a}=1Q,\ \frac{3P-2P}{d-b}=2Q,\ \&c.$$

$$\frac{1Q-Q}{c}=R,\ \frac{2Q-1Q}{d-a}=1R,\ \&c.$$

$$\frac{1R-R}{d}=S,\ \&c.$$

&c:

l'équation de la courbe parabolique, qui paſſera par les extrémités de toutes les ordonnées, ſera telle que nous l'avons énoncée dans le probleme, & les quantités A, P, Q, R, S, &c. ſeront les coëfficients de ſes termes.

Exemple.

Suppoſé qu'on ait obſervé les quatre longitudes ſuivantes d'une Comete.

jours	heures	minutes	Long. obſervée
1.	5.	11½.	9°. 32′. 26″ ♈
2.	3.	53.	9. 6. 40
5.	4.	42.	7. 47. 16
7.	3.	00.	7. 57. 34

& qu'on veuille ſavoir quelle étoit ſa longitude le ſixiéme jour à trois heures quarante minutes & demie. Sur une droite AN (fig. 2.) qu'on prenne les parties AL, LM, MN, proportionelles aux temps écoulés entre les obſervations, & des points A, L, M, N, qu'on éleve les droites AP, LQ, MR, NS, proportionelles aux longitudes obſervées, & faiſant avec AN un angle pris à volonté; & concevant une courbe parabolique qui paſſe par les points P, Q, R, S, on prendra

prendra AZ proportionelle à l'intervalle de temps compris entre la premiere obſervation & l'inſtant pour lequel on demande la longitude de la Comete, & tirant l'ordonnée ZK parallele aux autres ordonnées, elle marquera la longitude cherchée, & ſera déterminée par cette équation

$$ZK = A + Px + Qx \times \overline{x - a} + Rx \times \overline{x - a} \times \overline{x - b}$$

mais on a $QL - PA = -25'.46''$, $RM - QL = -1°.19'.24''$, $SN - RM = -49'.42''$; & auſſi $a = 22^{h}.41\frac{1}{2}'$, $b = 3^{j}.23^{h}.30\frac{1}{2}'$. $c = 5^{j}.21^{h}.48\frac{1}{2}'$; $x = 4^{j}.22^{h}.29'$: ces valeurs donnent $Px = -2°.14'.32\frac{1}{2}''$; $Qx \times x - a = 5'.21\frac{1}{2}''$; $Rx \times x - a \times x - b = -2'.15''$, & par conſéquent $7°.21'.00''$ pour la longitude cherchée.

De cette façon on peut interpoler avec aſſés d'exactitude les Obſervations aſtronomiques, pourvû qu'elles ne ſoint pas trop éloignées par le tems les unes des autres, & que la viteſſe du corps obſervé ne ſoit pas trop grande.

COROLLAIRE II.

Maintenant, ſi on ſuppoſe que la diſtance entre les ordonnées eſt par tout la même, & égale à l'unité, on aura $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, &c. &

$$\alpha - A = P,\ \beta - \alpha = 1P,\ \gamma - \beta = 2P,\ \delta - \gamma = 3P, \text{ &c.}$$

$$\frac{\beta - 2\alpha + A}{1.2} = Q,\ \frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{1.2} = 1Q,\ \frac{\delta - 2\gamma + \beta}{1.2} = Q, \text{ &c.}$$

$$\frac{\gamma - 3\beta + 3\alpha - A}{1.2.3} = R,\ \frac{\delta - 3\gamma + 3\beta - \alpha}{1.2.3.} = 1R, \text{ &c.}$$

$$\frac{\delta - 4\gamma + 6\beta - 4\alpha + A}{1.2.3.4} = S, \text{ &c.}$$

&c.

d'où

d'où il eſt clair que, ſi A repréſente la premiere ordonnée, B la différence des deux premieres ordonnées, C la différence ſeconde des trois premieres ordonnées, D la différence troiſiéme des quatre premieres ordonnées, et ainſi de ſuite, en ôtant toûjours celles qui précédent de celles qui ſuivent; on aura $B = P$, $\frac{C}{1.2} = Q$, $\frac{D}{1.2.3} = R$, $\frac{E}{1.2.3.4} = S$, etc. et l'équation de la courbe ſera

$$y = A + B \times \frac{x}{1} + C \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} + D \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} + E \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x-3}{4} + F \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x-3}{4} \times \frac{x-4}{5} + \text{etc.}$$

Il eſt clair auſſi qu'on aura facilement la valeur des différences B, C, D, etc. ſans les déduire les unes des autres, puisque leurs termes ſont multipliés par les coëfficiens des termes du binome élevé à la puiſſance $n - 1$, n répreſentant les nombre des ordonnées.

Dans cette propoſition on a placé le commencement de l'abſciſſe à la premiere ordonnée; mais, s'il étoit placé à tout autre point de la ligne A O, on pourroit également réſoudre le probleme. Cependant la ſolution paroit être plus élégante lorsque le commencement de l'abſciſſe eſt fixé préciſément au milieu de toutes les ordonnées, ce qu'on verra dans les deux problemes ſuivans.

PROBLEME II.

Trouver la courbe parabolique qui paſſera par les extrémités d'autant d'ordonnées qu'on voudra, dont le nombre eſt impair.

SOLUTION.

Soit une ſuite d'ordonnées &c. GD, HC, IB, PA, QL, RM, SN, &c. (fig. 3.) entre leſquelles PA eſt celle du milieu; on ſuppoſera que chacune des ordonnées, qui ſe trouvent d'un côté de PA eſt à égale diſtance de PA, que l'ordonnée correſpondante de l'autre côté, c'eſt à dire, que AL = AB, AM = AC, AN = AD, &c.; cela poſé, on nommera AL, a; AM, b; AN, c; &c. une autre ordonnée quelconque ZK, y; & ſon abſciſſe AZ, x; & l'équation de la courbe aura cette forme

$$y = A + \frac{Px + Qxx}{Rx + Sxx} \times \overline{xx - aa} + \frac{}{Tx + Vxx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} + \frac{}{Wx + Zxx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} \times \overline{xx - cc} + \text{ &c.}$$

Si l'ordonnée ZK ſe trouvoit de l'autre côté du point A, ſon abciſſe x ſeroit negative.

1°. Comme l'équation générale qu'on cherche doit convenir à tous les cas poſſibles, on voit que, s'il n'y avoit qu'une ſeule ordonnée PA, on auroit $x = 0$, $y = PA = A$, & que tous les autres termes étant nuls doivent être multipliés par x. S'il y avoit trois ordonnées QL, PA, IB, la courbe ſeroit la *parabole Apollonienne* dont l'équation eſt $y = A + Px + Qxx$; & comme aux points L & B, l'on a $x = a$, & $x = -a$, ou $xx - aa = 0$, les autres termes de l'équation générale devant être nuls ſeront multipliés par $xx - aa$. Si le nombre des ordonnées étoit cinq, ſept, neuf, &c. la parabole ſeroit du quatrieme, ſixieme, huitieme, &c. degré;

degré ; & par un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons fait dans le cas de trois ordonnées, on trouveroit que tous les termes de l'équation générale doivent être tels que nous les avons aſſignés.

2°. Pour avoir les coëfficients P, Q, R, S, &c. on nommera les ordonnées QL, α; RM, β; SN, γ; &c. & IB, $\varkappa$; HC, λ; GD, μ; &c. & l'on ſuppoſera l'abſciſſe x ſucceſſivement égale à, $+a$, $-a$; $+b$, $-b$; $+c$, $-c$; &c. ce qui donnera deux ſuites d'équations

$$\begin{cases} \alpha = A + aP + aaQ \\ \beta = A + bP + bbQ + \overline{bR + bbS} \times \overline{bb - aa} \\ \gamma = A + cP + ccQ + \overline{cR + ccS} \times \overline{cc - aa} + \overline{cT + ccV} \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \\ \qquad \&c. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varkappa = A - aP + aaQ \\ \lambda = A - bP + bbQ - \overline{bR - bbS} \times \overline{bb - aa} \\ \mu = A - cP + ccQ - \overline{cR - ccS} \times \overline{cc - aa} - \overline{cT - ccV} \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \\ \qquad \&c. \end{cases}$$

on retranchera les équations de la ſeconde ſuite des correſpondantes de la premiere ſuite, & faiſant la réduction on trouvera

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha - \varkappa}{2a} = P \\ \dfrac{\beta - \lambda}{2b} = P + R \times \overline{bb - aa} \\ \dfrac{\gamma - \mu}{2c} = P + R \times \overline{cc - aa} + T \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \quad \&c. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha - 2A + \varkappa}{2aa} = Q \\ \dfrac{\beta - 2A + \lambda}{2bb} = Q + S \times \overline{bb - aa} \\ \dfrac{\gamma - 2A + \mu}{2cc} = Q + S \times \overline{bb - aa} + V \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \text{ &c.} \end{cases}$$

On retranchera les équations de la premiere de ces deux ſuites les unes des autres, c'eſt à dire, celles qui précédent de celles qui ſuivent, en faiſant $\frac{\beta - \lambda}{2b} = 1P$, $\frac{\gamma - \mu}{2c} = 2P$, &c. On retranchera de même les équations de la ſeconde ſuite les unes des autres, en faiſant $\frac{\beta - 2A + \lambda}{2bb} = 1Q$, $\frac{\gamma - 2A + \mu}{2cc} = 2Q$, &c. & par la réduction on aura

$$\begin{cases} \dfrac{1P - P}{bb - aa} = R \\ \dfrac{2P - 1P}{cc - bb} = R + T \times \overline{cc - aa} \end{cases} \text{ &c.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1Q - Q}{bb - aa} = S \\ \dfrac{2Q - 1Q}{cc - bb} = S + V \times \overline{cc - aa} \end{cases} \text{ &c.}$$

On répétera la même opération en faiſant $\frac{1P - P}{bb - aa} = P'$, $\frac{2P - 1P}{cc - bb} = 1P'$, &c. & $\frac{1Q - Q}{bb - aa} = Q'$; $\frac{2Q - 1Q}{cc - bb} = 1Q$, &c.

&

& l'on aura

$$\left\{\frac{1P' - P'}{cc - aa} = T \quad \&c.\right.$$

$$\left\{\frac{1Q' - Q'}{cc - aa} = V \quad \&c.\right.$$

Il eſt clair que de cette façon l'on peut déterminer la valeur des coëfficients d'autant de termes qu'on veut. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

De la ſolution de ce probleme il ſuit que, ſi l'on a une ſuite d'ordonnées &c. ν, μ, λ, $\varkappa$, A, α, β, γ, δ, &c. dont les diſtances à l'ordonnée A qui tient le milieu ſont reſpectivement, $+a$, $-a$; $+b$, $-b$; $+c$, $-c$; $+d$, $-d$; &c. en commençant par les ordonnées qui ſont les plus proches de A; & qu'on ſuppoſe

$$\frac{\alpha - \varkappa}{2a} = P, \quad \frac{\beta - \lambda}{2b} = 1P, \quad \frac{\gamma - \mu}{2c} = 2P, \quad \frac{\delta - \nu}{2d} = 3P, \text{ \&c.}$$

$$\frac{1P - P}{bb - aa} = R, \quad \frac{2P - 1P}{cc - bb} = 1R, \quad \frac{3P - 2P}{dd - cc} = 2R, \text{ \&c.}$$

$$\frac{1R - R}{cc - aa} = T, \quad \frac{2R - 1R}{dd - bb} = 1T, \text{ \&c.}$$

$$\frac{1T - T}{dd - aa} = W, \quad \&c.$$

&c.

& auſſi

$$\frac{\alpha - 2A + \varkappa}{2aa} = Q, \quad \frac{\beta - 2A + \lambda}{2bb} = 1Q, \quad \frac{\gamma - 2A + \mu}{2cc} = 2Q, \text{ &c.}$$

$$\frac{1Q - Q}{bb - aa} = S, \quad \frac{2Q - 1Q}{cc - bb} = 1S, \quad \frac{3Q - 2Q}{dd - cc} = 2S, \text{ &c.}$$

$$\frac{1S - S}{cc - aa} = V, \quad \frac{2S - 1S}{dd - bb} = 1V, \quad \text{&c.}$$

$$\frac{1V - V}{dd - aa} = Z, \quad \text{&c.}$$

&c.

il ſuit, dis-je, que l'équation de la courbe parabolique qui paſſera par les extremités de toutes les ordonnées ſera telle que nous l'avons énoncée dans le probleme, & que les quantités P, Q, R, S, T, V, W, Z, &c. ſeront les coëfficients de ſes termes.

COROLLAIRE II.

Maintenant, ſi l'on ſuppoſe que la diſtance entre les ordonnées eſt partout la même & $= a$, on aura $b = 2a$, $c = 3a$, $d = 4a$, &c. &

$$P = \frac{\alpha - \varkappa}{1.2.a} \qquad Q = \frac{\alpha - 2A + \varkappa}{1.2.a^2}.$$

$$R = \frac{\beta - 2\alpha + 2\varkappa - \lambda}{1.2.2.3.a^3} \qquad S = \frac{\beta - 4\alpha + 6A - 4\varkappa + \lambda}{1.2.3.4.a^4}$$

$$T = \frac{\gamma - 4\beta + 5\alpha - 5\varkappa + 4\lambda - \mu}{1.2.2.3.4.5.a^5} \qquad V = \frac{\gamma - 6\beta + 15\alpha - 20A + 15\varkappa - 6\lambda + \mu}{1.2.3.4.5.6.a^6}$$

&c. &c.

Donc, ſi l'on marque la ſuite des ordonnées de cette façon &c. A4, A3, A2, A1, A, 1A, 2A, 3A, 4A, &c. & qu'on prenne leurs différences premieres en retranchant les ordonnées qui précedent

de

de celles qui ſuivent de cette maniere $1A-A=1B$, $2A-1A=2B$, &c. & $A - A1 = B1$, $A1 - A2 = B2$, &c. De même leurs différences ſecondes, $1B-B1=C$, $2B-1B=1C$, $B1-B2=C1$, &c. Auſſi leurs différences troiſiemes, $1C-C=1D$, $C-C1=D1$, &c. Auſſi leurs différences quatriemes, $1D - D1 = E$, &c. & ainſi de ſuite, comme l'on voit ici

&c. A4 A3 A2 A1 A 1A 2A 3A 4A &c.
B4 B3 B2 B1 1B 2B 3B 4B
C3 C2 C1 C 1C 2C 3C
D3 D2 D1 1D 2D 3D
E2 E1 E 1E 2E
F2 F1 1F 2F
G1 G 1G
H1 1H
I

& ayant pris les différences du milieu, ſçavoir,

1B 1D 1F 1H
A C E G I &c.
B1 D1 F1 H1

qu'on faſſe $\frac{1B+B1}{2}=B$, $\frac{1D+D1}{2}=D$, $\frac{1F+F1}{2}=F$, $\frac{1H+H1}{2}=H$, &c. on trouvera $P=\frac{B}{a}$, $Q=\frac{C}{1.2.a^2}$, $R=\frac{D}{1.2.3.a^3}$, $S=\frac{E}{1.2.3.4.a^4}$, $T=\frac{F}{1.2.3.4.5.a^5}$, $V=\frac{G}{1.2.3.4.5.6.a^6}$, &c. & ainſi l'équation du probleme aura cette forme

$y=$

$$y = A + \frac{2aBx + Cxx}{1.2.a^2} + \frac{4aDx + Exx}{1.2.a^4} \times \frac{xx-aa}{3.4} + \frac{6aFx + Gxx}{1.2.a^6} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} + \frac{8aHx + Ixx}{1.2.a^8} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} \times \frac{xx-9aa}{7.8} +$$

&c.

COROLLAIRE III.

De l'autre côté du point A à la distance $Az = AZ$, qu'on tire l'ordonnée $zk = v$, & l'équation générale donnera

$$\frac{y+v}{2} = A + Qxx + Sxx \times \overline{xx-aa} + Vxx \times \overline{xx-aa} \times \overline{xx-bb} + \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = Px + Rx \times \overline{xx-aa} + Tx \times \overline{xx-aa} \times \overline{xx-bb} + \&c.$$

& si les ordonnées sont également distantes les unes des autres, & que la distance commune soit $= a$, on aura

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{Cxx}{1.2.a^2} + \frac{Exx}{1.2.a^4} \times \frac{xx-aa}{3.4} + \frac{Gxx}{1.2.a^6} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} + \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{Bx}{a} + \frac{2Dx}{a^3} \times \frac{xx-aa}{3.4} + \frac{3Fx}{a^5} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} + \&c.$$

La somme des deux équations donne la valeur de l'ordonnée y, & leur différence donne la valeur de l'ordonnée v.

Ces

Ces équations ſont commodes pour inférer de nouvelles ordonnées à des diſtances quelconques du point A : comme, par exemple, ſi dans une ſuite de termes qu'on ſuppoſe également diſtans les uns des autres, & dont le nombre eſt impair, on veut avoir d'autres termes intermédiaires qui ſoyent à égale diſtance des termes donnés ; dans ce cas,

faiſant $a = 1$, & $x = \frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{1}{2} \times \frac{C}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{E}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{G}{64} - \text{&c.}$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{D}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{F}{32} - \text{&c.}$$

enſuite on ſuppoſera $x = \frac{3}{2}$, & l'on aura

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{9}{2} \times \frac{C}{4} + \frac{15}{8} \times \frac{E}{16} - \frac{7}{16} \times \frac{G}{64} + \text{&c.}$$

$$\frac{y-v}{2} = 3 \times \frac{B}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{D}{8} - \frac{7}{8} \times \frac{F}{32} + \text{&c.}$$

& de même, ſi l'on met ſucceſſivement pour x les valeurs $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, &c. on aura des équations qui donneront tous les termes cherchés. On pourroit diviſer la diſtance commune des termes en autant de parties égales qu'on voudroit, & on auroit de la même maniere les termes intermédiaires pour tous ces points de diviſion.

Si donc on continue à diviſer la diſtance commune en parties égales jusqu'à ce que les différences des termes qui y correſpondent deviennent peu conſidérables, on peut inférer par une ſimple proportion d'autres termes entre ces derniers, leurs diſtances à ces termes

étant données; ou, ſi les termes ſont donnés, on peut en déduire leurs diſtances. Cette façon d'operer rend la méthode des Interpolations plus facile: pour l'éclaircir, nous allons donner deux exemples qui ſe rapportent à l'Aſtronomie.

Exemple I.

Suppoſé qu'on ait obſervé la latitude d'une Planete pendant cinq jours de ſuite à la même heure, & que le premier jour elle ſe ſoit trouvée de 0°. 23′; le ſecond, de 1°. 31′; le troiſieme, de 2°. 33′; le quatrieme, de 3°. 27′; le cinquieme, de 4°. 12′; & qu'on veuille ſçavoir quelle étoit ſa latitude le quatrieme jour à 7^h. 12′. On diviſera l'eſpace d'un jour, c'eſt à dire, l'intervalle commun entre les obſervations qu'on regarde comme l'unité, en trois parties égales, & on cherchera quelle étoit la latitude de la Planete après trois jours & un tiers, c'eſt à dire, le quatrieme jour à 8^h. L'on a donc $a = 1$, & $x = \frac{4}{3}$, ce qui donne

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{8}{9}C + \frac{14}{243}E$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{4}{3}B + \frac{14}{81}D.$$

Maintenant qu'on prenne les différences premieres, ſecondes, troiſiemes, & quatriemes, des obſervations, comme l'on voit ici,

0°. 23′: 1°. 31′: 2°. 33′: 3°. 27′: 4°. 12′
1°. 8′: 1°. 2′: 0°. 54′: 0°. 45′
— 6′: — 8′: — 9′.
2′: 1′
— 1′

& l'on trouve $A = 2°.\ 33'$; $B = 58'$, $C = -8'$, $D = 1'\frac{1}{2}$, $E = -1'\frac{1}{2}$

&

& ces valeurs étant ſubſtituées dans les équations, il vient $\frac{y+v}{2}$ $= 2°.\ 25'.\ 50''$, & $\frac{y-v}{2} = 1°.\ 17'.\ 35''\frac{1}{2}$, dont la ſomme donne $y = 3°.\ 43'.\ 25''\frac{1}{2}$ qui étoit la latitude de la Planete le quatrieme jour à 8^h. Enſuite pour avoir ſa latitude à $7^h.\ 12'$ on fera, comme $8^h.$ ſont à $8^h. - 7^h.\ 12'$, ou $48'$; ainſi $3°.\ 43'\ 25''\frac{1}{2} - 3°.\ 27'$, ou $16'.\ 25''\frac{1}{2}$ ſont à $1'.\ 38''\frac{1}{2}$: ôtant donc $1'.\ 38''\frac{1}{2}$ de $3°.\ 43'.\ 25''\frac{1}{2}$, il reſte $3°.\ 41'.\ 47''$ pour la latitude cherchée.

Exemple II.

Qu'on ait obſervé toujours à la même heure la latitude d'une Comete cinq jours de ſuite, pendant lequel tems elle a paſſé par l'Ecliptique: que cette latitude ait été méridionale le premier jour de $1°.\ 54'.\ 21''$; le ſecond, de $50'$, $3''$; que le troiſieme jour elle ait été ſeptentrionale de $15'.\ 7''$; le quatrieme, de $1°.\ 20'.\ 17''$; le cinquieme, de $2°.\ 20'.\ 19''$; & qu'on demande l'inſtant auquel la Comete a coupé l'écliptique. On voit que ce paſſage s'eſt fait entre le ſecond & le troiſieme jour, mais beaucoup plus près du troiſieme: ainſi l'on diviſera le jour en cinq parties égales, & l'on cherchera quelle étoit la latitude de la Comete à la $\frac{4}{5}$me partie du ſecond jour, c'eſt à dire, le ſecond jour à $19^h.\ 12'$. On a donc dans ce cas $x = \frac{4}{5}$, ce qui donne

$$\frac{y+v}{2} = A + \tfrac{1}{10}\,C - \tfrac{1}{625}\,C$$

$$\frac{y-v}{2} = \tfrac{1}{5}\,B - \tfrac{4}{125}\,D$$

On prendra les différences des latitudes obſervées, en regardant celles qui ſont méridionales comme poſitives, & comme négatives celles qui ſont ſeptentrionales, de cette ſorte

1°. 54′. 21″: 50′. 3″: — 15′. 7″: — 1°. 20′. 17″: — 2°. 20′. 19″
— 1°. 4′. 18″: — 1°. 5′. 10″: — 1°. 5′. 10″: — 1°. 0′. 2″
— 52″: 0: 5′. 8″
52″: 5′. 8″
4′. 16″

On aura donc $A = -15'.7''$, $B = -1°.5'.10.$ $C = 0$, $D = 3$, $E = 4'.16''$, & par conſéquent $\frac{y+v}{2} = -15'.7\frac{1}{2}''$, $\frac{y-v}{2} = -13'.7\frac{1}{2}''$, dont la différence donne $v = -2'$, qui étoit la latitude de la Comete le ſecond jour à $19^b.12'$; on fera donc $13'.7'' : 2' :: 4^b.48' : 43'.55''$; & ôtant $43'.55''$ de $19^b.12'$, il reſte $18^b.28'.5''$ pour l'heure du 2^d jour à laquelle la Comete s'eſt trouvée dans l'ecliptique.

COROLLAIRE IV.

Par le moyen de l'équation

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{Cxx}{2a^2} + \frac{Exx}{2a^4} \times \frac{xx-aa}{3.4} + \frac{Gxx}{2a^6} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} + \frac{Ixx}{2a^8} \times \frac{xx-aa}{3.4.} \times \frac{xx-4aa}{5.6} \times \frac{xx-9aa}{7.8} + \&c.$$

on trouvera les aires paraboliques, lorsque le nombre des ordonnées qu'on ſuppoſe également diſtantes les unes des autres eſt impair; car, en ſuppoſant que les ordonnées ſont perpendiculaires à l'abſciſſe, & que les deux ordonnées ZK, zk (fig. 3.) partent en même temps du point A, & parcourent l'abſciſſe par un mouvement uniforme, il eſt clair que l'élément de l'eſpace $KZzk$ eſt $\overline{y+v} \times dx$, ou

$$2Adx + \frac{Cx^2dx}{a^2} + \frac{Ex^2dx}{a^4} \times \frac{xx-aa}{3.4} + \frac{Gx^2dx}{a^6} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6.} + \&c.$$

dont

dont l'intégrale ſe trouve par la méthode ordinaire: & l'on pourra exprimer les valeurs de ces aires par les différences premieres, ſecondes, troiſiemes, &c, des ordonnées, ou par la ſomme des mêmes ordonnées priſes deux à deux.

Qu'on veüille, par exemple, connoître l'eſpace QLBI, que je nomme Q, par le moyen des trois ordonnées QL, PA, IB, on aura $\int \overline{y+v} \times dx = 2Ax + \frac{Cx^3}{3a^2}$, & faiſant $x = a$, $Q = 2a \times \overline{A + \frac{1}{6}C}$; ou bien, ſi l'on fait $2a = R$, & qu'on ſubſtitue pour C ſa valeur $1A - 2 \times A + A1$, $Q = \frac{1A + A1 + 4 \times A}{6} R$; ou encore, ſi, ſuivant la notation Newtonienne, A marque la ſomme des deux ordonnées QL, IB, & B l'ordonnée PA, on aura $Q = \frac{A + 4B}{6} R$. Pareillement, ſi l'on veut avoir l'aire Q compriſe entre cinq ordonnées, on trouve $\int \overline{y+v} \times dx = 2Ax + \frac{Cx^3}{3a^2} - \frac{Ex^5}{36a^2} + \frac{Ex^5}{60a^4}$, & faiſant $x = 2a$, $Q = 4a \times \overline{A + \frac{2}{3}C + \frac{7}{90}E}$; ou bien, en écrivant R au lieu de $4a$, & ſubſtituant pour C & E leurs valeurs reſpectives $1A - 2 \times A + A1$, $2A - 4 \times 1A + 6 \times A - 4 \times A1 + A2$, on a $Q = \frac{7 \times \overline{2A + A2} + 32 \times \overline{1A + A1} + 12 \times A}{90} R$; ou encore, ſi à la maniere Newtonienne A marque la ſomme de la premiere & derniere ordonnées, B la ſomme de la ſeconde & de la penultieme, & C celle du milieu, on aura

$$Q = \frac{7A + 32B + 12C}{90} R.$$

PROBLEME III.

Trouver la courbe parabolique qui paſſera par les extrémités d'autant d'ordonnées qu'on voudra, dont le nombre eſt pair.

SOLUTION.

Fig. 4 Soit une ſuite d'ordonnées &c. GD, HC, IB, QL, RM, SN, &c. dont QL, IB, ſont celles du milieu. On diviſera la diſtance BL des deux ordonnées QL, IB, en deux parties égales au point A, & on ſuppoſera que les ordonnées correſpondantes de chaque côté du point A ſont également diſtantes de ce point, c'eſt à dire, que AL = AB, AM = AC, AN = AD, &c. & ayant nommé AL, a; AM, b; AN, c; &c. l'abſciſſe indéterminée AZ, x; & ſon ordonnée ZK, y; l'équation de la courbe ſera

$$y = P + Qx + \overline{R + Sx} \times \overline{xx - aa} + \overline{T + Vx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} + \overline{W + Zx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} \times \overline{xx - cc} + \text{&c.}$$

La démonſtration eſt ſemblable à celle du probleme précédent, & les coëfficients des termes ſe déterminent de la même maniere. C. Q. F. T. Il faut obſerver que ſi l'on prend l'ordonnée ZK de l'autre côté du point A, ſon abſciſſe deviendra négative.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la ſolution de ce probleme que, ſi l'on a une ſuite d'ordonnées &c. ν, μ, λ, κ, α, β, γ, δ, &c. entre leſquelles α & κ tiennent le milieu, & dont les diſtances au point A ſont reſpectivement $+a$, $-a$;

$-a$; $+b$, $-b$; $+c$, $-c$; $+d$, $-d$; &c. en commençant par les ordonnées qui ſont les plus proches du point A, & qu'on faſſe

$$\frac{\alpha+\varkappa}{2} = P,\ \frac{\beta+\lambda}{2} = 1P,\ \frac{\gamma+\mu}{2} = 2P,\ \frac{\delta+\nu}{2} = 3P, \text{ &c.}$$

$$\frac{1P-P}{bb-aa} = R,\ \frac{2P-1P}{cc-bb} = 1R,\ \frac{3P-2P}{dd-cc} = 2R, \text{ &c.}$$

$$\frac{1R-R}{cc-aa} = T,\ \frac{2R-1R}{dd-bb} = 1T, \text{ &c.}$$

$$\frac{1T-T}{dd-aa} = W, \text{ &c.}$$

&c.

Auſſi

$$\frac{\alpha-\varkappa}{2a} = Q,\ \frac{\beta-\lambda}{2b} = 1Q,\ \frac{\gamma-\mu}{2c} = 2Q,\ \frac{\delta-\nu}{2d} = 3Q, \text{ &c.}$$

$$\frac{1Q-Q}{bb-aa} = S,\ \frac{2Q-1Q}{cc-bb} = 1S,\ \frac{3Q-2Q}{dd-cc} = 2S, \text{ &c.}$$

$$\frac{1S-S}{cc-aa} = V,\ \frac{2S-1S}{dd-bb} = 1V, \text{ &c.}$$

$$\frac{1V-V}{dd-aa} = Z, \text{ &c.}$$

&c.

il ſuit, dis-je, que l'équation de la courbe parabolique qui paſſera par les extrémités de toutes les ordonnées, ſera telle que nous l'avons énoncée

cée dans le probleme, & que les quantités P, Q, R, S, T, V, W, Z, &c. comme on les a ici déterminées, ſeront les coëfficients de ſes termes.

COROLLAIRE II.

Maintenant, que l'on ſuppoſe que la diſtance entre les ordonnées eſt partout la même, & égale à $2a$, & l'on aura $b = 3a$, $c = 5a$, $d = 7a$, &c. auſſi

$$P = \frac{\alpha + \varkappa}{2} \qquad Q = \frac{\alpha - \varkappa}{2a}$$

$$R = \frac{1}{4a^2} \times \frac{\beta - \alpha - \varkappa + \lambda}{1.\ 2.\ 2.} \qquad S = \frac{1}{8a^3} \times \frac{\beta - 3\alpha + 3\varkappa - \lambda}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$T = \frac{1}{16a^4} \times \frac{\gamma - 3\beta + 2\alpha + 2\varkappa - 3\lambda + \mu}{1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 4.} \qquad V = \frac{1}{32a^5} \times \frac{\gamma - 5\beta + 10\alpha - 10\varkappa + 5\lambda - \mu}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

&c. &c.

Donc, ſi l'on marque la ſuite des ordonnées de cette façon &c. A4, A3, A2, A1, 1A, 2A, 3A, 4A, &c. & qu'on prenne leurs différences premieres, en retranchant les ordonnées qui précédent de celles qui ſuivent, en cette ſorte, 1A — A1 = B, 2A — 1A = 1B, A1 — A2 = B1, &c.; de même leurs différences ſecondes, 1B — B = 1C, B — B1 = C1, &c. auſſi leurs différences troiſiemes, 1C — C1 = D, &c. & ainſi de ſuite, comme l'on voit ici

&c. A4 A3 A2 A1 1A 2A 3A 4A &c.
B3 B2 B1 B 1B 2B 3B
C3 C2 C1 1C 2C 3C
D2 D1 D 1D 2D
E2 E1 1E 2E
F1 F 1F
G1 1G
H

des

desquelles ayant pris celles du milieu

$$\begin{array}{ccccccc} A\,1 & & C\,1 & & E\,1 & & G\,1 \\ & B & & D & & F & & H & \&c. \\ 1\,A & & 1\,C & & 1\,E & & 1\,G \end{array}$$

& faisant $\frac{A\,1 + 1\,A}{2} = A$, $\frac{C\,1 + 1\,C}{2} = C$, $\frac{E\,1 + 1\,E}{2} = E$, $\frac{G\,1 + 1\,G}{2} = G$, &c. on trouvera $P = A$, $Q = \frac{B}{2a}$, $R = \frac{1}{4a^2} \times \frac{C}{1.2}$, $S = \frac{1}{8a^3} \times \frac{D}{1.2.3}$, $T = \frac{1}{16a^4} \times \frac{E}{1.2.3.4}$, $V = \frac{1}{32a^5} \times \frac{F}{1.2.3.4.5}$, $W = \frac{1}{64a^6} \times \frac{G}{1.2.3.4.5.6}$, $Z = \frac{1}{128a^7} \times \frac{H}{1.2.3.4.5.6.7}$, &c. & dans ce cas l'équation du probleme sera

$$y = A + \frac{Bx}{2a} + \frac{6aC + Dx}{8a^3} \times \frac{xx - aa}{2.3} + \frac{10aE + Fx}{32a^5} \times \frac{xx - aa}{2.3} \times \frac{xx - 9aa}{4.5} + \frac{14aG + Hx}{128a^7} \times \frac{xx + aa}{2.3} \times \frac{xx - 9aa}{4.5} \times \frac{xx - 25aa}{6.7} + \&c.$$

Si l'intervalle commun entre les ordonnées eſt égal à l'unité, l'on $a = \frac{1}{2}$, & l'équation ſera

$$y = A +$$

$$Bx +$$

$$\frac{3C + Dx}{4} \times \frac{4xx - 1}{2.3} +$$

$$\frac{5E + Fx}{16} \times \frac{4xx - 1}{2.3} \times \frac{4xx - 9}{4.5} +$$

$$\frac{7G + Hx}{64} \times \frac{4xx - 1}{2.3} \times \frac{4xx - 9}{4.5} \times \frac{4xx - 25}{6.7} +$$

&c.

COROLLAIRE III.

De l'autre côté du point A à la diſtance $Az = AZ$, qu'on éleve l'ordonnée $zk = v$, & l'équation générale donnera

$$\frac{y+v}{2} = P + Rx\sqrt{xx-aa} + Tx\sqrt{xx-aa}\times\sqrt{xx-bb} + Wx\sqrt{xx-aa}\times\sqrt{xx-bb}\times\sqrt{xx-cc}\ \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = Qx + Sx\times\sqrt{xx-aa} + Vx\times\sqrt{xx-aa}\times\sqrt{xx-bb} + Zx\times\sqrt{xx-aa}\times\sqrt{xx-bb}\times\sqrt{xx-cc}\ \&c.$$

& ſi la diſtance commune des ordonnées eſt égale à $2a$, ces équations ſont

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{3C}{4a^2} \times \frac{xx-aa}{2.3} + \frac{5E}{16a^4} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} +$$

$$\frac{7G}{64a^6} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} \times \frac{xx-25aa}{6.7} + \&c.$$

$$\frac{y-v}{}$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{Bx}{2a} + \frac{Dx}{8a^3} \times \frac{xx-aa}{2.3} + \frac{Fx}{32a^5} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} +$$
$$\frac{Hx}{128a^7} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} \times \frac{xx-25aa}{6.7} + \&c.$$

& si l'on suppose cette distance égale à l'unité, ou $2a = 1$,

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{3C}{4} \times \frac{4xx-1}{2.3} + \frac{5E}{16} \times \frac{4xx-1}{2.3} \times \frac{4xx-9}{4.5} + \frac{7G}{64} \times \frac{4xx-1}{2.3} \times \frac{4xx-9}{4.5} \times \frac{4xx-25}{6.7} +$$
$$\&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = Bx + \frac{Dx}{4} \times \frac{4xx-1}{2.3} + \frac{Fx}{16} \times \frac{4xx-1}{2.3} \times \frac{4xx-9}{4.5} + \frac{Hx}{64} \times \frac{4xx-1}{2.3} \times \frac{4xx-9}{4.5} \times \frac{4xx-25}{6.7} +$$
$$\&c.$$

On voit que la somme des deux équations donne la valeur de l'ordonnée y, & leur différence donne la valeur de l'ordonnée v. Ces équations sont commodes pour inférer de nouvelles ordonnées à des distances quelconques du point A. Comme si, par exemple, ayant une suite de termes dont le nombre est pair, on divisoit également en deux leurs distances qu'on suppose toutes égales, & qu'on voulût inférer un nouveu terme à chaque point de division. Dans ce cas on supposera la distance commune des termes ou $2a = 1$, & faisant 1°. $x = 0$, on aura

$$\frac{y+v}{2} = y = A - \tfrac{1}{2} \times \frac{C}{4} + \tfrac{3}{8} \times \frac{E}{16} - \tfrac{5}{16} \times \frac{G}{64} + \&c.$$

qui est la valeur de l'ordonnée qui répond au point du milieu A. Faisant 2°. $x = 1$, il viendra

$$\frac{y+v}{2} = A + \tfrac{3}{2} \times \frac{C}{4} - \tfrac{5}{8} \times \frac{E}{16} + \tfrac{7}{16} \times \frac{G}{64} - \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = 2 \times \frac{B}{2} + \frac{D}{8} - \tfrac{1}{4} \times \frac{F}{32} + \&c.$$

& de même ſi l'on ſubſtitue ſucceſſivement pour x les nombres 2, 3, 4, 5, il en réſultera des équations qui donneront tous les termes cherchés deux à deux.

Pareillement, ſi l'on diviſoit l'intervalle commun entre les termes en trois parties égales, & qu'on voulut avoir les termes intermédiaires qui répondent à tous les points de diviſion, on ſubſtitueroit alors ſucceſſivement pour x ſes valeurs, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$, &c. & il en viendroit des équations qui donneroient les termes cherchés. On pourroit ainſi diviſer l'intervalle commun entre les termes en autant de parties égales qu'on voudroit, & on trouveroit de la même maniere les termes qui répondent à tous les points de diviſion. Et lorſque le nombre des diviſions eſt ſuffiſant pour que les différences des termes qui y répondent ſoient petites, ſi l'on veut inſérer de nouveaux termes entre ces derniers, il ſuffira de déterminer leurs différences d'avec les termes donnés, en prenant la partie qui eſt proportionelle à leurs diſtances; & de même, les termes étant donnés, on pourra déduire leurs diſtances: ainſi l'on peut faire le même uſage de ce probleme-ci qu'on a fait du probleme précédent; & l'on y a pû voir que cette façon de diviſer l'intervalle commun en un certain nombre de parties aliquotes contribue à faciliter ces ſortes d'interpolations.

Exemple I.

On ſuppoſe que la Planete de Mercure a été obſervée le premier jour dans $2^{s}.\ 5^{\circ}.\ 39'.\ 51''$; le ſecond jour à la même heure dans $2^{s}.\ 12^{\circ}.\ 2'.\ 51''$; le troiſieme dans $2^{s}.\ 18^{\circ}.\ 26'.\ 18''$; le quatrieme dans $2^{s}.\ 24^{\circ}.\ 48'.\ 38''$, & qu'on veut ſçavoir ſon lieu le troiſieme jour à 7^{h}. Il ſuffira de diviſer le jour, que l'on regarde comme l'unité, en trois parties égales, & l'on cherchera quel étoit le lieu de Mercure le troiſieme jour à 8^{h}; ce qui donne $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, et par conſéquent

$$\frac{y + v}{2} = A + \frac{2C}{9}$$

$$\frac{y - v}{2} = \frac{5B}{6} + \frac{5D}{81}$$

Enfui-

Enſuite, prenant, les différences des obſervations, en omettant le terme commun 2ʳ.

5°. 39′. 51″: 12°. 2′. 51″: 18°. 26′. 18″: 24°. 48′, 38″
6°. 23′. 0″: 6°. 23′. 27″: 6°. 22′. 20″
0′. 27″: — 1′. 7″
— 1′. 34″

on trouve A = 15°. 14′. 34½″, B = 6°. 23′. 27″, C = — 20″; D = — 1′. 34″, & ſubſtituant ces valeurs, il vient $\frac{y+v}{2}$ = 15°. 14′. 30″, & $\frac{y-v}{2}$ = 5°. 19′. 26½″, dont la ſomme donne y = 20°. 33′. 56½″ pour le lieu de Mercure à 8ʰ. en y ajoûtant 2ʳ; on fera donc, comme 8 ſont à 1, ainſi la différence entre le lieu qu'on vient de trouver & le lieu obſervé le troiſieme jour, laquelle eſt 2°. 7′. 38½″, eſt à 15′. 57″; ôtant donc 15′. 57″ de 2ʳ. 20°. 33′. 56½ il reſte 2ʳ. 20°. 17′. 59½″, ou ſimplement 2ʳ. 20°. 18′. pour le lieu de Mercure à 7ʰ.

Si au contraire l'on demandoit l'inſtant auquel Mercure s'eſt trouvé dans 2ʳ. 20°. 18′ on chercheroit, comme on vient de faire, ſon lieu pour l'inſtant de 8ʰ. le 3me jour, & par le moyen de la différence entre ce lieu trouvé & le lieu donné, on déduiroit par la ſimple proportion le tems écoulé entre les deux.

Exemple II.

Qu'une Comete de directe ſoit devenue rétrograde, & qu'on veüille ſçavoir l'inſtant auquel elle étoit ſtationaire, étant données ſix obſervations faites vers ce même temps. On ſuppoſe que le premier jour ſa longitude obſervée étoit de 6°. 55′. ♉; le ſecond jour à la même heure, de 7°. 9′; le troiſieme, de 7°. 15′; le quatrieme, de 7°. 10′; le cinquieme, de 7°. 4′; le ſixieme, de 6°. 50′;

Pour rendre le calcul un peu plus ſimple, on retranchera la premiere longitude d'elle-même & de chacune des autres pour avoir les reſtes 0, 14′, 20′, 15′, 9′, — 5′, qu'on regardera comme les ordonnées de la courbe. Ainſi dans ce cas on aura

$$y = A + Bx + \frac{3C + Dx}{4} \times \frac{4xx - 1}{2.3} + \frac{5E + Fx}{16} \times \frac{4xx - 1}{2.3} \times \frac{4xx - 9}{4.5},$$

$$dy = 0 = B - \frac{D}{24} + \frac{3F}{640} + C - \frac{5E}{24} \times x + \frac{D}{2} - \frac{F}{16} \times x^2 + \frac{E}{6} x^3 + \frac{F}{24} x^4 = 0$$

Qu'on prenne les différences des ordonnées

0′. 14′. 20′ 15′. 9′. — 5′

14′. 6′. — 5′. — 6′. — 14′

— 8′. — 11. — 1′. — 8′

— 3′ 10′. — 7′

13′. — 17′

— 30′

& l'on aura $A = 17\frac{1}{2}$, $B = -5$, $C = -6$, $D = 10$, $E = -2$, $F = -30$, & mettant ces valeurs dans la ſeconde équation elle devient

$$x^4 + \tfrac{4}{15} x^3 - \tfrac{11}{2} x^2 + \tfrac{67}{15} x + \tfrac{1067}{140} = 0$$

dont la racine eſt $x = -0.5473$ à peu près, qui répond à 13ʰ. 8′; ainſi la Comete étoit ſtationaire le ſecond jour à 22ʰ. 52′ environ. Pour ſçavoir quelle étoit alors ſa longitude, il faut ſubſtituer — 0. 5473 pour x dans la premiere équation, & l'on trouvera $y = 20'. 3''$, ce qui donne la longitude de la Comete de 7°. 15′. 3″.

COROL-

COROLLAIRE IV.

On a fait voir dans le 4me Corollaire du ſecond probleme comment, étant donnée une ſuite d'ordonnées en nombre impair, on pouvoit calculer les aires paraboliques qu'elles comprennent; de la même maniere l'on peut, lorſque cette ſuite fait un nombre pair, trouver ces aires par le moyen de l'équation ſuivante

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{3C}{4a^2} \times \frac{xx-aa}{2.3} + \frac{5E}{16a^4} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} + \frac{7G}{64a^6} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} \times \frac{xx-25aa}{6.7} + \&c.$$

en ſuppoſant que la diſtance commune entre les ordonnées eſt $2a$. Comme ſi l'on vouloit avoir l'eſpace Q contenu entre quatre ordonnées, dans l'équation $\int \overline{y+v} \times dx = 2Ax - \frac{Cx}{4} + \frac{Cx^3}{12a^2}$ on ſeroit $x = 3a$, & il viendroit $Q = 6a \times \overline{A + \frac{1}{4}C}$; ou bien, en écrivant R pour la baſe $6a$, & pour A, C, leurs valeurs reſpectives $\frac{1A + A1}{2}$, $\frac{2A - 1A - A1 + A2}{2}$,

$Q = \frac{2A + A2 + 3 \times \overline{1A + A1}}{8}$ R; ou encore, en faiſant avec Mr. Newton $A = 2A + A2$, & $B = 1A + A1$,

$Q = \frac{A + 3B}{8}$ R.

Paraillement, pour avoir l'aire Q compriſe entre ſix ordonnées, dans l'équation $\int \overline{y+v} \times dx = 2Ax - \frac{Cx}{4} + \frac{Cx^3}{12a^2} + \frac{3Ex}{64} - \frac{5Ex^3}{288a^2} + \frac{Ex^5}{960a^4}$

ou

on feroit $x = 5a$, & on auroit $Q = 10a \times \overline{A + \frac{11}{12} C + \frac{19}{144} E}$, ou bien faiſant $R = 10$, & ſubſtituant pour A, C, E, leurs valeurs,

$$Q = \frac{19 \times \overline{3A + A3} + 75 \times \overline{2A + A2} + 50 \times \overline{1A + A1}}{288} R,$$

ou encore, en faiſant avec M. Newton $A = 3A + A3$, $B = 2A + A2$, $C = 1A + A1$, on auroit

$$Q = \frac{19A + 75B + 50C}{288} R.$$

DE
LA SOMMATION DES SÉRIES.

Etant donnée la ſérie $v + Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \&c. = y$ dans laquelle v eſt une quantité conſtante & égale à y, lorſque $x = 0$, & ſuppoſant que chacun de ſes termes vienne à être multiplié par une quantité conſtante, en ſorte qu'elle devienne

$a \times v + b \times Px + c \times Qx^2 + d \times Rx^3 + e \times Sx^4 + \&c.$

on demande la ſomme N de cette derniere ſérie.

THEOREME I.

Si l'on ſuppoſe que B, C, D, &c. repréſentent les différences premieres, ſecondes, troiſiemes, &c. du premier ordre des quantités a, b, c, d, &c. c'eſt à dire, ſi l'on fait $B = b - a$, $C = c - 2b + a$, $D = d - 3c + 3b - a$, $E = e - 4d + 6c - 4b + a$, &c. on aura

$$N = y + B \times \frac{dy}{dx} x + C \times \frac{ddy}{2dx^2} x^2 + D \times \frac{d^3y}{6dx^3} x^3 + E \times \frac{d^4y}{24dx^4} x^4 + F \times \frac{d^5y}{120dx^5} x^5 +$$

&c.

DE

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer le Théoreme, il faudra ſe ſervir du calcul différentiel; ainſi l'on prendra la différence premiere, ſeconde, troiſieme, &c. de l'équation $y = v + Px + Qx^2 + Rx^3 + \&c.$ ce qui donnera

$$dy = P dx + 2Q x dx + 3R x^2 dx + 4S x^3 dx + 5T x^4 dx + \&c.$$
$$ddy = 2Q dx^2 + 2.3R x dx^2 + 3.4S x^2 dx^2 + 4.5T x^3 dx^2 + \&c.$$
$$d^3y = 2.3R dx^3 + 2.3.4S x dx^3 + 3.4.5T x^2 dx^3 + \&c.$$
$$d^4y = 2.3.4S dx^4 + 2.3.4.5T x dx^4 + \&c.$$
$$d^5y = 2.3.4\,5T dx^5 + \&c.$$
$$\&c.$$

d'où il ſera facile de tirer les équations ſuivantes

$$ay = av + aPx + aQx^2 + aRx^3 + aSx^4 + aTx^5 + \&c.$$
$$B \times \frac{dy}{dx} x = \cdot\cdot BPx + 2BQx^2 + 3BRx^3 + 4BSx^4 + 5BTx^5 + \&c.$$
$$C \times \frac{ddy}{2dx^2} x^2 = \cdot\cdot\cdot CQx^2 + 3CRx^3 + 6CSx^4 + 10CTx^5 + \&c.$$
$$D \times \frac{d^3y}{6dx^3} x^3 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot DRx^3 + 4DSx^4 + 10DTx^5 + \&c.$$
$$E \times \frac{d^4y}{24dx^4} x^4 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ESx^4 + 5ETx^5 + \&c.$$
$$F \times \frac{d^5y}{120dx^5} x^5 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot FTx^5 + \&c.$$
$$\&c.$$

Enſuite l'on comparera les termes de ces ſéries avec les termes corres-

pondans de la ſérie $av + bPx + cQx^2 + dRx^3 +$ &c. & l'on aura

$$a + B = b$$
$$a + 2B + C = c$$
$$a + 3B + 3C + D = d$$
$$a + 4B + 6C + 4D + E = e$$
$$a + 5B + 10C + 10D + 5E + F = f \quad \text{&c.}$$

d'où l'on tire les valeurs de B, C, D, &c. telles que nous les avons données ci-deſſus; & puiſque par la ſuppoſition $N = av = bPx + cQx^2 +$ &c. on aura $N = ay + B \times \frac{dy}{dx} x +$ &c. comme dans l'énoncé du théoreme. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Par ce Théoreme on trouvera exactement la ſomme de toutes les ſéries dont les termes ſont multipliés par un produit quelconque de quantités en proportion arithmétique. Car ſi l'on ſuppoſe $a = r$, $b = r + k$, $c = r + 2k$, $d = r + 3k$, &c. il vient $B = k$, & les différences ſeconde, & ſuivantes, étant nulles, on a $C = 0$, $D = 0$; & par conſéquent $N = ry + k \times \frac{dy}{dx} xx$.

Si $a = r \times s$, $b = \overline{r + k} \times \overline{s + k}$, $c = \overline{r + 2k} \times \overline{s + 2k}$, $d = \overline{r + 3k} \times \overline{s + 3k}$, &c. on trouve $B = rk + sk + kk$, $C = 2kk$, & les différences troiſieme, & ſuivantes, étant nulles, on aura $D = 0$, $E = 0$, &c. ce qui donne

$$N = rsy + \overline{rk + sk + kk} \times \frac{dy}{dx} x + kk \times \frac{ddy}{dx^2} x^2.$$

Si

Si $a = r \times s \times t$, $b = \overline{r+k} \times \overline{s+k} \times \overline{t+k}$, $c = \overline{r+2k} \times \overline{s+2k} \times \overline{t+2k}$, &c. on trouvera $B = rsk + rtk + stk + rkk + skk + tkk + k^3$, $C = \overline{r+s+t} \times 2kk + 6k^3$, $D = 6k^3$, $E = 0$, $F = 0$, &c. & ainſi des autres cas. D'où il eſt clair auſſi que la ſomme ſe trouvera exactement lorsque $a = r^n$, $b = \overline{r+k}^n$, $c = \overline{r+2k}^n$, $d = \overline{r+3k}^n$, &c. n exprimant un de la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c.

Par exemple; étant donné $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. $= \log. \overline{1+x}$, qu'il faille trouver la ſomme de la ſérie

$$3.4x - \frac{5.6}{2}x^2 + \frac{7.8}{3}x^3 - \frac{9.10}{4}x^4 + \frac{11.12}{5}x^5 - \text{&c.},$$

Ici l'on a $r = 3$, $s = 4$, $k = 2$, $a = 12$, $B = 18$, $C = 8$; & $y = \frac{\log. \overline{1+x}}{x}$, $dy = \frac{1}{x \times \overline{1+x}} - \frac{\log. \overline{1+x}}{x^2}$,

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2}{x^2 \times \overline{1+x}} - \frac{1}{x \times \overline{1+x}^2} + \frac{2 \times \log. \overline{1+x}}{x^3},$$

ce qui donne la ſomme ou

$$N \times x = 2 \times \log. \overline{1+x} + \frac{10x}{1+x} - \frac{4x^2}{\overline{1+x}^2}.$$

COROLLAIRE II.

Par la raiſon qu'en ſuppoſant $y = v + Px + Qx^2 + \text{&c.}$ on a trouvé $av + bPx + cQx^2 + \text{&c.}$ ou $N = ay + B \times \frac{dx}{dy} x + \text{&c.}$ Si maintenant on ſuppoſe $N' = a'av + b'bPx + c'cQx^2 + \text{&c.}$ & que B', C', D', &c.

expriment les différences premiere, ſeconde, &c. des quantités données a', b', &c. on conclura pareillement

$$N' = a'N + B' \times \frac{dN}{dx}x + C' \times \frac{ddN}{2dx^2}x^2 + D' \times \frac{d^3N}{6dx^3}x^3 + \&c.$$

& de même ſi $N'' = a''a'av + b''b'bPx + c''c'cQx^2 + \&c.$ que B'', C'', D'', &c. marquent les ordres ſucceſſifs des différences de quantités a'', b'', c'', &c. on aura

$$N'' = a''N' + B'' \times \frac{dN'}{dx}x + C'' \times \frac{ddN'}{2dx^2}x^2 + \&c.$$

& ainſi de ſuite. Quand il arrive donc que les termes de la ſérie ſont multipliés par un produit quelconque de quantités données, au lieu de chercher la ſomme de la ſérie ainſi multipliée de la maniere enſeignée dans le corollaire précédent, on pourra, ſi l'on aime mieux, la trouver également à différentes repriſes par ce corollaire-ci.

Ainſi, pour trouver la ſomme de $3.4x - \frac{5.6}{2}x^2 + \frac{7.8}{3}x^3 - \&c.$ qui eſt l'exemple du corollaire précédent, on cherchera premierement la ſomme de $3 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{3}x^2 - \frac{9}{4}x^3 + \&c.$ Or dans ce cas l'on a $a = 3$, $k = 2$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 0$, &c. ce qui donne $N = \log. \frac{\overline{1+x}}{x} + \frac{2}{1+x}$: enſuite, puisque $a' = 4$, $k = 2$, $B' = 2$, $C' = 0$, $D' = 0$, &c. & $dN = \frac{1}{x \times \overline{1+x}} - \frac{2}{\overline{1+x}^2} - \frac{\log. \overline{1+x}}{x^2}$, on aura par ce corollaire $N' \times x = 3.4x - \frac{5.6}{2}x^2 + \frac{7.8}{3}x^3 - \&c.$

$= 2$

$= 2 \times \log. \overline{1+x} + \frac{10x}{1+x} - \frac{4x^2}{\overline{1+x^2}}$, comme on l'avoit trouvé auparavant.

COROLLAIRE III.

Etant donnée la quadrature des ſections coniques, on peut trouver par le moyen de ce Théoreme la ſomme d'une ſérie de cette nature.

$$\frac{a \times b \times c \times \&c.}{l \times m \times n \times \&c.} x^l + \frac{\overline{a+k} \times \overline{b+k} \times \overline{c+k} \times \&c.}{\overline{l+k} \times \overline{m+k} \times \overline{n+k} \times \&c.} x^{l+k} + \frac{\overline{a+2k} \times \overline{b+2k} \times \overline{c+2k} \times \&c.}{\overline{l+2k} \times \overline{m+2k} \times \overline{n+2k} \times \&c.} x^{l+2k} + \&c.$$

car l'intégrale de $\frac{x^{l-1}dx}{1+x^k}$, laquelle exprimée par une ſérie eſt $\frac{x^l}{l} - \frac{x^{l+k}}{l+k} + \frac{x^{l+2k}}{l+2k} - \&c.$ peut ſe trouver par les ſections coniques. L'on ſçait auſſi que v étant une fonction quelconque de x, on a $\int x^{\lambda-1} dx \times v = \frac{x^\lambda v}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int x^\lambda dv$, &

$$\int x^\lambda dv = \frac{x^{\lambda+l-k}}{\lambda+l-k} - \frac{x^{\lambda+l-2k}}{\lambda+l-2k} + \frac{x^{\lambda+l-3k}}{\lambda+l-3k} - \ldots \pm A,$$

le nombre des termes étant continué jusqu'à ce que l'expoſant $\lambda+l-rk$ devienne plus petit que k, & A exprimant l'intégrale de $\frac{x^{\lambda+l-rk}dx}{1+x^k}$ laquelle ſe trouvera auſſi par les ſections coniques.

De plus, puisque $\frac{l}{x^l} \int \frac{x^{l-1}dx}{1+x^k} = \frac{1}{l} - \frac{x^k}{l+k} + \frac{x^{2k}}{l+2k} - \&c.$ on aura, en faiſant $\int \frac{x^{l-1}dx}{1+x^k} = y$,

$$\int x^{m-l-1}dx \times y = \frac{x^m}{l \times m} - \frac{x^{m+k}}{l+k \times m+k} + \frac{x^{m+2k}}{l+2k \times m+2k} - \text{&c.} = u,$$

& pareillement

$$\int x^{n-m-1}dx \times u = \frac{x^n}{l \times m \times n} - \frac{x^{n+k}}{\overline{l+k} \times \overline{m+k} \times \overline{n+k}} + \frac{x^{n+2k}}{\overline{l+2k} \times \overline{m+2k} \times \overline{n+2k}} - \text{&c.}$$

& ainſi de ſuite. Or toutes ces intégrales ſe trouvent par les formules que nous venons de donner: cela fait, on achevera le reſte par le moyen du premier ou ſecond corollaire. Pour éclaircir ceci par un exemple, qu'il faille trouver la ſomme de la ſérie

$$\frac{3}{4.5.} - \frac{6x^3}{4.7.8} + \frac{9x^6}{7.10.11} - \frac{12x^9}{10.13.14} + \frac{15x^{12}}{13.16.17} - \text{&c.}$$

Comme l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^3}$ réduite en ſérie eſt $x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{13}}{13} - \text{&c.}$

on aura $\frac{x^{l-1}dx}{1+x^k} = \frac{dx}{1+x^3}$, & par conſéquent $l = 1$, $k = 3$,

& $y = \int \frac{dx}{1+x^3}$: comme l'on a auſſi $m = 4$, $n = 5$; donc

$\int x^{m-l-1}dx \times y = \int x^2 dx \times y = u$, & par la formule

$\int x^{\lambda-1}dx \times v = \frac{x^\lambda v}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int x^\lambda dv$, il vient $\int x^2 dx \times y = \frac{x^3 y}{3} - \frac{1}{3}\int x^3 dy$,

& par la formule $\int x^\lambda dv = \frac{x^{\lambda+l-k}}{\lambda+l-k} - \frac{x^{\lambda+l-2k}}{\lambda+l-2k} \ldots\ldots \pm A$,

l'on trouve $\int x^3 dy = x - y$, ce qui donne $u = \frac{x^3 y}{3} - \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$.

De la même maniere on trouve $\int x^{n-m-1}dx \times u = \int u\,dx = xu -$

$\int x\,du = xu - \frac{x^4}{4}y + \frac{1}{4}\int x^4 dy = xu - \frac{x^4}{4}y + \frac{x^2}{8} - \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{1+x^3}$

&

& remettant pour u ſa valeur, & diviſant le tout par x^n ou x^5, on aura

$$\frac{1}{x^5}\int u dx = \frac{y}{12x} + \frac{y}{3x^4} - \frac{5}{24x^3} - \frac{1}{4x^5}\int \frac{x dx}{1+x^3} = \frac{1}{4.5} - \frac{x^3}{4.7.8} + \frac{x^6}{7.10.11}$$

$$- \frac{x^9}{10.13.14} + \text{\&c.} = s.$$ Maintenant faiſant, $x^3 = z$ pour donner à la ſérie la forme requiſe par le Théoreme, on aura

$$s = \frac{y}{12z^{\frac{1}{3}}} + \frac{y}{3z^{\frac{4}{3}}} - \frac{5}{24z} - \frac{1}{4z^{\frac{5}{3}}} \int \frac{z^{-\frac{1}{3}} dz}{3 \times 1 + z}, \quad \&$$

$$\frac{ds}{dz} = \frac{17}{72z^2} - \frac{y}{36z^{\frac{4}{3}}} - \frac{4y}{9z^{\frac{7}{3}}} + \frac{5}{12z^{\frac{5}{3}}} \int \frac{z^{-\frac{1}{3}} dz}{3 \times 1 + z},$$ d'où par le premier corollaire, a étant $= 3$, & $k = 3$, l'on tire

$$N = as + \frac{kds}{dz} z = \frac{y}{6z^{\frac{1}{3}}} + 12z - \frac{y}{3z^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{2z^{\frac{5}{3}}} \int \frac{z^{-\frac{1}{3}} dz}{3 \times 1 + z},$$

on bien en ſubſtituant x^3 pour z, $N = \frac{1}{12x^3} + \frac{y}{6x} - \frac{y}{3x^4} + \frac{1}{2x^5}\int \frac{x dx}{1+x^3}$,

qui eſt la ſomme demandée.

Remarque.

Quoique nous n'ayons appliqué ce Théoreme qu'à des ſéries dont la ſomme peut ſe trouver exactement, cependant l'on voit facilement qu'on pourra s'en ſervir pour approcher de la ſomme des autres ſéries avec beaucoup moins de peine qu'en prenant, comme l'on fait d'ordinaire, la ſomme des termes.

THEOREME II.

Qu'on faſſe $B = c - b$, $C = d - 3c + 2b$, $D = e - 4d + 6c - 3b$, $E = f - 5e + 10d - 10c + 4b$, &c. & l'on aura

$N =$

$$N = av + b \times \overline{y - v} + B \times \frac{ddy}{2dx^2} x^2 + C \times \frac{d^3y}{6dx^3} + D \times \frac{d^4y}{24dx^4} x^4 + E \times \frac{d^5y}{120dx^5} x^5 + \&c.$$

DÉMONSTRATION.

Puisque $y = v + Px + Qx^2 + Rx^3 + \&c.$ il eſt clair que $b \times y - v = bPx + bQx^2 + bRx^3 + \&c.$ & le reſte de la démonſtration ſe fera comme dans le Théoreme précédent. C. Q. F. D.

La ſuite des termes qui forment les coëfficients B, C, D, &c. eſt manifeſte; ainſi l'on pourra continuer la ſérie N tant que l'on voudra.

COROLLAIRE

Ce Théoreme peut ſervir à trouver dans pluſieurs cas la ſomme des ſéries, ſoit exactement quand cela ce peut, ſoit par approximation. Qu'on ſuppoſe généralement

$$c = b + k$$

$$d = b + \overline{n + 1} \times k$$

$$e = b + \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} k$$

$$f = b + \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} \times \frac{n + 3}{3} k$$

$$g = b + \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} \times \frac{n + 3}{3} \times \frac{n + 4}{4} k$$

&c.

où n marque un des nombres 2, 3, 4, 5, &c. & l'on trouvera exactement la ſomme de la ſérie: il eſt à remarquer que la ſuite

$$k, n + 1, \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2}, \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} \times \frac{n + 3}{3}, \&c.$$

mar-

marque les différens ordres des nombres qu'on nomme triangulaires pyramidaux, etc. dont eſt conſtruit le Triangle arithmétique.

Par exemple, ſoit

$$y = \sqrt{r^2 + x} = r + \frac{x}{2r} - \frac{x^2}{8r^3} + \frac{x^3}{16r^5} - \frac{5x^4}{128r^7} + \frac{7x^5}{256r^9} - \text{etc.}$$

et qu'il faille trouver la ſomme de

$$ar + \frac{bx}{2r} - \frac{b+k}{8r^3}x^2 + \frac{b+3k}{16r^5}x^3 - \frac{b+6k}{128r^7}5x^4 + \frac{b+10k}{256r^9}7x^5 - \text{etc.}$$

Dans ce cas l'on a $n = 2$, $B = k$, $C = 0$, $D = 0$, etc.

$\frac{day}{dx^2} = -\frac{1}{4} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{3}{2}}$, et par conſéquent

$$N = av + b\sqrt{r^2 + x} - br - \frac{kx^2}{8} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{3}{2}}.$$

Pareillement, ſi $n = 3$, on trouvera $B = k$, $C = k$, $D = 0$, $E = 0$, etc. ce qui donnera

$$N = av + b\sqrt{r^2 + x} - br - \frac{kx^2}{8} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{1}{2}} + \frac{kx^3}{16} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{3}{2}}.$$

THEOREME III.

Qu'on regarde le premier terme v comme variable, & qu'on faſſe $B = c - b$, $C = d - \frac{3c}{2} + \frac{b}{2}$, $D = e - 2d + c$,

$E = f - \frac{5e}{2} + \frac{5d}{3} - \frac{b}{6}$, $F = g - 3f + \frac{5e}{2} - \frac{c}{2}$, etc.

et l'on aura

$$N = av + b \times \overline{y - v} + B \times \frac{dy - dv}{2dx} x + C \times \frac{ddy - ddv}{6dx^2} x^2 + D \times \frac{d^3y - d^3v}{24dx^3} x^3 + E \times \frac{d^4y - d^4v}{120dx^4} x^4 + F \times \frac{d^5y - d^5v}{720dx^5} x^5 + \text{etc.}$$

DEMONSTRATION.

Puisque l'on a $dy = Pdx + 2Qxdx + 3Rx^2dx +$ &c. donc, lorsque $x = 0$, $dy = Pdx = dv$; de la même maniere on trouvera, en ſe ſervant des différences de y que nous avons données dans la démonſtration du premier Théoreme, $ddv = 2Qdx^2$, $d^3v = 6Rdx^3$, $d^4v = 24Sdx^4$, $d^5v = 120Tdx^5$, &c. d'où l'on tirera facilement les équations ſuivantes

$$b \times \overline{y - v} = bPx + bQx^2 + bRx^3 + bSx^4 + bTx^5 + \text{etc.}$$

$$B \times \frac{dy - dv}{2dx} x = \cdot\cdot BQx^2 + \tfrac{3}{2}BRx^3 + 2BSx^4 + \tfrac{5}{2}BTx^5 + \text{etc.}$$

$$C \times \frac{ddy - ddv}{6dx^2} x^2 = \cdot\cdot\cdot\cdot CRx^3 + 2CSx^4 + \tfrac{10}{3}CTx^5 + \text{etc.}$$

$$D \times \frac{d^3y - d^3v}{24dx^3} x^3 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot DSx^4 + \tfrac{5}{2}DTx^5 + \text{etc.}$$

$$E \times \frac{d^4y - d^4v}{120dx^4} x^4 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ETx^5 + \text{etc.}$$

&c.

Enſuite, on comparera les termes de ces ſéries avec les termes correſpondans de la ſérie $av + bPx + cQx^2 + dRx^3 +$ &c. & l'on trouvera que les valeurs des coëfficients B, C, D, &c. ſont telles que nous les avons marquées ci-deſſus. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

L'on voit aſſés que ce Théoreme peut être utile en pluſieurs cas pour approcher de la ſomme des ſéries: ainſi je remarquerai ici ſeulement

ment que, ſi l'on avoit $c = b + 2k$, $d = b' + 3k$, $e = b + 4k$ &c. on trouveroit exactement la ſomme de la ſérie propoſée; car dans ce cas l'on trouve $B = 2k$, $C = 0$, $D = 0$, &c. & par conſéquent $N = av + b \times \overline{y - v} + k \times \frac{dy - dv}{dx} x$.

Qu'on ſuppoſe $y = \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{3}{2}} = r^3 + \frac{3rs}{2}x + \frac{3r}{2}x^2 + \frac{3s}{4r}x^3 + \frac{3}{8r}x^4 + \frac{3s^2}{8r}x^2 - \frac{s^3}{16r^3}x^3 - \frac{3s^2}{16r^3}x^4 + \frac{3s^4}{128r^5}x^4$ etc.

& qu'on multiplie le premier terme de cette ſérie par a, le ſecond par b, le troiſieme par $b + k$, le quatrieme par $b + 2k$, & ainſi de ſuite: on a donc $dy = \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{1}{2}} \times \frac{3s}{2}dx + 3xdx$, et $dv = \frac{3rs}{2}dx$, ce qui donne

$$N = \overline{a - b} \times r^3 + b \times \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{1}{2}} - \frac{3krs}{2}x + \overline{\frac{3ks}{2}x + 3kx^2} \times \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE II.

Soit dans la courbe parabolique une ſuite d'ordonnées PA, QL, RM, &c. (fig. 5.) également diſtantes entre elles, & ſoit $PA = v$, $QL = y$, $RM = u$, &c. $AL = LM = MN = \&c. = x$. Or comme cette courbe parabolique donne $y = v + Px + Qx^2 + Rx^3$ &c. on aura pareillement $u = y + px + qx^2 + rx^3 +$ &c. p, q, r, &c. étant les coëfficients des termes; & il eſt clair que, de même qu'on a

$$N = av + bPx + cQx^2 + \text{etc.} = av + b\,d\overline{y - v} + Bx\frac{dy - dv}{2dx}x + Cx\frac{ddy - ddv}{6dx^2}x^2 + \text{etc},$$

on aura auſſi

$$N' = ay + bpx + cqx^2 + \text{etc.} = ay + b \times \overline{u - y} + B \times \frac{du - dy}{2\,dx} x + C \times \frac{ddu - ddy}{6\,dx^2} x^2 + \text{etc.}$$

&, en prenant la ſomme des deux équations, il vient

$$N + N' = a \times \overline{v + y} + b \times \overline{u - v} + B \times \frac{du - dv}{2dx} x + C \times \frac{ddu - ddv}{6\,dx^2} x^2 + \text{etc.}$$

d'où il ſuit que, tel que ſoit le nombre des ordonnées, ſi on nomme la premiere v, la derniere ω; & que la ſomme de toutes ces ordonnées, moins la derniere, ſoit nommée S, & la ſomme des N, N′, N″, &c. ſoit nommée K, on aura toujours

$$K = a \times S + b \times \overline{\omega - v} + B \times \frac{d\omega - dv}{2\,dx} x + C \times \frac{dd\omega - ddv}{2\,dx^2} x^2 + D \times \frac{d^3\omega - d^3v}{24\,dx^3} x^3 + E \times \frac{d^4\omega - d^4v}{120\,dx^4} x^4 + F \times \frac{d^5\omega - d^5v}{720\,dx^5} x^5 + \text{etc.}$$

Qu'on faſſe $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, &c. & l'on aura

$$N = v + \frac{Px}{2} + \frac{Qx^2}{3} + \frac{Rx^3}{4} + \text{etc.}$$ d'où l'on voit que

N × x dans ce cas ſera égale à l'eſpace parabolique PALQ, N′ × x ſera égale à l'eſpace QLMR; et généralement, ſi TO eſt la derniere des ordonnées qu'on a nommée ω, K × x ſera égale à la ſomme des eſpaces paraboliques compris entre la premiere et la derniere ordonnée, c'eſt à dire, à l'eſpace PAOT que je nommerai H; ce cas donne auſſi $B = -\frac{1}{6}$, $C = 0$, $D = \frac{1}{30}$, $E = 0$, $F = -\frac{1}{42}$, $G = 0$, etc. ainſi on aura

$$H = Sx + \frac{\omega - v}{2} x - \frac{d\omega - dv}{12\,dx} x^2 + \frac{d^3\omega - d^3v}{720\,dx^3} x^4 - \frac{d^5\omega - d^5v}{30240\,dx^5} x^6 + \frac{d^7\omega - d^7v}{1209600\,dx^7} x^8 \text{ etc.}$$

$$S = \frac{H}{x} - \frac{\omega - v}{2} + \frac{d\omega - dv}{12\,dx} x - \frac{d^3\omega - d^3v}{720\,dx^3} x^3 + \frac{d^5\omega - d^5v}{30240\,dx^5} x^5 - \frac{d^5\omega - d^7v}{1209600\,dx^7} x^7 + \text{etc.}$$

Cette

Cette formule-ci a été trouvée d'une autre maniere par M. *Mac-Laurin* dans ſon Traité des fluxions art. 839, et il a ſuffiſamment fait voir l'étendue de ſon uſage.

THEOREME IV.

Conſervant toujours l'équation $y = v + Px + Qx^2 +$ etc. qu'on ſuppoſe maintenant $h = \int y dx = vx + \frac{Px^2}{2} + \frac{Qx^3}{3} + \frac{Rx^4}{4} +$ &c. & $N = avx + \frac{bPx^2}{2} + \frac{cQx^3}{3} + \frac{dRx^4}{4} +$ &c. & qu'on faſſe $B = b - a$, $C = c - 3b + 2a$, $D = d - 4c + 6b - 3a$, $E = e - 5d + 10c - 10b + 4a$, &c. & l'on aura

$$N = ah + B \times \frac{dy}{2dx}x^2 + C \times \frac{ddy}{6dx^2}x^3 + D \times \frac{d^3y}{24dx^3}x^4 + E \times \frac{d^4y}{120dx^4}x^5 + \text{etc.}$$

La démonſtration eſt ſemblable à celle du ſecond Théoreme, en y faiſant quelques legers changemens qu'il eſt facile d'appercevoir.

COROLLAIRE

On peut remarquer que, toutes les fois qu'on aura

$$b = a + k$$

$$c = a + \overline{n+1} \times k$$

$$d = a + \overline{n+1} \times \frac{n+2}{2} k$$

$$e = a + \overline{n+1} \times \frac{n+2}{2} \times \frac{n+3}{3} k$$

&c.

en ſubſtituant pour n quelqu'un des nombres 2, 3, 4, 5, &c. on trouvera exactement la ſomme de la ſérie.

Par exemple, étant donné le logarithme hyperbolique de $1+x$ qui eſt $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c. il ſera facile d'avoir la ſomme de $ax - \frac{a+k}{2}x^2 + \frac{a+4k}{3}x^3 - \frac{a+10k}{4}x^4 + \frac{a+20}{5}k_1x^5 -$ etc. car l'on a $n = 3$, $B = k$, $C = k$, $D = 0$, $E = 0$, &c. $y = \frac{1}{1+x}$, $h = \log.\overline{1+x}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\overline{1+x}^2}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{\overline{1+x}^3}$, & en ſubſtituant ces valeurs il vient

$$N = a \times \log.\overline{1+x} - \frac{k}{2} \times \frac{x^2}{\overline{1+x}^2} + \frac{k}{3} \times \frac{x^3}{\overline{1+x}^3}.$$

THEOREME V.

Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Théoreme précédent, ſi l'on regarde v comme variable, & que l'on faſſe $B = b - a$, $C = c - \frac{3b}{2} + \frac{a}{2}$, $D = d - 2c + b$, $E = e - \frac{5d}{2} + \frac{5c}{3} - \frac{a}{6}$, $F = f - 3e + \frac{5d}{2} - \frac{b}{2}$, &c. on aura

$$N = ah + B \times \frac{y-v}{2}x + C \times \frac{dy-dv}{6\,dx}x^2 + D \times \frac{ddy-ddv}{24\,dx^2}x^3 + E \times \frac{d^3y-d^3v}{120\,dx^3}x^4 + F \times \frac{d^4y-d^4v}{720\,dx^4}x^5 + \&c.$$

La démonſtration en eſt peu différente de celle du troiſieme Théoreme.

COROL-

COROLLAIRE.

La commune distance des ordonnées PA, QL, RM, &c. (fig. o.) étant supposée x, & ayant nommé PA, v; QL, y; RM, u; &c. il est clair que, de même qu'on a $y = v + Px + Qx^2 +$ &c. on aura aussi $u = y + px + qx^2 +$ &c. p, q, &c. étant les coëfficients des termes; & faisant $N' = ayx + \frac{bpx^2}{2} + \frac{cqx^3}{3} +$ &c. & $h' = \int u\,dx$, ce Théoreme donnera

$$N' = ah' + B \times \frac{u - y}{3} x + C \times \frac{du - dy}{6\,dx} x^2 + \text{&c.}$$

& la somme de cette équation & de celle du Théoreme donne

$$N + N' = a \times \overline{h + h'} + B \times \frac{u - v}{2} x + C \times \frac{du - dv}{6\,dx} x^2 + D \times \frac{ddu - ddv}{24\,dx} x^3 + \text{&c.}$$

D'où il est manifeste que, si la premiere des ordonnées soit nommée v, la derniere ω, la somme des N, N', N'', &c. soit désignée par K, & la somme des h, h', h'', &c. c'est à dire, des espaces paraboliques PALQ, QLMR, &c. par H, on aura toujours

$$K = a \times H + B \times \frac{\omega - v}{2} x + C \times \frac{d\omega - dv}{6\,dx} x^2 + D \times \frac{dd\omega - ddv}{24\,dx^2} x^3 + E \times \frac{d^3\omega - d^3v}{120\,dx^3} x^4 + F \times \frac{d^4\omega - d^4v}{720\,dx^4} x^5 + \text{&c.}$$

Soit $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{5}$, &c. et l'on trouvera $B = -\frac{1}{6}$, $C = o$, $D = \frac{1}{30}$, $E = o$, $F = -\frac{1}{42}$, $G = o$, etc. ce qui réduira le Théoreme à cette forme

$$K = \frac{H}{2} - \frac{\omega - v}{12} x + \frac{dd\omega - ddv}{720\,dx^2} x^3 - \frac{d^4\omega - d^4v}{30240\,dx^4} x^5 + \frac{d^6\omega - d^6v}{1209600\,dx^6} x^7 - \text{etc.}$$

THEO-

THEOREME VI.

Ayant ſuppoſé $y = A + Px + Qx^2 + Rx^3 + \text{etc.} = ZK$ (fig. 6) et $AZ = x$, ſi l'on prend de l'autre côté du point A, $Az = AZ$, et qu'on mene l'ordonnée $zk = v$; ſi de plus on ſuppoſe $aA + bQx^2 + cSx^4 + dVx^6 + \text{etc.} = N$, et qu'on faſſe $B = b - a$, $C = c - 2b + a$, $D = d - 5c + 7b - 3a$, $E = e - \frac{2}{3}^8 d + \frac{2}{3}^8 c - \frac{1}{3}^4 b + 17a$, $F = f - 15e + 98d - 310c + 381b - 155a$, etc. Je dis qu'on aura

$$N = ax\frac{y+v}{2} + Bx\frac{dy-dv}{4dx}x + Cx\frac{d^3y-d^3v}{48dx^3}x^3 + Dx\frac{d^5y-d^5v}{144dx^5}x^5 +$$
$$Ex\frac{d^7y-d^7v}{80640dx^7}x^7 + Fx\frac{d^9y-d^9v}{7257600dx^9}x^9 + \text{etc.}$$

DEMONSTRATION.

Puisque $y = A + Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \text{etc.}$, on aura $v = A - Px + Qx^2 - Rx^3 + Sx^4 - \text{etc.}$,

et par conſéquent $\frac{y+v}{2} = A + Qx^2 + Sx^4 + Vx^6 + Zx^8 + \text{etc.}$

Qu'on prenne la difference premiere, troiſieme, cinquieme, etc. de la derniere équation, en obſervant que ces différences de v ſont négatives, et l'on aura

$$\frac{dy-dv}{2} = 2Qxdx + 4Sx^3dx + 6Vx^5dx + 8Zx^7dx + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3y-d^3v}{2} = 2.3.4\,Sxdx^3 + 4.5.6\,Vx^3dx^3 + 6.7.8\,Zx^5dx^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^5y-d^5v}{2} = 2.3.4.5.6\,Vxdx^5 + 4.5.6.7.8\,Zx^3dx^5 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^7y-d^7v}{2} = 2.3.4.5.6.7.8\,Zxdx^7 + \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

D'où

D'où l'on tirera

$$a \times \frac{y + v}{2} = aA + aQx^2 + aSx^4 + aVx^6 + aZx^8 + \&c.$$

$$B \times \frac{dy - dv}{4\,dx}\,x = \cdot\cdot\ BQx^2 + 2BSx^4 + 3BVx^6 + 4BZx^8 + \&c.$$

$$C \times \frac{d^3y - d^3v}{48\,dx^3}\,x^3 = \cdot\cdot\cdot\ CSx^4 + 5CVx^6 + 14CZx^8 + \text{etc.}$$

$$D \times \frac{d^5y - d^5v}{1440\,dx^5}\,x^5 = \cdot\cdot\cdot\cdot\ DVx^6 + \tfrac{28}{3}DZx^8 + \&c.$$

$$E \times \frac{d^7y - d^7v}{80640\,dx^7}\,x^7 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ EZx^8 + \&c.$$

&c.

& ſi on compare les termes de ces ſéries avec les termes correſpondans de la ſérie $aA + bQx^2 + cSx^4 + dVx^6 + \&c.$ on trouvera les valeurs des coëfficients B, C, D, &c. telles que nous les avons marquées.

COROLLAIRE I.

S'il arrive que $b = a + k$, $c = a + 2k$, $d = a + 3k$, &c. on trouvera $B = k$, $C = 0$, $D = 0$, &c. & par conſéquent ce ſera un cas où l'on aura exactement la ſomme de la ſérie propoſée.

Par exemple; ſi, ayant

$$\frac{1}{1 - 3x^2 + x^4} = 1 + 3x^2 + 8x^4 + 21x^6 + 55x^8 + \&c.$$

l'on demande la ſomme de

$$a + \overline{a + k} \times 3x^2 + \overline{a + 2k} \times 8x^4 + \overline{a + 3k} \times 21x^6 + \&c.$$

on aura $\frac{y+v}{2} = \frac{1}{1 - 3x^2 + x^4}$, $\frac{dy - dv}{4\,dx} = \frac{3v - 2x^3}{(1 - 3x^2 + x^4)^2}$,

ce qui donne la ſomme, ou

$$N = \frac{a}{1 - 3x^2 + x^4} + \frac{3kx^2 - 2kx^4}{1 - 3x^2 + x^4{}^2}.$$

COROLLAIRE II.

Dans l'équation

$$aAx + bQx^3 + cSx^5 + dVx^7 + \&c. = ax\frac{y+v}{2}x + Bx\frac{dy-dv}{4dx}x^2 + Cx\frac{d^3y-d^3v}{48dx^3}x^4 + \&c.$$

qu'on ſubſtitue au lieu de $\frac{y+v}{2}$ ſa valeur $A + Qx^2 + Sx^4 + \&c.$ & il viendra $aAx + \overline{a-b}xQx^3 + \overline{a-c}xSx^5 + \overline{a-d}xVx^7 + \&c.$

$$= aAx - B \times \frac{dy - dv}{4dx}x^2 - C \times \frac{d^3y - d^3v}{48dx^3}x^4 + \&c.$$

Enſuite, faiſant $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{4}{5}$, $d = \frac{6}{7}$, $e = \frac{8}{9}$, &c. le premier membre de cette équation deviendra $Ax + \frac{Qx^3}{3} + \frac{Sx^5}{5} + \frac{Vx^7}{7} + \text{etc.}$ qui eſt égal à $\int \frac{y+v}{2}dx$, c'eſt à dire, à la moitié de l'aire paraboli-que compriſe entre les ordonnées v & y: qu'on faſſe donc $\int \overline{y+v} \times dx = h$, & comme dans la ſuppoſition préſente l'on a $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{7}{15}$, $D = -\frac{31}{231}$, $E = \frac{127}{315}$, $F = -\frac{5 \times 511}{33}$, &c. il en réſultera

$$\frac{h}{2} = Ax + \frac{\overline{dy-dv}}{12dx}x^2 - \frac{7 \times \overline{d^3y-d^3v}}{720dx^3}x^6 + \frac{31 \times \overline{d^5y-d^5v}}{30240dx^5}x^6 - \frac{127 \times \overline{d^7y-d^7v}}{1209600dx^7}x^8$$

$$+ \frac{511 \times \overline{d^9y-a^9v}}{47900160dx^9}x^{10} - \&c.$$

Main-

Maintenant, ſi l'on ſuppoſe que la commune diſtance des ordonnées PA, QL, RM, &c. eſt $2x$, & que $AZ = x$, & qu'ayant pris $LX = AZ$ on éleve l'ordonnée $Xr = u$, il eſt clair qu'en nommant h' l'eſpace $KZXr$ & $1A$ l'ordonnée QL, on aura

$$\frac{h'}{2} = 1Ax + \frac{du - dy}{12\,dx}x^2 - 7 \times \frac{\overline{d^3u - d^3y}}{720\,dx^3}x^4 + \&c.$$

& cette équation ajoûtée à la précédente donne

$$\frac{h+h'}{2} = \overline{A+1A} \times x + \frac{du-dv}{12\,dx}x^2 - \frac{7 \times \overline{d^3u - d^3v}}{720\,dx^3}x^4 - \&c.$$

& comme on auroit de ſemblables équations pour chaque ordonnée RM, SN, &c. il s'enſuit que, ſi TO la derniere de ces ordonnées ſoit nommée ω, & qu'on prenne en avançant du même côté $Os = AZ = \frac{x}{2}$, & qu'on nomme H l'aire $kzst$ terminée par les ordonnées zk, st, & S la ſomme de toutes les ordonnées PA, QL . . . . . TO, on aura

$$\frac{H}{2} = Sx + \frac{d\omega - dv}{12\,dx}x^2 - \frac{7 \times \overline{d^3\omega - d^3v}}{720\,dx^3}x^4 + \frac{31 \times \overline{d^5\omega - d^5v}}{30240\,dx^5}x^6 - \frac{127 \times \overline{d^7\omega - d^7v}}{1209600\,dx^7}x^8 + \frac{511 \times \overline{d^9\omega - d^9v}}{47900160\,dx^9}x^{10} - \&c.$$

$$S = \frac{H}{2x} - \frac{d\omega - dv}{12\,dx}x + \frac{7 \times d^3\omega - d^3v}{720\,dx^3}x^3 - \frac{31 \times \overline{d^5\omega - d^5v}}{30240\,dx^5}x^5 + \frac{127 \times \overline{d^7\omega - d^7v}}{1209600\,dx^7}x^7 - \frac{511 \times d^9\omega - d^9v}{47900160\,dx^9}x^9 + \&c.$$

Cette formule-ci a été trouvée d'une autre maniere par M. *Mac-Laurin* dans ſon Traité des fluxions art. 832, et il en a fait voir l'uſage par l'application qu'il en a fait à pluſieurs exemples.

THEOREME VII.

Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Théoreme précédent, ſi l'on fait $B = \frac{b - a}{3}$, $C = \frac{c}{5} - \frac{2b}{3} + \frac{7a}{15}$, $D = \frac{d}{7} - c + \frac{7b}{3} - \frac{35}{11}a$, $E = \frac{e}{9} - \frac{4}{3}d + \frac{88}{15}c - \frac{322}{9}b + \frac{1127}{15}a$, $F = \frac{f}{11} - \frac{55}{3}e + 14d - 62c + 127b - \frac{2555}{3}a$, &c. on aura

$$Nxx = \frac{ah}{2} + Bx\frac{dy-dv}{4dx}x^2 + Cx\frac{d^3y-d^3v}{48dx^3}x^4 + Dx\frac{d^5y-d^5v}{1440dx^5}x^6 + Ex\frac{d^7y-d^7v}{80640dx^7}x^8 + Fx\frac{d^9y-d^9v}{7257600dx^9}x^{10} + \&c.$$

La démonſtration de ce Théoreme eſt fort peu différente de celle du Théoreme précédent.

COROLLAIRE.

Comme les formules qu'on vient de trouver dans les deux derniers Théoremes ont une grande convergence, elles peuvent être fort utiles pour approcher avec peu de peine de la valeur des ſéries. Pour indiquer un cas dans lequel la ſérie auroit une ſomme déterminée, on n'a qu'à ſuppoſer $b = a + 3k$, $c = b + 7k$, $d = c + 11k$, $e = d + 15k$, &c. car alors on auroit $B = k$, $C = 0$, $D = 0$, &c. & le Théoreme donneroit

$$N \times x = \frac{ah}{2} + k \times \frac{dy - dv}{4dx} x^2.$$

THEO-

THEOREME VIII.

Les mêmes choſes étant encore ſuppoſées, ſi l'on prend r pour une quantité invariable, mais indéterminée, & qu'on faſſe $B = a - r$, $C = \frac{b - 3a + 2r}{3}$, $D = \frac{c}{5} - \frac{2}{3}b + a - 1\frac{2}{15}r$, $E = \frac{d}{7} - c + \frac{7}{3}b - 3a + 1\frac{2}{21}r$, $F = \frac{e}{9} - \frac{4}{5}d + 2\frac{2}{15}c - 1\frac{2}{9}b + 17a - 1\frac{2}{15}r$, &c. on trouvera, en ſuivant à peu prés la même méthode dont on s'eſt ſervi dans les deux Théoremes précédens,

$$Nxx = \frac{rh}{2} + Bx\frac{y+v}{2}x + Cx\frac{dy-dv}{4\,dx}x^2 + Dx\frac{d^3y-d^3v}{48\,dx^4}x^4 + Ex\frac{d^5y-d^5v}{1440\,dx^5}x^6 + Fx\frac{d^7y-d^7v}{80640\,dx^7}x^8 + \&c.$$

COROLLAIRE.

Si l'on ſuppoſe $b = a + k$, $c = a + 2k$, $d = a + 3k$, &c. & qu'on faſſe $r = a - \frac{k}{2}$: ou, ſi l'on ſuppoſe $a = s \times t$, $b = \overline{s + k} \times \overline{t + k}$, $c = \overline{s + 2k} \times \overline{t + 2k}$, $d = \overline{s + 3k} \times \overline{t + 3k}$, &c. & qu'on faſſe $r = \overline{s - \frac{k}{2}} \times \overline{t - \frac{k}{2}}$, on trouvera exactement la ſomme de la ſérie; car dans le premier l'on a $B = \frac{k}{2}$, $C = 0$, $D = 0$, &c. & par conſéquent $Nxx = \overline{a - \frac{k}{2}} x\frac{h}{2} + \frac{k}{2}x\frac{y+v}{2}x$; dans le ſecond cas il vient $B = \frac{sk + tk}{2} - \frac{kk}{4}$, $C = \frac{kk}{2}$, $D = 0$, $E = 0$, &c.

ce qui donne

$$N \times x = s - \frac{k}{2} \times t - \frac{k}{2} \times \frac{h}{2} + \frac{sk + tk - kk}{2} \times \frac{y + v}{4} \times x + \frac{kk}{2} \times \frac{dy - dv}{4\,dx} x^2.$$

Par exemple, étant donné le logarithme hyperbolique de $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ qui eſt $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} +$ &c. on trouvera la ſomme de la ſuite $1.3\,x + \frac{2.4}{3} x^3 + \frac{3.5}{5} x^5 + \frac{4.6}{7} x^7 +$ &c. car dans ce cas l'on a $s = 1$, $t = 3$, $k = 1$, $r = \frac{1}{4}$, $\frac{y+v}{2} = \frac{1}{1-xx}$, $\frac{dy-dv}{4\,dx} = \frac{x}{1-xx^2}$, $\frac{h}{2} = \log. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, ce qui donne

$$N \times x = \tfrac{1}{4} \log. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{7x}{4 \times \sqrt{1-xx}} + \frac{x^3}{2 \times \sqrt{1-xx}^3}.$$

MA-

MANIERE NOUVELLE
DE
TROUVER LE TERME GÉNÉRAL DES SÉRIES
RECURRENTES,
PAR M. WALMESLEY.

Après les grands-hommes qui ont conſidéré les *Séries recurrentes*, il y auroit de la témérité à remanier ce ſujet dans le deſſein de mettre les nouvelles réflexions à coté des anciennes découvertes. Mais, comme je ne prétends que de donner un petit ſupplément, qu'ils ont ſans doute plutôt négligé qu'oublié, je me flatte qu'on ne déſapprouvera point mes foibles efforts. En voici l'occaſion. J'avois fait, il y a quinze ans, un ample Commentaire ſur l'*Arithmétique univerſelle du Chevalier Newton.* Quelques années après, je crus d'avoir trouvé l'occaſion de le faire imprimer: occaſion qui n'eſt encore que trop éloignée par la faute des Libraires. En reliſant mon Ouvrage, je penſai devoir y ajouter la methode de trouver les racines approchées d'une équation par les *Séries recurrentes*, que M. *Daniel Bernoulli* a découverte, & que M. *Euler* a ſi bien expliquée. Dans cette vue, je cherchai le terme général de ces ſéries d'une maniere nouvelle, que je communiquai l'année paſſée à M. *Bouquet*, Officier très verſé dans les Mathématiques. Le peu de loiſir que j'avois alors, m'empecha de détailler une démonſtration, dont M. *Bouquet* n'avoit pas beſoin; & que pluſieurs m'ont demandée, depuis que cette méthode a été publiée dans la *Nouvelle Bibliotheque des Sciences & des beaux Arts.* Je prends donc le parti de la ſoumettre au jugement de l'Académie. Si elle approuve mes raiſonnemens, qui oſera les condamner?

PRO-

PROPOSITION L.

THEOREME.

Si on éleve à une puiſſance quelconque un polynome, dont les termes contiennent la même lettre avec des expoſans en progreſſion arithmétique depuis 1 *jusqu'à* n; *les expoſans des termes de la puiſſance ſeront auſſi en progreſſion arithmétique,*

DEMONSTRATION.

Soit

$$bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 \text{ - - - - - } + \overset{*}{*} x^n$$

le polynome qu'on doit elever à la puiſſance dont l'expoſant eſt q: que les étoiles $\overset{*}{*}$ marquent le coëfficient de x^n, & que $\overset{*}{*} x^n + A$ ſoit égal à tout le polynome, que A exprime jusqu'à $\overset{*}{*} x^n$ excluſivement.

En négligeant les coëfficiens, auxquels on ne fait pas attention, on ſait que

$$(x^n + A)^q = x^{nq} + x^{nq-n}A + x^{nq-2n}A^2 \text{ - - - - } + A^q.$$

Or

$$A = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} \text{ - - - - } + x^1.$$

Donc

$$x^{nq-n}A = x^{nq-n}(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \text{ - - - - } + x^1)$$

c'eſt à dire

$$x^{nq-n}A = x^{nq-1} + x^{nq-2} + x^{nq-3} \text{ - - - - } + x^{nq-n+2} + x^{nq-n+1}.$$

Donc les deux premiers termes de $(x^n + A)^q$ ont leurs expoſans en progreſſion arithmétique; puiſqu'ils ſont

nq; $nq-1$; $nq-2$; $nq-3$ - - - - - $nq-n+3$; $nq-n+2$; $nq-n+1$.

Mais tous les autres termes ſe déterminent comme les deux premiers. Car ſoit

$A = x^{n-1} + B$; on aura $A^2 = x^{2n-2} + x^{n-1}B + B^2$.

&

&

$$B = x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} \cdots + x^{1}.$$

&

$$x^{n-1} B = x^{2n-3} + x^{2n-4} + x^{2n-5} \cdots + x^{n}.$$

Donc

$$x^{nq-2n} A^2 = x^{nq-3} + x^{nq-4} + x^{nq-5} \cdots + x^{nq-n}.$$

dont les expoſans ſont

$nq-3$; $nq-4$; $nq-5$; $nq-6$ ----- $nq-n+2$; $nq-n+1$; $nq-n$

qui rentrent dans la premiere progreſſion, & l'augmentent d'un terme.

On prouvera la même choſe de B^2, en ſuppoſant $B = x^{n-2} + C$. Et ainſi toujours.

A′ préſent

$$A^3 = x^{3n-3} + x^{2n-2} B + x^{n-1} B^2 + B^3$$

On appliquera le raiſonnement précédent à B & B^2; on l'étendra à B^3 en le faiſant $= x^{n-2} + C$; &c.

Il eſt évident que de cette maniere la démonſtration a lieu pour toutes les puiſſances de A; de B; de C &c. Donc &c.

COROLLAIRE.

Puisque les expoſans de ce polynome élevé à la puiſſance q, forment la progreſſion arithmétique

nq; $nq-1$; $nq-2$; $nq-3$ ---- $q+3$; $q+2$; $q+1$; q;

les expoſans du même polynome élevé à la puiſſance $q+t$, formeront la progreſſion arithmétique

$qn+nt$; $qn+nt-1$; $qn+nt-2$ ----- $q+t+3$; $q+t+2$; $q+t+1$; $q+t$.

Et en donnant à t la valeur des nombres naturels, 1°, 2°, 3°, &c. on trouvera des progreſſions qui auront des termes communs. Par conſéquent, toutes ces différentes puiſſances du même polynome auront des termes communs.

Remarque.

On auroit pu donner à cette démonſtration un air plus général en prenant $x^{nq} - {}^{mn}\mathrm{A}^{m}$, terme général de $(x^n + \mathrm{A})^q$; en réduiſant ce terme en ſéries, & donnant à m ſucceſſivement les valeurs de 0°, 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, &c. Mais la démonſtration que je viens de rapporter, m'a paru plus claire.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Si on doit multiplier quelques termes de la puiſſance de la Prop. 1. *par les termes d'un polynome dont les expoſans ſont en progreſſion arithmétique depuis* 0 *juſqu'à* m, *terme à terme, en ſorte que la ſomme des expoſans dans chaque terme du produit faſſe toujours un nombre donné* p *plus grand que* m; *la moindre puiſſance qui ſatisfaſſe à la queſtion, eſt celle qui a pour expoſant* $q = \frac{p - m}{n}$.

DEMONSTRATION.

Soit le polynome $x^n + \mathrm{A} = \mathrm{P}$, qu'il faut élever à une certaine puiſſance; & qu'il faille multiplier quelques termes de cette puiſſance par les termes du polynome

$$\mathrm{Q} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \text{ - - - - } + \ast x^{\ast}$$

dans leur ordre, en ſorte que, dans chaque terme du produit, la ſomme des expoſans de x donne le nombre p. L'étoile $\ast$ denote le coëfficient du terme x^m dans le polynome Q.

La

La plus baſſe puiſſance de P, dont quelque terme multiplié par quelque terme de Q, donne l'expoſant p, eſt celle dont le plus haut terme de Q, fait p. Le plus haut terme de P a pour expoſant n. Si donc l'expoſant de la puiſſance, à laquelle il faut élever P, eſt y, l'expoſant du plus haut terme dans Py ſera ny, qui, multiplié par m expoſant du plus haut terme de Q, produit $ny + m$; & ce nombre doit être égal à p: d'où on tire $y = \frac{p - m}{n} = q$, pour nous en tenir à la dénomination de la Prop. 1.

PROPOSITION III.

THEOREME.

Si $\frac{p - m}{n}$ *etoit une fraction lorsqu'il faut des nombres entiers, on doit prendre le plus petit des nombres entiers au deſſus de cette fraction.*

DEMONSTRATION.

Soit q le nombre entier qu'on prend au lieu de la fraction $\frac{p - m}{n}$: Si q étoit plus petit que $\frac{p - m}{n}$; alors nq ſeroit plus petit que $p - m$, & $nq + m$ plus petit que p. Mais nq eſt les plus haut expoſant de Pq. Donc cette puiſſance ne fournit aucun terme qui ſatisfaſſe à la queſtion.

Mais, lorsque q eſt plus grand que $\frac{p - m}{n}$; alors $nq + m$ eſt plus grand que p. Les expoſans de Pq vont en diminuant depuis nq jusqu'à q: donc les expoſans du produit iront en diminuant depuis $nq + m$ jusqu'à $q + m$. Si $q + m = p$; le dernier terme de Pq eſt celui qu'on demande. Si $q + m$ eſt plus

grand que p, la puiſſance P_q eſt trop haute. Et ſi $q + m$ eſt plus petit que p, la puiſſance Pq fournira quelque terme qui ſatisfait à la queſtion.

Soit donc $q = \frac{p - m + r}{n}$, où $p - m + r$ eſt diviſible par n. Il faut que q ſoit le plus petit des nombres entiers au deſſus de la fraction $\frac{p - m}{n}$. Car autrement il y en auroit un plus petit, & P_q ne ſeroit pas la plus baſſe puiſſance; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Dans la ſuppoſition de la Prop. III. *les* m + 1 *premiers termes de* Pq *à commencer par le* r — m + 1 . . . eme *donneront ce qu'on demande dans la* Prop. II. *Et ſi* r — m + 1 *étoit un nombre négatif, il faudroit mettre avant le premier terme de* Pq *autant de* o *qu'il y a d'unités dans le nombre* m — r.

DEMONSTRATION.

1°. Les expoſans que P_q a dans ſes différens termes, ſont

nq; $nq-1$; $nq-2$; $nq-3$ . . . . $nq-y$; $nq-y-1$; $nq-y-2$ . . . q.

& le premier terme qui ſatisfait à la queſtion, doit être multiplié par $\alpha = ax^{\circ}$, & ſon expoſant doit être p. Soit $nq - y$ l'expoſant de ce terme: donc $nq - y + o = p$, & $y = nq - p$. Mais $nq = p - m + r$, & par conſéquent $y = r - m$. Or le terme qui a pour expoſant $nq - y$ eſt le $y + 1$ . . eme: il eſt donc le $r - m + 1$ . . eme.

2°. Le polynome Q a $m + 1$ termes. Chacun de ces termes doit être le multiplicateur d'un des termes de Pq: donc en tout il en faut multiplier autant qu'il y a d'unités dans le nombre $m + 1$.

3°.

3°. Le nombre des termes de Pq eſt poſitif en deſcendant du premier, au ſecond, au troiſieme, au quatrieme &c. Donc il eſt négatif en remontant du premier à l'avant-premier &c. Mais ces termes ne ſubſiſtent point: c'eſt pourquoi il faut les repréſenter par des o.

Remarque.

Voici une autre démonſtration de la troiſieme partie de cette Propoſition. Le terme qu'on cherche doit avoir pour expoſant $nq - y = nq + m - r$. Mais $r - m$ eſt négatif par la ſuppoſition; donc $m - r$ eſt poſitif, & $nq + m - r$ eſt plus grand que nq. Le terme, dont $nq + m - r$ eſt l'expoſant, doit être tiré de Pq; & le plus grand expoſant qu'on y trouve, eſt nq. Donc le terme qu'on demande n'y eſt point.

De plus; le plus haut terme de Pq a pour expoſant $nq = p - m + r + o$, nombre qui eſt plus petit que p, puiſque $- m + r$ eſt un nombre négatif. C'eſt pourquoi ce n'eſt pas par x^o qu'il faut multiplier le terme de Pq qui a pour expoſant $p - m + r$, pour lui donner l'expoſant p, mais par x^{m-r}. Or x^{m-r} eſt le $m - r + 1$---eme terme du polynome Q: donc il faut omettre les $m - r$, premiers termes de ce polynome dans la multiplication; ce qui eſt la même choſe que de les multiplier par o.

PROPOSITION V.

THEOREME.

La plus haute puiſſance qui ſatisfaſſe à la queſtion, eſt celle qui a l'expoſant p. *Chacune de celles dont les expoſans* q + r *ſont plus grands que* q *& moindres que* p, *fournit des termes tels que les demande la* Prop. II. *Ce ſont les* m + 1 *premiers à commencer par le* r - m + nt + 1 - - eme. *Et ſi après celui-ci il en reſtoit moins qu'il ne faut, on doit mettre autant de* o *après le dernier.*

DEMONSTRATION.

1°. Le dernier terme de Pq eſt xP, qui multiplié par ax°, donne le terme du produit qu'on demande. Tous les termes des puiſſances ſupérieures ont des expoſans plus grands. Donc ces puiſſances plus hautes ſont inutiles.

2°. Le plus haut terme ſatisfaiſant de $Pq + s$ ſoit le u---eme: ſon expoſant ſera $nq + nt - u + 1$; qui ne change point lorsqu'on multiplie le terme u---eme de $Pq + s$ par a premier terme de Q. Donc $nq + nt - u + 1 = p = nq - m + r$; & $u = r - m + nt + 1$.

3°. Si $Pq + s$ après le terme $r - m + nt + 1$---eme avoit moins que $m + 1$ termes, il eſt évident qu'il faut ajouter après le dernier terme autant de 0 qu'il eſt néceſſaire pour compléter le nombre $m + 1$; parce que dans ce cas il n'y auroit que quelques uns des premiers termes de Q employés dans la multiplication: le produit des derniers ſeroit nul; ou les derniers ſeroient multipliés par 0.

PROPOSITION VI.

THEOREME

La fraction $\frac{Ax^m}{A + Bx^n}$ *donne par la diviſion actuelle une ſérie recurrente géometrique.*

DEMONSTRATION.

Par la nature de la diviſion, les nouveaux termes du dividende ſe trouvent en multipliant les derniers termes du quotient par Bx^n; & les nouveaux termes du quotient en diviſant chacun des nouveaux termes du dividende par A. Le premier terme du quotient eſt $\frac{A \cdot^m}{A}$: donc

donc le nouveau dividende ſera $\frac{ABx^{m+n}}{A} = \frac{Ax^m}{A} \times Bx^n$; & le ſecond terme du quotient, en négligeant les ſignes, ſera $\frac{AB.x^{m+n}}{A^2}$. De même le troiſieme, quatrieme &c. termes du quotient ſeront $\frac{AB^2x^{m+2n}}{A^3}$; $\frac{AB^3x^{m+3n}}{A^4}$ &c.

COROLLAIRE I.

La raiſon de deux termes conſécutifs eſt celle de 1 à $\frac{Bx^n}{A}$.

COROLLAIRE II.

Les termes de cette ſérie dont la place eſt marquée par un nombre impair, tels que le 1^r; le 3e; le 5e; le 7e; &c. ſont poſitifs, & contiennent $\frac{Bx^n}{A}$ élevé à une puiſſance dont l'expoſant eſt pair, en mettant le o parmi les nombres pairs. Ou, ce qui revient au même, ſi le terme en le $2m+1$--eme de la ſuite, l'expoſant de $\frac{Bx^n}{A}$ ſera $2m$. Les termes dont la place eſt déterminée par un nombre pair, tel que le 2^d; le 4e; le 6; &c., ſont négatifs & contiennent $\frac{Bx^n}{A}$ élevé à une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre impair. Si donc le terme eſt le $2m$---eme, l'expoſant de $\frac{Bx^n}{A}$ ſera $2m-1$.

COROLLAIRE III.

Donc cette ſérie devient

$$\frac{Ax^m}{A} - \frac{ABx^{m+n}}{A^2} + \frac{AB^2x^{m+2n}}{A^3} - \frac{AB^3x^{m+3n}}{A^4} + \frac{AB^4x^{m+4n}}{A^5} \text{ &c.}$$

ou

ou bien

$$\frac{Aa^m}{A}\left(1 - \frac{Bx^n}{A} + \frac{B^2x^{2n}}{A^2} - \frac{B^3x^{3n}}{A^3} + \frac{B^4x^{4n}}{A^4} - \frac{B^5x^{5n}}{A^5} + \&c.\right)$$

COROLLAIRE IV.

Si $\frac{Bx^n}{A}$ étoit un polynome, comme

$$\frac{bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \ldots + \&x^n}{a}$$

alors $\frac{Ax^m}{a}$ ſeroit multiplicateur d'une ſérie compoſée de l'unité plus la premiere, plus la ſeconde, plus la troiſieme, plus la quatrieme &c. puiſſance de ce polynome pris négativement, puisque $(-\frac{Bx^n}{A})^{2m+1}$ eſt un terme négatif; & $(-\frac{Bx^n}{A})^{2m}$ eſt un terme poſitif.

COROLLAIRE V.

En donnant à m les valeurs 0; 1; 2; 3; 4; &c. ſucceſſivement, on aura la même ſérie géométrique

$$1 - Bx^n + B^2x^{2n} - B^3x^{3n} + B^4x^{4n} - B^5x^{5n} + \&c.$$

répétée pluſieurs fois, & multipliée ſucceſſivement par

$$A;\ Ax;\ Ax^2;\ Ax^3;\ Ax^4;\ \&c.$$

PROPOSITION VII.

THEOREME.

La ſérie qui reſulte de la diviſion d'un polynome par un autre, eſt la ſomme d'autant de ſéries géometriques, qu'il y a de termes dans le numérateur de la fraction propoſée, ou dans le polynome à diviſer.

DE-

DÉMONSTRATION.

Soit la fraction

$$\frac{a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 \ldots + {}^{*}x^m}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \ldots + {}^{:}x^n}$$

à reduire en ſérie; & que $A + Bx^n$ exprime le dénominateur. Cette fraction eſt égale à

$$\frac{a}{A + Bx^n} + \frac{\beta x}{A + Bx^n} + \frac{\gamma x^2}{A + Bx^n} + \frac{\delta x^3}{A + Bx^n} + \&c.$$

chacune de ces fractions donne une ſerie géometrique (*Cor. V. Prop. VI.*): donc toutes enſemble donnent autant de ſéries géometriques, qu'il y a de fractions partielles

$$\frac{a}{A + Bx^n}; \quad \frac{\beta x}{A + Bx^n}; \quad \frac{\gamma x^2}{A + Bx^n}; \quad \frac{\delta x^3}{A + Bx^n}; \quad \&c.$$

c'aſt à dire qu'il y a de termes dans le numérateur de la fraction propoſée.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

Trouver le terme général d'une ſérie recurrente ſans avoir recours aux facteurs du nominateur de la fraction d'où elle tire ſon origine.

SOLUTION.

Soit

$$\frac{a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 \ldots + {}^{*}x^m}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \ldots + {}^{:}x^n}$$

la fraction qui donne origine à la ſérie recurrente. Soit p l'expoſant que x doit avoir dans le terme qu'on cherche, & $m + 1$ le nombre des termes du numérateur.

Otez du dénominateur ſon terme conſtant a: renverſez le reſte: changez-en les ſignes: & diviſez-le par le terme conſtant retranché. Vous aurez

$$\frac{- \,\&c.\, x^n \ldots\ldots - gx^6 - fx^5 - ex^4 - dx^3 - cx^2 - bx}{a} = C.$$

Déterminez par les *Propp. II.* & *III.* l'expoſant q de la plus baſſe puiſſance de C, dont les termes multipliés par les termes du numérateur de la fraction propoſée, ayent l'expoſant p. Prenez-en les $m + 1$ premiers termes à commencer par le $r - m + 1$ - - eme; & multipliez-les chacun par ſon terme correſpondant du numérateur diviſé par n, & diſpoſé en ſorte que les expoſans de x aillent en croiſſant ſuivant les nombres naturels, en obſervant ce qui eſt preſcrit par la *Prop. IV.*

De C élevé ſucceſſivement aux puiſſances $q+1$; $q+2$; $q+3$; ····p, choiſiſſez les $m + 1$ premiers termes à commencer par le $r - m + n + 1$ - - - eme; par le $r - m + 2n + 1$ - - - eme; par le $r - m + 3n + 1$ - - - eme; &c. & multipliez-les chacun par le terme correſpondant du numérateur, comme ci-deſſus, en obſervant ce qui a été remarqué dans la *Prop. V.*

La ſomme de tous ces produits avec leurs coëfficients ſera le terme général demandé.

DEMONSTRATION.

La fraction propoſée donne par la *Prop. VII.*

$$\frac{\alpha}{a}(1 - C + C^2 - C^3 + C^4 - C^5 + C^6 - C^7 + \&c.)$$

$$+ \frac{\beta x}{a}(1 - C + C^2 - C^3 + C^4 - C^5 + C^6 - C^7 + \&c.)$$

$$+ \frac{\gamma x^2}{a}(1 - C + C^2 - C^3 + C^4 - C^5 + C^6 - C^7 + \&c.)$$

— &c. &c. jusques à

$$+ \frac{\lambda x^m}{a}(1 - C + C^2 - C^3 + C^4 - C^5 + C^6 - C^7 + \&c.)$$

On

On a choiſi de chacune de ces ſéries les termes, dont les expoſans avec l'expoſant de ſon multiplicateur $\frac{\alpha}{a}$; $\frac{\beta x}{a}$; $\frac{\gamma x^2}{a}$ &c., ſont l'expoſant donné p. Donc &c.

Remarques.

1°. La Propoſition premiere avec ſon corollaire ſe démontre de la même maniere lorsque la différence des expoſans n'eſt pas l'unité. Dans ce cas on peut, ou déterminer le nombre des termes de la *Prop. IV.*; ou ſuppléer les termes qui manquent en donnant le coëfficient o aux termes introduits.

2°. Les théoremes rapportés ci-deſſus ont lieu auſſi lorsque les expoſans ſont des nombres rompus. Mais cela n'arrive point dans les équations ordinaires. C'eſt pourquoi nous ne nous ſommes pas arrêtés à cette conſidération.

3°. Le terme général d'un polynome élevé a une puiſſance quelconque donne aiſément les termes dont on a beſoin dans notre cas. J'en ai donné la démonſtration dans mon Commentaire ſur *l'Arithmétique univerſelle de Newton.*

L'application de ma regle aux exemples particuliers, & à l'approximation des racines, avec quelques remarques ſur cette matiere, pourra faire le ſujet d'un autre Mémoire.

RECHERCHES
DES MOUVEMENS D'UN GLOBE
SUR
UN PLAN HORIZONTAL.

PAR M. J. ALBERT EULER.

Table VI. & VII.

Lorsqu'on veut chercher les loix du mouvement des corps, de quelque figure qu'ils ſoient, dérangé par le frottement, ayant ſurtout égard aux diverſes rotations dont ces corps ſont capables, on rencontre des difficultés inſurmontables & on n'en ſauroit tirer la moindre conſéquence qui puiſſe être accommodée aux expériences.

Si la recherche des mouvemens d'une Toupie, l'effort qu'elle fait pour s'ériger verticalement & la rapidité du mouvement qu'elle reçoit par le moindre attouchement, ſi cette recherche, dis-je, qui n'eſt pourtant que très particuliere, embarraſſe les Géometres à un tel point, qu'ils ſe voyent bientôt obligés de lâcher priſe, quel ſuccès pourroit-on ſe promettre d'une pourſuite à cet égard plus étendue?

Ce n'eſt qu'en commençant par la recherche des choſes les plus ſimples qu'on peut parvenir à la connoiſſance des choſes les plus difficiles: c'eſt ſouvent le plus ſûr moyen, & l'expérience nous le confirme. Combien de fois en effet, remontant ainſi de degré en degré, n'eſt-on pas parvenû à la ſolution des problèmes, qui autrement auroient été presque inſolubles?

Flatte

Flatté de cette eſpérance, j'ai entrepris les recherches préſentes; elles ſont très particulieres, il eſt vrai; mais étant nouvelles, elles pourront frayer une route à des recherches plus générales.

Je ne conſidere ici que des corps ſphériques, qui ont non ſeulement leur centre de gravité dans le centre de la figure, mais qui puiſſent encore ſe mouvoir librement autour de chaque diametre, de ſorte que les forces centrifuges ſe détruiſent mutuellement de toutes parts. Tels corps ſeront les globes compoſés de matiere homogene.

Je ſuppoſe encore que le mouvement ſe fait ſur un plan horizontal, de ſorte que la peſanteur du corps ne trouble pas ſon mouvement.

Mais, comme on n'a jusqu'ici traité cette matiere que dans l'hypothèſe d'un plan parfaitement poli, je tiendrai compte du frottement que le plan oppoſe au mouvement du corps.

Or ce ſera auſſi l'unique obſtacle auquel j'aurai ici égard, & je ferai abſtraction tant de la réſiſtance de l'air que de tous les autres obſtacles que le corps pourroit rencontrer dans ſon mouvement.

Nonobſtant ces reſtrictions, les recherches préſentes ne laiſſeront pas d'être aſſès univerſelles, & de renfermer une infinité de varietés qui dépendent du premier mouvement qu'on aura imprimé au globe. Mais, quelque compliqué que ſoit le mouvement du corps, on le peut toujours décompoſer en deux, l'un progreſſif ou celui du centre, & l'autre rotatoire, par lequel le globe tourne autour de quelque axe paſſant par ſon centre: car, quelque mouvement que le globe puiſſe avoir, on peut toujours conſidérer ſéparément l'un & l'autre; & partant en conſidérant le mouvement de rotation, on peut ſuppoſer le centre en repos; & alors il faut abſolument qu'il y ait toujours à chaque inſtant un diamètre en repos, qui par conſéquent pour cet inſtant ſera l'axe de rotation.

Un tel mouvement eſt donc ſuſceptible d'un double changement ; l'un par lequel l'axe de rotation change de ſituation, & l'autre par lequel la viteſſe de rotation augmente ou diminue. Donc, pour avoir une parfaite connoiſſance d'un tel mouvement, il faut qu'on puiſſe à chaque inſtant aſſigner, tant le diametre autour duquel le globe tourne, que la viteſſe de rotation. Toutes ces variations étant produites par le frottement, puisque la direction du frottement dépend de la poſition de l'axe de rotation comparée avec le mouvement progreſſif, on ne ſauroit déterminer les variations de l'un & de l'autre mouvement ſans avoir égard à tous les deux enſemble.

Pour mettre cette matiere dans tout ſon jour, il conviendra de conſidérer quelques cas particuliers & remarquables, avant que d'entreprendre la ſolution du probleme général ; ce ſera le plus ſûr moyen de nous éclaircir ſur cette matiere en montant par degrés à la ſolution générale, qui d'abord au commencement éblouïroit plutôt l'eſprit qu'elle ne l'éclaireroit.

Or d'abord je remarque, qu'il y a des cas où le frottement évanouït, ce qui arrive lorsque le point d'attouchement ne raſe point le plan. Le premier eſt lorsque l'axe de rotation eſt vertical & qu'il n' y a point de mouvement progreſſif ; car alors le point d'attouchement étant en repos, il eſt clair que le globe ne ſouffre aucun frottement.

Un autre cas où il n'y a point de frottement eſt, lorsque l'axe de rotation eſt horizontal & perpendiculaire à la direction du mouvement, & que la viteſſe rotatoire au point d'attouchement eſt préciſément égale & contraire à la viteſſe progreſſive. C'eſt le cas qui ſe rencontre le plus ſouvent, & qui porte le nom d'une rotation parfaite, à cauſe de ſa reſſemblance avec le mouvement d'une roue.

Il y a encore d'autres cas exemts de frottement, comme nous le verrons dans la ſuite : lorsque l'axe de rotation ſe trouve dans le plan perpendiculaire à la direction du mouvement progreſſif, & que la viteſſe de

de rotation au point d'attouchement eſt préciſément égale & contraire à la viteſſe progreſſive. Car, puisqu'il n'y a point de frottement dans ce cas, le mouvement reſtera toujours le même.

Dans tous ces cas donc, le mouvement du globe ſe conſervera inaltéré, de ſorte que tant le mouvement progreſſif que celui de rotation ne ſouffre aucun changement.

Ces cas ſont d'autant plus remarquables que, quelque irrégulier que ſoit le mouvement du globe, il s'y réduit enfin toujours en ſorte qu'après un certain tems déterminé, le globe acquiert un tel mouvement où le frottement n'a plus lieu.

C'eſt de plus ici qu'il faut reconnoitre un veritable ſaut; puisque le mouvement après avoir ſouffert des changemens continuels, commence ſubitement à ſe mouvoir uniformement: ce qui paroit être d'autant plus paradoxe que le calcul même ne renferme pas ce ſaut.

Cependant la raiſon en eſt très évidente ſi nous faiſons réflexion à la nature du frottement qui, à ce que les expériences nous font voir, conſerve toujours la même quantité, ſoit que le corps ſe meuve plus ou moins rapidement; & qui, dès que la viteſſe evanouït, ſe réduit ſubitement à rien. Or cette circonſtance ne pouvant pas être compriſe dans le calcul, il ne faut pas être ſurpris que le mouvement actuel ne réponde au calcul que jusqu'à un certain terme. Donc, quand j'aurai trouvé des formules analytiques pour déterminer le mouvement du globe troublé par le frottement, ces formules n'auront lieu que tant que le frottement dure; & auſſitôt que le frottement évanouït, il faut abandonner les formules trouvées, le mouvement devenant uniforme dès ce moment.

De là il eſt clair que tant s'en faut qu'on doive bannir tout ſaut de la Nature, que plutôt dans tous les mouvemens où le frottement a lieu, on eſt obligé d'admettre un ſaut réel; comme nous en ſerons convaincus bientôt par les recherches ſuivantes.

PRO-

PROBLEME I.

1. *Ayant imprimé au globe un mouvement tant progreſſif que rotatoire autour d'un axe horizontal & perpendiculaire à la direction du centre, déterminer la continuation du mouvement.*

SOLUTION.

Puisque la direction du frottement n'eſt pas différente de la direction du mouvement progreſſif, & qu'elle ſe trouve dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, ni celle-ci, ni la direction du mouvement progreſſif, n'en ſouffrira aucun changement: donc le centre du globe conſervera toujours ſon mouvement en ligne droite, & l'axe de rotation reſtera conſtamment horizontal & perpendiculaire à la direction du centre. Il ne reſte donc qu'à déterminer à chaque tems propoſé, tant le lieu du centre, qui ſera toujours dans la même ligne droite, que la viteſſe de rotation.

Fig. 1. Soit le rayon du globe OP $= a$, ſon poids $=$ M, & ſon moment d'inertie à l'égard d'un axe quelconque qui traverſe le centre $=$ Mkk, lequel, au cas que le globe ſoit compoſé de matière homogène, ſera $= \frac{2}{5}$ Maa.

Comme au commencement le globe eſt ſuppoſé toucher le plan au point A, ſoit ſa viteſſe imprimée au centre dans la direction AB $= V\!b$, & ſa viteſſe rotatoire dans le ſens LMPN, telle que la viteſſe de l'équateur autour du centre ſoit duë à la hauteur c, ou que cette viteſſe même ſoit $= V\!c$.

Maintenant ſi $V\!c$ étoit $= V\!b$, ce ſeroit le cas d'un roulement parfait, & le globe conſerveroit ſans ceſſe ſon premier mouvement. Ce cas étant clair de ſoi-même, nous aurons encore deux cas à examiner, l'un où $V\!c > V\!b$, & l'autre où $V\!c < V\!b$; auquel j'ajouterai le troiſième où la viteſſe de rotation $V\!c$ eſt négative; ou bien j'examinerai le cas où le globe tourne en arrière.

PRE-

PREMIER CAS

où $Vc > Vb$

2. Que le centre du globe ait parcouru pendant le tems t l'espace $AP = x$, & qu'il ait encore achevé autour de l'axe de rotation un angle φ, ou dans l'équateur un arc $a\varphi$; & on aura pour le lieu P la viteſſe du mouvement progreſſif $= \frac{dx}{dt}$ & celle de rotation dans l'équateur $= \frac{ad\varphi}{dt}$.

Soit encore $\frac{ad\varphi}{dt} > \frac{dx}{dt}$, & le point P raſera le plan horizontal dans la direction PA avec la viteſſe $\frac{ad\varphi - dx}{dt}$, & partant le frottement ſollicitera le globe dans la direction PB.

Comme le frottement tient toujours une raiſon conſtante à la preſſion, qui eſt ici la peſanteur du globe M, je le poſerai $= \lambda M$; & le mouvement progreſſif en ſera accéléré de même que ſi cette force λM étoit en effet appliquée au centre du globe.

Ces poſitions étant faites, le mouvement progreſſif du globe ſera renfermé dans l'équation ſuivante

$$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{\lambda M}{M} = \lambda$$

d'où l'on tire, à cauſe qu'au commencement où $t = o$ la viteſſe $\frac{dx}{dt}$ fut $= Vb$:

$$\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2}\lambda t + Vb$$

& comme en poſant $t = o$, x évanouït, en intégrant pour la ſeconde fois on aura

$$x = \tfrac{1}{4}\lambda tt + tVb$$

De là on voit d'abord, que la viteſſe progreſſive $\frac{dx}{dt}$ va en augmentant continuellement jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle de rotation dans l'équateur; puisque, dès que cela arrive, elle demeure conſtante: car alors, parce que le frottement vient de ceſſer ſubitement, il y aura un ſaut, & le globe continuera à rouler uniformement ſur le plan.

Maintenant, pour trouver le moment auquel ce changement ſoudain arrivera, cherchons le mouvement rotatoire du globe. Or le moment de frottement qui tend à ralentir le mouvement de rotation étant égal à $\lambda M a$, à cauſe du moment d'inertie $= Mkk$, on aura par les principes de Mécanique:

$$\frac{2\,dd\Phi}{dt^2} = \frac{-\lambda M a}{Mkk} = \frac{-\lambda a}{kk} \quad \text{de là}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-\lambda a t}{2kk} + \frac{Vc}{a}$$

parce qu'au commencement la viteſſe rotatoire a été poſée $= \frac{Vc}{a}$.

Enfin, en intégrant pour la ſeconde fois, on trouve l'angle $\Phi = \frac{-\lambda a t t}{4kk} + \frac{tVc}{a}$: & ce ſont les formules qui renferment le mouvement rotatoire du globe, mais qui, de même que celles trouvées ci-deſſus pour le mouvement progreſſif, ne vaudront plus longtems que jusqu'à que ce ſoit devenu $\frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{dx}{dt}$: après quoi le mouvement du globe ſera ſubitement changé dans un roulement parfait.

Or pour ce moment ſi remarquable nous aurons

$$-\frac{\lambda a^2 t}{2kk} + Vc = \tfrac{1}{2}\lambda t + Vb \quad \text{de là le tems}$$

$$t = \frac{2kk(Vc - Vb)}{\lambda(aa + kk)}.$$

Et

Et ſi nous ſubſtituons cette valeur pour t, nous aurons pour ce moment tant la viteſſe du mouvement progreſſif que celle de rotation dans l'équateur,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt} = \frac{aa\sqrt{b} + kk\sqrt{c}}{aa + kk}$$

Concluſion.

Les formules trouvées n'auront donc lieu que tant que le tems $t < \frac{2kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{\lambda(aa + kk)}$, & pendant cet intervalle nous aurons

la viteſſe progreſſive $\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} + \frac{1}{2}\lambda t$,

la viteſſe de rotation dans l'équateur $\frac{ad\Phi}{dt} = \sqrt{c} - \frac{\lambda aat}{2kk}$,

l'eſpace parcouru par le

mouvement progreſſif AP $= x = \frac{1}{4}\lambda tt + t\sqrt{b}$, &

l'angle achevé par le

mouvement rotatoire $\Phi = \frac{t\sqrt{c}}{a} - \frac{\lambda att}{4kk}$

Or, auſſi-tôt que le tems

$$t = \frac{2kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{\lambda(aa - kk)}$$

ſera écoulé, pendant lequel le globe aura parcouru par ſon mouvement progreſſif

l'eſpace AB $= \frac{kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})((2aa + kk)\sqrt{b} + kk\sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)^2}$

& par ſon mouvement rotatoire

$$\text{l'angle} = \frac{kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})\,(aa\sqrt{b} + (aa + 2kk)\sqrt{c})}{\lambda a\,(aa + kk)^2}$$

il conſervera l'un & l'autre mouvement, qu'il aura alors, inaltéré, & les formules trouvées ne ſeront plus applicables, l'une & l'autre viteſſe demeurant toujours

$$= \frac{aa\sqrt{b} + kk\sqrt{c}}{aa + kk}$$

COROLLAIRE I.

3. Lorsque le globe eſt compoſé de matiere homogene, ou lorsque $kk = \frac{2}{5}aa$, on aura pour un tems t quelconque, pourvu qu'il ſoit plus petit que $\frac{4(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{7\lambda}$, les déterminations ſuivantes.

la viteſſe du centre $= \sqrt{b} + \frac{1}{4}\lambda t$

la viteſſe dans l'équateur $= \sqrt{c} - \frac{5}{4}\lambda t$

l'eſpace parcouru par le centre $= t\sqrt{b} + \frac{1}{4}\lambda tt$

l'angle achevé autour du centre $= \frac{t\sqrt{c}}{a} - \frac{5}{8}\frac{\lambda tt}{a}$

Or, après un tems écoulé $t = \frac{4(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{7\lambda}$

pendant lequel le globe aura parcouru par ſon mouvement progreſſif l'eſpace

$$\frac{4(\sqrt{c} - \sqrt{b})\,(\sqrt{c} + 6\sqrt{b})}{49\lambda}$$

&

& par ſon mouvement de rotation l'angle

$$\frac{2(Vc - Vb)(9Vc - 5Vb)}{49\lambda a}$$

le globe roulera uniformement avec une viteſſe

$$= \frac{5Vb + 2Vc}{7}$$

COROLLAIRE II.

4. Soit pour le tems t la viteſſe du centre $= Vv$, & la viteſſe dans l'équateur $= Vu$; parce que nous avons trouvé $Vv = Vb + \frac{1}{2}\lambda t$ & $Vu = Vc - \frac{\lambda aat}{2kk}$, on aura $aaVv + kkVu = aaVb + kkVc$: & de là ce beau Théoreme:

Lorsqu'un globe ſe meut ſur un plan horizontal, & que l'axe de rotation eſt horizontal & perpendiculaire ſur la direction du centre, la quantité $aaVv + kkVu$, ou bien celle ci $MaaVv + MkkVu$, reſtera toujours la même, de quelque quantité que ſoit le frottement.

SECOND CAS.

où $Vc < Vb$.

5. Soit, après le tems t, l'eſpace parcouru par le globe $AP = x$; qu'il ait en même tems fait autour de l'axe de rotation un angle $= \Phi$, ou dans l'équateur un arc $= a\Phi$; & on aura la viteſſe progreſſive $= \frac{dx}{dt}$, & la viteſſe rotatoire dans l'équateur $= \frac{ad\Phi}{dt}$. Soit encore, comme au commencement, celle-ci plus petite que celle-là; ou ſoit $ad\Phi < dx$, & le point d'attouchement raſera le plan dans le

direction PB avec la viteſſe $= \frac{dx - ad\Phi}{dt}$, & partant le frottement agira ſelon la direction PA avec une force $= \lambda M$, par lequel le mouvement progreſſif ſera rallenti, & le mouvement de rotation accéléré. Les formules différentio-différentielles deviendront donc contraires aux précedentes, ſavoir

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\lambda \quad \& \quad \frac{2\,dd\Phi}{dt^2} = \frac{\lambda a}{kk}$$

dont les intégrales priſes duement ſeront

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\lambda t \quad \& \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{a} + \frac{\lambda at}{2kk}$$

& partant

$$x = t\sqrt{b} - \tfrac{1}{4}\lambda tt: \qquad \Phi = \frac{t\sqrt{c}}{a} + \frac{\lambda att}{4kk}.$$

Or le mouvement ſelon ces formules ne durera plus longtems que jusqu'au moment, auquel la viteſſe progreſſive $\frac{dx}{dt}$ ſera devenue égale à la viteſſe rotatoire dans l'équateur $\frac{ad\Phi}{dt}$; ce qui arrivera quand $\sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\lambda t = \sqrt{c} + \frac{\lambda aat}{2kk}$, & par conſéquent, après un tems écoulé

$$t = \frac{2kk\,(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{\lambda\,(aa + kk)}$$

pendant lequel le globe aura parcouru par ſon mouvement progreſſif un eſpace

$$\frac{kk\,(\sqrt{b} - \sqrt{c})\,((2aa + kk)\sqrt{b} + kk\sqrt{c})}{\lambda\,(aa + kk)^2}$$

&

& par ſon mouvement de rotation un angle

$$\frac{kk\,(Vb - Vc)\,(aa\,Vb + (aa + 2kk)\,Vc)}{\lambda a\,(aa + kk)^2};$$

après quoi tant la viteſſe progreſſive que celle de rotation dansl'équateur ſera $\frac{aa\,Vb + kk\,Vc}{aa + kk}$; & depuis l'une & l'autre ſe conſervera ſans aucune altération, quoique le calcul ne ſoit pas d'accord.

COROLLAIRE I.

6. Lorsque le globe eſt compoſé de matiere homogene, parce qu'alors kk eſt $= \frac{2}{5}\,aa$, le mouvement ſera renfermé dans les formules ſuivantes:

l'eſpace parcouru par le centre $= t\,Vb - \frac{1}{4}\lambda tt$,

l'angle décrit autour du centre $= \frac{t\,Vc}{a} + \frac{5\lambda tt}{8a}$,

la viteſſe progreſſive $= Vb - \frac{1}{2}\lambda t$, &

la viteſſe rotatoire dans l'équateur $= Vc + \frac{5}{4}\lambda t$

Or ces formules ne vaudront que pour un tems plus petit que

$$\frac{4\,(Vb - Vc)}{7\,\lambda}$$

& après un tems écoulé $= \frac{4\,(Vb - Vc)}{7\lambda}$, ou après que le globe aura achevé

par ſon mouvement progreſſif l'eſpace $= \frac{4(Vb-Vc)\,(6Vb+Vc)}{49\,\lambda}$ &

par ſon mouvement rotatoire l'angle $= \frac{2(Vb-Vc)\,(5Vb+9Vc)}{49\,\lambda a}$

le

le globe commencera à rouler uniformement avec une viteſſe conſtante & égale à $\frac{5\sqrt{b} + 2\sqrt{c}}{7}$.

COROLLAIRE II.

7. En poſant pour un tems indéterminé t la viteſſe progreſſive $= \sqrt{v}$, & celle de rotation dans l'équateur $= \sqrt{u}$, on obtiendra de même que ci-deſſus:

$$aa\sqrt{v} + kk\sqrt{u} = aa\sqrt{b} + kk\sqrt{c}$$

la quantité $Maa\sqrt{v} + Mkk\sqrt{u}$ reſtera donc toujours la même, & ne ſouffrira aucun changement par le frottement. Voila un principe de conſervation, qui mérite une attention toute particuliere.

TROISIEME CAS.

Où l'on ſuppoſe qu'on ait imprimé au globe un mouvement de rotation dans le ſens LNPM.

8. Ayant imprimé au globe une viteſſe progreſſive ſelon la direction $AB = \sqrt{b}$, qu'il ait en même tems reçu un mouvement de rotation dans le ſens LNPM, dont la viteſſe dans l'équateur ait été $= \sqrt{c}$. Or, après un tems t, poſons que le globe ait achevé par ſon mouvement progreſſif l'eſpace $AP = x$, & par ſon mouvement de rotation l'angle Φ, auquel répondra dans l'équateur un arc $= a\Phi$.

La viteſſe progreſſive ſera donc exprimée par $\frac{dx}{dt}$, & la viteſſe rotatoire dans l'équateur par $\frac{ad\Phi}{dt}$.

Dans ce cas il eſt clair que le point d'attouchement raſera le plan avec la ſomme des viteſſes ſelon la direction PB; & partant le frottement agira ſelon PA avec la force λM, par lequel tant le mouvement pro-

progreſſif que celui de rotation ſera rallenti, de ſorte qu'on aura les formules ſuivantes:

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\lambda \quad \& \quad \frac{2\,dd\Phi}{dt^2} = \frac{-\lambda a}{kk}$$

dont les intégrales, priſes comme il faut, donnent

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\lambda t; \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{a} - \frac{\lambda a t}{2kk}, \text{ \& partant}$$

$$x = t\sqrt{b} - \tfrac{1}{4}\lambda tt \;\&\; \Phi = \frac{t\sqrt{c}}{a} - \frac{\lambda a t t}{4kk}.$$

De là il eſt clair que l'une & l'autre viteſſe va en diminuant; & il ſera très important de voir laquelle évanouït la premiere? Or toutes les deux évanouïroient au même inſtant s'il étoit $\frac{kk\sqrt{c}}{aa} = \sqrt{b}$; donc, ſelon que $\frac{kk\sqrt{c}}{aa}$ eſt plus grand, ou égal, ou enfin plus petit que $\sqrt{b}$, nous aurons trois cas à examiner qui méneront à des concluſions tout-à-fait différentes.

I. Soit $kk\sqrt{c} = aa\sqrt{b}$, & les deux viteſſes évanouïront enſemble; & puisque leurs directions au point d'attouchement s'accordent, le cas du roulement parfait ne ſauroit arriver avant que les deux viteſſes évanouiſſent, & dans ce cas, le globe étant réduit à un repos parfait, il eſt naturel qu'il y demeure perpétuellement; ce qui arrivera après un tems $t = \frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$ ou après que le globe aura parcouru l'eſpace $= \frac{b}{\lambda}$.

II. Suppoſons maintenant $\sqrt{b} < \frac{kk}{aa}\sqrt{c}$, ou que le mouvement progreſſif s'éteigne le premier, ce qui arrivera après un tems écoulé

$t = \frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$, ou après que le globe aura parcouru l'eſpace $\frac{b}{\lambda}$. Mais, le globe ayant encore alors une viteſſe rotatoire dans le ſens LNPM, qui dans l'équateur eſt $= \frac{\sqrt{c}}{a} - \frac{a\sqrt{b}}{kk} = \frac{kk\sqrt{c} - aa\sqrt{b}}{akk}$, il en réſultera de nouveau un mouvement progreſſif ſelon la direction PA contraire à la premiere.

Auſſi les formules que nous venons de trouver, en y poſant $t > \frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$, le font appercevoir très clairement, en donnant une viteſſe négative pour le mouvement progreſſif, & à preſent ce mouvement ſuivra nos formules jusqu'à ce que cette viteſſe négative $\frac{1}{2}\lambda t - \sqrt{b}$ devienne égale à celle de rotation dans l'équateur qui eſt $= \sqrt{c} - \frac{\lambda aat}{2kk}$. Pour trouver ce moment, nous n'avons qu'à poſer $\frac{1}{2}\lambda t - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \frac{\lambda aat}{2kk}$, d'où l'on tire

$$t = \frac{2kk(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)}$$

après lequel tems le globe continuera à rouler uniformement en arrière avec une viteſſe $= \frac{kk\sqrt{c} - aa\sqrt{b}}{aa + kk}$: cette uniformité du mouvement commencera donc dans le point D, l'eſpace AD étant $= \frac{kk(\sqrt{b} + \sqrt{c})((2aa + kk)\sqrt{b} - kk\sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)^2}$; & alors, après cet eſpace parcouru, les formules trouvées perdent toute leur force.

III.

III. Soit enfin $\sqrt{c} < \frac{aa}{kk}\sqrt{b}$, & ce ſera le cas où le mouvement rotatoire évanouït avant le mouvement progreſſif; or, comme le premier arrive, après un tems $t = \frac{2kk\sqrt{c}}{\lambda aa}$, ou après un eſpace parcouru $x = \frac{kk\sqrt{c}\,(2aa\sqrt{b} - kk\sqrt{c})}{\lambda a^4}$, le globe ayant encore un mouvement progreſſif ſelon la direction PB, commencera de nouveau à ſe tourner dans le ſens contraire LMPN, dont la viteſſe croitra ſelon nos formules jusqu'à ce qu'elle égalera la progreſſive, ou jusqu'au tems écoulé

$$t = \frac{2kk\,(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{\lambda\,(aa + kk)}$$

après lequel le globe continuera à rouler uniformement avec une viteſſe $= \frac{aa\sqrt{b} - kk\sqrt{c}}{aa + kk}$. Cette uniformité du mouvement commencera donc au point B, de ſorte que ſoit

$$AB = \frac{kk(\sqrt{b} + \sqrt{c})\,((2aa + kk)\sqrt{b} - kk\sqrt{c})}{\lambda\,(aa + kk)^2}$$

& après que le globe aura atteint ce terme, les formules trouvées ci-deſſus ne ſerviront plus de rien.

Remarque.

9. J'aurois bien pu déduire le troiſieme cas du ſecond, en poſant la viteſſe de rotation $\sqrt{c}$ négative; mais il m'a paru que les variétés remarquables qui naiſſent du troiſieme cas méritoient une ſolution particuliere pour le pouvoir mieux developer. Au reſte, j'ai cru très convenable de commencer par le précédent probleme, à cauſe que

les ſuivans doivent être jugés d'autant plus difficiles, que l'axe de rotation y eſt ſans ceſſe aſſujetti à des variétés jusqu'à ce que le globe ſoit enfin parvenu à un état de permanence. Or le moyen d'introduire le plus commodément dans le calcul la variation de l'axe ſera expliqué dans la propoſition ſuivante, qui ſervira encore à frayer une route des plus aiſées pour réſoudre tous les problemes qu'on pourroit former ſur la matiere préſente.

PROBLEME II.

10. *Lorsque le globe, pendant qu'il tourne autour de l'axe* RS *avec une viteſſe donnée, eſt aſſujetti à une force qui lui imprimeroit un mouvement de rotation autour d'un autre axe* TV *s'il étoit en repos, déterminer l'effet que cette force produira à préſent.*

SOLUTION

Fig. 2.

Ayant poſé comme ci-deſſus la maſſe du globe $= M$, ſon moment d'inertie $= Mkk$, & ſon rayon $OR = a$, ſoit le mouvement de rotation tel que l'angle décrit autour de l'axe RS dans un tems infiniment petit dt, ſoit $d\varphi$, & que le point T en ſoit élevé ſelon la figure.

Soit maintenant λMa le moment des forces qui tendent à imprimer au globe un mouvement de rotation autour d'un autre axe TV, & que le point R en ſoit déprimé; donc, ſi le premier mouvement n'exiſtoit pas, le globe obtiendroit en effet un mouvement autour de l'axe TV tel que l'angle achevé dans le tems infiniment petit dt ſeroit $= \frac{\lambda Ma}{4Mkk}\,dt^2 = \frac{\lambda a\,dt^2}{4kk}$. Or, le globe ayant déja un mouvement de rotation déterminé, voyons quel effet naitra de la combinaiſon des deux mouvemens. Nommons l'angle $ROT = \zeta$, & cherchons d'abord dans l'arc RT le point r, qui par le premier mouvement ſera autant élevé quil eſt abaiſſé par le ſecond, & qui partant

tant demeurera en repos. Soit pour cet effet l'angle $ROr = d\omega$, de ſorte que ſoit $roT = \zeta - d\omega$; & comme la diſtance du point r à l'axe RS eſt $= a \sin d\omega = ad\omega$, & à l'axe TV eſt $= a \sin (\zeta - d\omega) = a \sin \zeta - ad\omega \cos \zeta$, ce point r ſera élevé moyennant le premier mouvement autour de l'axe RS dans un tems infiniment petit dt par l'eſpace $= ad\omega d\Phi$, & moyennant le ſecond mouvement autour de l'axe TV, il ſera abaiſſé par un eſpace $= (a \sin \zeta - ad\omega \cos \zeta) \frac{\lambda a dt^2}{4kk}$. De là on tire l'équation ſuivante:

$$4kkd\omega d\Phi = \lambda a dt^2 (\sin \zeta - d\omega \cos \zeta)$$

& partant l'angle $ROr = d\omega = \frac{\lambda a dt^2 \sin \zeta}{4kkd\Phi + \lambda a dt^2 \cos \zeta}$, ou parceque dt^2 évanouït à l'égard de $d\Phi$, on aura $d\omega = \frac{\lambda a dt^2 \sin \zeta}{4kkd\Phi}$: ce qui nous aſſigne le lieu du point r qui pendant le tems dt aura demeuré en repos.

Cherchons à préſent le changement qui ſera produit dans la viteſſe rotatoire, laquelle étant au commencement $= \frac{d\Phi}{dt}$ ſoit à préſent poſée $= \frac{d\Phi + d\psi}{dt}$, ou que ſon accroiſſement ſoit $= \frac{d\psi}{dt}$. Or le point R en ſera déprimé par un eſpace infiniment petit $= ad\omega (d\Phi + d\psi)$; & puiſque ce même point R par le premier mouvement demeure en repos, & par le ſecond eſt abaiſſé par l'eſpace infiniment petit $= \frac{\lambda a dt^2}{4kk} a \sin \zeta$, on aura l'équation ſuivante:

$$d\omega (d\Phi + d\psi) = \frac{\lambda a dt^2 \sin \zeta}{4kk}$$

de laquelle on trouvera la valeur de $d\psi$. Mais il faut remar-

quer qu'on doit ici, en ſubſtituant pour $d\omega$ ſa valeur, ſe ſervir de la premiere expreſſion où le terme qui renferme dt^2 n'a pas été négligé à l'égard de $4kkd\Phi$ puisque les différentiels du premier ordre ſe détruiſent: ainſi on aura

$$\frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta\,(d\Phi + d\psi)}{4kkd\Phi + \lambda a dt^2 \cos\zeta} = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{4kk} \quad \text{ou bien}$$

$4kk\,(d\Phi + d\psi) = 4kkd\Phi + \lambda a dt^2 \cos\zeta$, & enfin l'accroiſſement de la viteſſe de rotation

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\lambda a dt \cos\zeta}{4kk}$$

Mais ici nous avons ſuppoſé que la force ſollicitante eſt quaſi née ſubitement, & il eſt clair que, ſi la même force avoit déjà agi pendant l'élément du tems précédent dt, ces changemens trouvés demanderoient une correction.

Donc, puisque c'eſt le cas qui a lieu dans nos recherches, il faut, pour trouver cette correction, conſidérer que dans l'élément du tems précédent dt, l'angle parcouru auroit été $= d\Phi - \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{4kk}$ de ſorte que l'incrément de cet angle ſoit maintenant doublé, ſavoir $= \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{2kk}$, ce qui eſt la véritable valeur du différentio-différentiel $dd\Phi$, d'où nous tirons $dd\Phi = \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{2kk}$. Pour le changement de l'axe, il a beſoin d'une ſemblable correction par laquelle il doit être cenſé deux fois plus grand, de ſorte que l'angle

$$ROr' = 2ROr = d\omega = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{2kkd\Phi}.$$

Et

En effet, puisque le pole de rotation varie continuellement, le point r n'eſt pas le pole de rotation pour la fin du tems dt, mais tient plutôt un milieu entre le lieu du pole au commencement & la fin du tems dt, d'où l'on comprend que le véritable changement du pole $r'OR$ eſt le double de l'angle rOR.

COROLLAIRE I.

11. Le moment des forces λMa donc, qui tâche à imprimer au globe un mouvement de rotation autour de l'axe TV, approchera le précédent axe de rotation RS, autour duquel le globe ſe mouvoit avec une viteſſe angulaire $= \frac{d\Phi}{dt}$ plus vers TV, de maniere que le pole R fera autour du centre O dans un tems infiniment petit dt un angle $ROr' = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{2kk\,d\Phi}$ en nommant l'angle $ROT = \zeta$.

COROLLAIRE II.

12. Ce même moment des forces changera outre cela la viteſſe angulaire $\frac{d\Phi}{dt}$ en la faiſant croitre de la particule $\frac{dd\Phi}{dt} = \frac{\lambda a dt \cos\zeta}{2kk}$: & ſi ces forces venoient à ceſſer ſubitement après le tems dt, le globe continueroit à ſe mouvoir autour de l'axe $r's'$.

Remarque.

13. J'ai ſuppoſé dans la ſolution, que le mouvement de rotation produit par les nouvelles forces eſt contraire à celui que le globe avoit déjà autour de l'axe RS. Or, ſi le nouveau mouvement de rotation ſe faiſoit dans le même ſens que le premier, on n'aura qu'à enviſager le moment des forces λMa comme négatif; alors le nouvel axe $r's'$ s'éloigneroit de la ligne TV du même angle $\frac{\lambda a dt \sin\zeta}{2kk}$,

&

& la viteſſe de rotation décroitroit de la même quantité $\frac{\lambda a dt \cos\zeta}{2kk}$.

PROBLEME III.

14. *Ayant imprimé au globe un mouvement progreſſif ſelon la direction* AB, *& un mouvement rotatoire autour d'un axe horizontal* EF, *mais qui faſſe un angle oblique avec la direction* AB, *déterminer la continuation du mouvement.*

SOLUTION.

Fig. 3. Soit la viteſſe du centre ſelon AB $= V b$, l'angle BAF $= \alpha$, & ſuppoſons que le mouvement de rotation autour de cet axe EF ſoit dirigé en avant, dont la viteſſe dans l'équateur ſoit $= Vc$, le rayon du globe étant comme ci-deſſus $= a$, ſa maſſe $=$ M, & ſon moment d'inertie $=$ Mkk.

Maintenant, puiſque dès le commencement le frottement n'agit point ſelon la direction du mouvement progreſſif AB, le centre du globe ſe mouvra dans une ligne courbe qui ſoit repréſentée par AYZ.

Que le centre du globe ſoit parvenu après le tems t en Y, & après avoir tiré YX perpendiculaire à AB, ſoient les coordinées AX $= x$; XY $= y$.

Or il ſuit de ce que nous venons d'expliquer, & que nous expliquerons bientôt plus clairement; il en ſuit, dis-je, que l'axe de rotation ſera encore horizontal: qu'il ſoit donc repréſenté par la ligne MYN, & poſons ſon inclinaiſon à la droite AB, ou l'angle ANY $= \beta$.

De plus, le mouvement de rotation autour de MN, ſuppoſons que dans le tems dt, il décrive l'angle $= d\Phi$, & qu'il ſoit encore dirigé

rigé en avant, de ſorte que dans la ſection horizontale les points ſitués en arriere, comme Q & V, en ſoient élevés.

Qu'on ſe repréſente maintenant le point Y comme le point le plus bas du globe qui touche le plan horizontal, & ce point aura un double mouvement, l'un égal au mouvement progreſſif dont la viteſſe ſelon la tangente YT eſt $= \frac{V(dx^2 + dy^2)}{dt}$, & l'autre, qui réſulte du mouvement de rotation, le fera reculer ſelon la direction VQ perpendiculaire à MN avec une viteſſe $= \frac{a d\Phi}{dt}$: mais, à cauſe de l'angle $QYX = ANY = \theta$, on aura $QY = \frac{y}{\text{cof}\,\theta}$ & $QX = y \text{ tang}\,\theta$: qu'on prenne encore YT: $QY = \frac{V(dx^2 + dy^2)}{dt} : \frac{a d\Phi}{dt}$, ou bien $YT = \frac{yV(dx^2 + dy^2)}{a d\Phi \text{ cof}\,\theta}$.

& ayant achevé le parallélogramme QYTS, la diagonale YS repréſentera la vraye direction du mouvement du point Y, à laquelle eſt contraire la direction du frottement YV, qui conſtamment eſt $= \lambda M$.

Or, pour trouver cette direction, il faut remarquer que $\text{ſin}\,XYT = \frac{dx}{ds}$: $\text{cof}\,XYT = \frac{-dy}{ds}$: en poſant pour abréger $ds = V(dx^2 + dy^2)$.

De là, à cauſe de l'angle $QYX = \theta$, nous aurons

$$\text{ſin}\,QYT = \frac{dx \text{ cof}\,\theta - dy \text{ ſin}\,\theta}{ds} \quad \&$$

$$\text{cof}\,QYT = \frac{-dx \text{ ſin}\,\theta - dy \text{ cof}\,\theta}{ds}$$

Enſuite, à cauſe de $QY = \frac{y}{\cos\theta}$ & $YT = \frac{y\,ds}{ad\Phi\cos\theta}$, on trouvera

$$\sin QYS = \frac{dx\cos\theta - dy\sin\theta}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}},$$

$$\cos QYS = \frac{ad\Phi - dx\sin\theta - dy\cos\theta}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}},$$

& enfin:

$$\sin XYS = \frac{dx - ad\Phi\sin\theta}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}} = \cos XYK,$$

$$\cos XYS = \frac{ad\Phi\cos\theta - dy}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}} = -\sin XYK,$$

ayant tiré LK perpendiculaire à YS.

Or, YV repréſentant la direction du frottement, le globe en ſera incliné autour de l'axe LK par le moment $\lambda M a$, de maniere que les points du plan LSK en ſeront déprimés; ce qui fait juſtement le cas conſidéré au Probleme précedent.

Qu'on en faſſe donc l'application, & ce ſera ici l'angle KYN, que nous avons là appellé ζ; or, à cauſe que les angles KYS & QYN ſont droits, ζ ſera $= 180 - QYS$, & partant

$$\sin\zeta = \frac{dx\cos\theta - dy\sin\theta}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}},$$

$$\cos\zeta = \frac{dx\sin\theta + dy\cos\theta - ad\Phi}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}},$$

Donc, dans un tems infiniment petit dt, l'axe de rotation ſera transporté vers YK dans Yv, de ſorte que l'angle NYv

$NY\nu = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{2kkd\Phi}$, & comme l'angle qui fut par ci devant $ANY = \theta$, préſentement eſt $A\nu Y = \theta + d\theta$, on aura

$$d\theta = \frac{\lambda a dt^2 (dx\cos\theta - dy\sin\theta)}{2kkd\Phi\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}}.$$

Maintenant, puiſque la viteſſe de rotation a été $= \frac{d\Phi}{dt}$ elle aura, après le tems infiniment petit dt, pris un accroiſſement tel que ſera

$$dd\Phi = \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{2kk}, \text{ ou}$$

$$dd\Phi = \frac{\lambda a dt^2 (dx\sin\theta + dy\cos\theta - ad\Phi)}{2kk\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}}.$$

Et ainſi, tout ce qui appartient à la variation du mouvement rotatoire vient d'être ſuffiſamment déterminé. Paſſons donc à la recherche de la variation du mouvement progreſſif.

D'abord, la force du frottement $YV = \lambda M$ donne par la décompoſition

I. une force ſelon la direction $YX = \lambda M\cos VYX = -\lambda M\cos XYS$

qui ſera $= \frac{\lambda M(dy - ad\Phi\cos\theta)}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}} = -\frac{2Mddy}{dt^2}$,

II. une force ſelon la direction $XA = \lambda M\sin VYX = \lambda M\sin XYS$

qui donc ſera $= \frac{\lambda M(dx - ad\Phi\sin\theta)}{\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))}} = -\frac{2Mddx}{dt^2}$,

Poſons pour abréger $\sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx\sin\theta + dy\cos\theta))} = 2dt$, & nous aurons enfin pour la détérmination du mouvement du globe les quatre équations ſuivantes:

I. $\frac{2ddy}{dt^2} + \frac{\lambda(dy - ad\Phi\cos\theta)}{zdt} = 0$; ou $ddy = \frac{\lambda dt(ad\Phi\cos\theta - dy)}{2z}$,

II. $\frac{2ddx}{dt^2} + \frac{\lambda(dx - ad\Phi\sin\theta)}{zdt} = 0$: ou bien $ddx = \frac{\lambda dt(ad\Phi\sin\theta - dx)}{2z}$,

III. $d\theta = \frac{\lambda adt\,(dx\cos\theta - dy\sin\theta)}{2kkzd\Phi}$,

IV. $dd\Phi = \frac{\lambda adt\,(dx\sin\theta + dy\cos\theta - ad\Phi)}{2kkz}$.

d'où il nous faudra définir les quantités x, y θ & Φ par le tems t.

En introduiſant l'angle NYT, que l'axe MN fait avec la direction du mouvement YT, les quatre équations trouvées peuvent être rendues plus ſimples. Soit donc cet angle NYT $= \omega$ pour avoir $\sin\omega = \frac{dx\sin\theta + dy\cos\theta}{ds}$ & $\cos\omega = \frac{dx\cos\theta - dy\sin\theta}{ds}$, dont la différentiation donne

$$ddx\sin\theta + ddy\cos\theta + dsd\theta\cos\omega = dds\sin\omega + dsd\omega\cos\omega$$

$$ddx\cos\theta - ddy\sin\theta - dsd\theta\sin\omega = dds\cos\omega - dsd\omega\sin\omega$$

Mais on tire des deux premieres équations I. & II.

$$ddx\sin\theta + ddy\cos\theta = \frac{\lambda dt\,(ad\Phi - ds\sin\omega)}{2z},$$

$$ddx\cos\theta - ddy\sin\theta = \frac{-\lambda dtds\cos\omega}{2z}.$$

Donc, puisque $zdt = V(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ads\,d\Phi\sin\omega)$, nous pouvons entierement éliminer les coordinées x & y, de ſorte que nous ayons les quatre équations ſuivantes:

I.

I. $dds \sin\omega + ds(d\omega - d\theta)\cos\omega = \frac{\lambda dt(ad\Phi - ds\sin\omega)}{2z}$,

II. $dds\cos\omega - ds(d\omega - d\theta)\sin\omega = \frac{-\lambda dtds\cos\omega}{2z}$,

III. $d\theta = \frac{\lambda adtds\cos\omega}{2kkzd\Phi}$,

IV. $dd\Phi = \frac{\lambda adt(ds\sin\omega - ad\Phi)}{2kkz}$:

& maintenant les quatre inconnues ſont s, θ, Φ & ω, leſquelles étant déterminées, on aura

$dx = ds\cos(\omega - \theta)$ & $dy = ds\sin(\omega - \theta)$.

En combinant les deux premieres équations, elle ſeront tranſformées en celles-ci.

I. $dds = \frac{\lambda dt(ad\Phi\sin\omega - ds)}{2z}$,

II. $ds(d\omega - d\theta) = \frac{\lambda adtd\Phi\cos\omega}{2z}$,

Mais, ſi nous ſubſtituons ici au lieu de $d\theta$ ſa valeur de la troiſieme équation, la ſolution de notre probleme pourra être compriſe dans les trois équations ſuivantes.

I. $dds = \frac{\lambda dt(ad\Phi\sin\omega - ds)}{2z}$,

II. $dsd\omega = \frac{\lambda adtds^2\cos\omega}{2kkzd\Phi} + \frac{\lambda adtd\Phi\cos\omega}{2z}$,

III. $dd\Phi = \frac{\lambda adt(ds\sin\omega - ad\Phi)}{2kkz}$,

desquelles, quand nous en aurons trouvé les trois quantités s, Φ, & ω, nous aurons d'abord

$$d\theta = \frac{\lambda a\,dt\,ds\cos\omega}{2kkz\,d\Phi}, \text{ \& enſuite}$$

$$x = \int ds\cos(\omega - \theta), \quad y = \int ds\sin(\omega - \theta),$$

où il faut remarquer que l'élément dt eſt pris conſtant.

Voyons comment ces trois équations pourront être réſolues, ce qui ſe fera par les opérations ſuivantes.

I. Operation.

15. Délivrons d'abord nos équations des différentielles du ſecond ordre, en poſant $ds = pdt$ & $d\Phi = qdt$: d'où nous aurons $z = V(aaqq + pp - 2apq\sin\omega)$, & nos équations ſeront:

I. $$dp = \frac{\lambda dt\,(aq\sin\omega - p)}{2z}.$$

II. $$p\,d\omega = \frac{\lambda a dt\cos\omega\,(pp + kkqq)}{2kkqz},$$

III. $$dq = \frac{\lambda a dt\,(p\sin\omega - aq)}{2kkz}.$$

De là en éliminant dt, puisque par cette opération le nombre λ avec la quantité z s'en vont en même tems, nous aurons encore ces deux équations

$$\frac{dq}{dp} = \frac{a\,(p\sin\omega - aq)}{kk\,(aq\sin\omega - p)} \quad \& \quad dq = \frac{pq\,(p\sin\omega - aq)}{\cos\omega\,(pp + kkqq)}.$$

II. Operation.

16. Comme la premiere de ces deux équations donne

$$kk = \frac{a\,dp\,(p\sin\omega - aq)}{dq\,(aq\sin\omega - p)},$$

cette

cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde produira celle-ci:

$$ppdq\,(aq\sin\omega - p) + aqqdp\,(p\sin\omega - aq) = \frac{pqd\omega}{\cos\omega}(p\sin\omega - aq)(aq\sin\omega - p),$$

qui diviſée par $p^3 q^3 \cos\omega^2$ prendra la forme ſuivante

$$0 = \frac{qd\omega\sin\omega - dq\cos\omega}{q^3\cos\omega^3} + \frac{a(pdq + qdp)\sin\omega}{ppqq\cos\omega^2} - \frac{ad\omega(1 + \sin\omega^2)}{pq\cos\omega^3} + \frac{aa(pd\omega\sin\omega - dp\cos\omega)}{p^3\cos\omega^3},$$

laquelle étant évidemment intégrable donne

$$\tfrac{1}{2}CC = \frac{1}{2qq\cos\omega^2} - \frac{a\sin\omega}{pq\cos\omega^2} + \frac{aa}{2pp\cos\omega^2} \quad \text{ou}$$

$$CCppqq\cos\omega^2 = pp - 2apq\sin\omega + aaqq = zz$$

de ſorte que nous ayons déjà

$$z = Cpq\cos\omega.$$

III. Operation.

17. De cette équation, à cauſe de $\cos\omega^2 = 1 - \sin\omega^2$, on aura la valeur de

$$\sin\omega = \frac{a + V(1 - CCqq)(aa - CCpp)}{CCpq}.$$

Mais on tire de la premiere équation

$$\sin\omega = \frac{aaqdp - kkpdq}{a(pdp + kkqdq)},$$

& partant, ces deux valeurs étant égalées enſemble, nous obtiendrons une équation qui ne renferme que les deux variables p & q: ſavoir

$$0 = aapdp(1 - CCqq) - kkqdq(aa - CCpp) + a(pdp - kkqdq) + a(pdp - kkqdq)V(1 - CCqq)(aa - CCpp),$$

qui

qui étant diviſible par $V(aa - CCpp) + aV(1 - CCqq)$, menera à l'une ou l'autre de ces deux équations,

$$V(aa - CCpp) + aV(1 - CCqq) = 0,$$

$$apdpV(1 - CCqq) - kkqdqV(aa - CCpp) = 0,$$

qui nous fourniſſent les deux ſolutions ſuivantes.

I. SOLUTION.

18. En prenant $V(aa - CCpp) = -aV(1 - CCqq)$, on aura $pp = aaqq$ dela $p = \pm aq$, & partant $\sin\omega = \pm 1$; $\cos\omega = 0$, dont l'angle NYT étant trouvé droit, l'axe de rotation ſera normal à la direction du centre; ce qui étant arrivé une fois, le globe pourſuivra ſon mouvement toujours dans la même ligne droite. C'eſt le cas du probleme premier, & partant le préſent probleme exige l'autre ſolution.

II. SOLUTION.

19. Ayant donc cette équation à réſoudre:

$$\frac{apdp}{V(aa - CCpp)} = \frac{kkqdq}{V(1 - CCqq)},$$

dont l'intégrale fournit $aV(aa - CCpp) = Dkk + kkV(1 - CCqq)$; poſons l'une & l'autre partie $= ar$, de ſorte que nous obtenions $p = \frac{V(aa - rr)}{C}$: $q = \frac{V(k^4 - (ar - Dkk)^2)}{Ckk}$,

& de là $\sin\omega = \frac{kka + r(ar - Dkk)}{V(aa - rr)(k^4 - (ar - Dkk)^2)}$,

$$\cos\omega = \frac{(a(ar - Dkk) + kkr)V - 1}{V(aa - rr)(k^4 - (ar - Dkk)^2)}.$$

Donc

Donc, pour que cette expreſſion ne ſoit pas imaginaire, écrivons $rV - 1$ & $DV - 1$, au lieu de r & D, & nous aurons:

$$p = \frac{1}{2C} V(aa + rr) : q = \frac{1}{Ckk} V(k^4 + (ar - Dkk)^2),$$

$$\text{ſin } \omega = \frac{akk - r(ar - Dkk)}{V(aa + rr)(k^4 + (ar - Dkk)^2)},$$

$$\text{cof } \omega = \frac{a(ar - Dkk) + kkr}{V(aa + rr)(k^4 + (ar - Dkk)^2)},$$

d'où nous tirons

$$z = \frac{a(ar - Dkk) + kkr}{Ckk} = \frac{(aa + kk)r - aDkk}{Ckk}.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation

$$2z\,dp = \lambda\,dt\,(aq \text{ ſin } \omega - p),$$

on obtiendra

$$\frac{2r\,dr\,((aa + kk)r - aDkk)}{CCkkV(aa + rr)} = \frac{-\lambda r\,dt\,((aa + kk)r - aDkk)}{CkkV(aa + rr)},$$

qui ſe réduit à celle-ci

$$dr = -\lambda C\,dt \quad \text{dont l'intégrale eſt}$$

$$r = E - \tfrac{1}{2}\lambda Ct$$

de ſorte que nous ayons déjà déterminé, par le tems t, les quantités p, q & z, avec l'angle ω.

Continuation.

2o. Or ds étant $= p\,dt$ & $d\Phi = q\,dt$, puiſqu'en poſant $dt = \frac{-2\,dr}{\lambda C}$, on peut retenir dans le calcul la lettre r, au lieu de t nous pourrons pour un tems donné aſſigner premierement la

viteſſe progreſſive $\frac{ds}{dt} = p$, puis la ſituation de l'axe horizontal autour duquel le globe tourne, ſavoir l'angle $NYT = \omega$, & enfin la viteſſe de rotation $\frac{d\Phi}{dt} = q$. Il reſte donc encore à déterminer la ligne courbe décrite par le mouvement progreſſif du globe; & cela ſera d'autant plus néceſſaire que l'angle ω s'en rapporte.

Cherchons pour cet effet l'angle $ANY = \theta$, moyennant l'équation $d\theta = \frac{\lambda apdt \cos\omega}{kkq\alpha}$, qui ſe change par la ſubſtitution en

$$d\theta = \frac{-akkdr}{k^4 + (ar - Dkk)^2}$$, dont l'intégrale donne

$$\theta = \text{A. cot } \frac{ar - Dkk}{kk}$$, ou

$$\text{tang } \theta = \frac{kk}{ar - Dkk}$$, de ſorte que nous ayons

$$\sin\theta = \frac{kk}{\sqrt{(k^4 - (ar - Dkk)^2)}}$$, &

$$\cos\theta = \frac{ar - Dkk}{\sqrt{(k^4 - (ar - Dkk)^2)}}$$.

Or de là nous trouverons pour la différence des angles ω & θ ces ſimples formules

$$\cos(\omega - \theta) = \frac{a}{\sqrt{(aa + rr)}}; \sin(\omega - \theta) = \frac{-r}{\sqrt{(aa + rr)}}.$$

Main-

Maintenant, puisque $ds = \frac{-2dr\sqrt{(aa+rr)}}{\lambda CC}$, nous aurons enfin

$$dx = ds\cos(\omega-\theta) = \frac{-2adr}{\lambda CC}, \text{ \& } dy = ds\sin(\omega-\theta) = \frac{2rdr}{\lambda CC}$$

& par conſéquent:

$$x = E - \frac{2ar}{\lambda CC} \text{ \& } y = F + \frac{rr}{\lambda CC},$$

d'où il eſt d'abord clair que la courbe décrite eſt une parabole.

Mais ayant ici négligé d'introduire une conſtante dans l'intégration de l'angle θ, je ſupplérai à ce défaut.

Dévelopement ultérieur.

21. Conſidérons pour cet effet le commencement du mouvement, pour lequel je poſerai la viteſſe progreſſive ſelon $AB = \sqrt{b} = \mathfrak{C}$: l'angle FAB que l'axe de rotation fait avec la direction $AB = \alpha$, la viteſſe rotatoire dans l'équateur dirigée en avant $= \sqrt{c} = \gamma$: & déterminons par ces données les quantités conſtantes nées par l'intégration.

Qu'on faſſe au commencement $r = f$, de ſorte que nous ayons en général $t = \frac{2(f-r)}{\lambda C}$, ou $r = f - \frac{1}{2}\lambda Ct$. Ainſi, en poſant $r = f$, il faut que p devienne $= \mathfrak{C}$, $q = \frac{\gamma}{a}$, & $\omega = \alpha$, de là nous aurons

$$\mathfrak{C} = \frac{\sqrt{(aa+ff)}}{C} : \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{(k^4+(af-Dkk)^2)}}{Ckk}, \text{ \&}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{akk - f(af-Dkk)}{fkk + a(af-Dkk)}$$

d'où il faudra chercher les conſtantes f, C & D.

Or de la derniere nous tirons

$$af - Dkk = \frac{kk(a\cos\alpha - f\sin\alpha)}{a\sin\alpha + f\cos\alpha}, \text{ de là}$$

$$V(k^4 + (af - Dkk)^2) = \frac{kkV(aa + ff)}{a\sin\alpha + f\cos\alpha}, \text{ donc}$$

$$\frac{\gamma}{a\mathfrak{G}} = \frac{1}{a\sin\alpha + f\cos\alpha} \text{ ou } f = \frac{a(\mathfrak{G} - \gamma\sin\alpha)}{\gamma\cos\alpha},$$

par conſéquent $C = \frac{aV(\mathfrak{G}\mathfrak{G} + \gamma\gamma - 2\mathfrak{G}\gamma\sin\alpha)}{\mathfrak{G}\gamma\cos\alpha}$, &

$$af - Dkk = \frac{kk(\gamma - \mathfrak{G}\sin\alpha)}{\mathfrak{G}\cos\alpha}, \text{ \& enfin}$$

$$Dkk = \frac{aa(\mathfrak{G} - \gamma\cos\alpha)}{\gamma\cos\alpha} - \frac{kk(\gamma - \mathfrak{G}\sin\alpha)}{\mathfrak{G}\cos\alpha},$$

Intégration de l'angle θ.

22. Ayant donc déterminé ces quantités conſtantes, intégrons généralement, & nous aurons

$$\text{tang}(\theta + G) = \frac{kk}{ar - Dkk},$$

dont pour le commencement du mouvement où θ doit devenir $= \alpha$, on trouve $\text{tang}(\alpha + G) = \frac{kk}{af - Dkk} = \frac{\beta\cos\alpha}{\gamma - \beta\sin\alpha} = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,G}{1 - \text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,G}$ & de là $\text{tang}\,G = \frac{\beta - \gamma\sin\alpha}{\gamma\cos\alpha} = \frac{f}{a}$:

On aura donc pour un tems quelconque

$$\text{tang}\,\theta = \frac{akk + Dfkk - afr}{aar - aDkk + fkk} = \frac{akk - f(ar - Dkk)}{fkk + a(ar - Dkk)}.$$

Or

Or tang ω étant $= \frac{akk - r(ar - Dkk)}{kkr + a(ar - Dkk)}$ en dévelopant ces formules on aura

$$\theta = \text{A. tang } \frac{a}{f} - \text{A. tang } \frac{ar - Dkk}{kk}, \text{ \&}$$

$$\omega = \text{A. tang } \frac{a}{r} - \text{A. tang } \frac{ar - Dkk}{kk}, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\omega - \theta = \text{A. tang } \frac{a}{r} - \text{A. tang } \frac{a}{f} = \text{A. tang } \frac{a(f-r)}{aa+fr}, \text{ \& de là}$$

$$\text{fin } (\omega - \theta) = \frac{\frac{a(f-r)}{V(a^4 + aa(ff+rr) + ffrr)}}{} = \frac{a(f-r)}{V(aa+ff)(aa+rr)},$$

$$\text{cof } (\omega - \theta) = \frac{aa+fr}{V(aa+ff)(aa+rr)}.$$

Donc, à cauſe de $ds = \frac{-2dr\,V(aa+rr)}{\lambda CC}$,

dx ſera $= \frac{-2dr(aa+fr)}{\lambda CC\,V(aa+ff)}$, & $dy = \frac{-2adr(f-r)}{\lambda CC\,V(aa+ff)}$,

& comme x & y doivent évanouïr en poſant $r = f$, nous aurons par l'intégration

$$x = \frac{2aaf + f^3 - 2aar - frr}{\lambda CC\,V(aa+ff)}, \text{ \&}$$

$$y = \frac{aff - 2afr + arr}{\lambda CC\,V(aa+ff)},$$

d'où nous pourrons déterminer, & la ligne courbe décrite par le centre du globe, & ſon lieu pour un tems quelconque t écoulé depuis le commencement, en prenant

$$r = f - \tfrac{1}{2}\lambda Ct$$

f étant $= \frac{a(\beta - \gamma \sin \alpha)}{\gamma \cos \alpha}$, &

$$C = \frac{V(aa + ff)}{\beta} = \frac{a V(\beta\beta + \gamma\gamma - 2\beta\gamma \sin \alpha)}{\beta\gamma \cos \alpha}.$$

Conclusion.

23. Après avoir trouvé la ligne courbe décrite par le centre du globe qui est visiblement toujours une parabole, dans laquelle pour un tems quelconque le lieu du globe Y peut être assigné, on pourra à présent encore déterminer l'angle NYT, que l'axe de rotation MN, y fait avec la direction du mouvement; savoir NYT $= \omega$ sera $=$ A. tang $\frac{a}{r}$ — A. tang $\frac{ar - Dkk}{kk}$, ou bien on pourra déterminer l'angle ANY, que l'axe fait avec la premiere direction du mouvement, lequel sera ANY $= \theta =$ A. tang $\frac{a}{f}$ — A. tang $\frac{ar - Dkk}{kk}$,

$$Dkk \text{ étant} = af - \frac{kk(\gamma - \beta \sin \alpha)}{\beta \cos \alpha}.$$

Ou, puisqu'en gardant f; $\frac{\beta}{\gamma}$ est $= \frac{a \sin \alpha + f \cos \alpha}{a}$,

$$Dkk \text{ sera} = af - \frac{kk(a \cos \alpha - f \sin \alpha)}{a \sin \alpha + f \cos \alpha}.$$

Enfin la vitesse rotatoire autour de cet axe MN, dirigée en avant sera

$$\frac{d\Phi}{dt} = q = \frac{1}{Ckk} V(k^4 + (ar - Dkk)^2) \text{ \& la vitesse}$$

progressive $\frac{ds}{dt} = p = \frac{1}{C} V(aa + rr)$.

De

De la durée du mouvement en ligne courbe.

24. Le mouvement du globe ne demeurera conforme aux formules trouvées que tant qu'il y a du frottement. Or le frottement ne peut évanouïr à moins que ne devienne, & $\frac{ds}{dt} = \frac{a d\Phi}{dt}$, & $\omega = 90°$.

En poſant $\frac{ds}{dt} = \frac{a d\Phi}{dt}$, on trouve $r = \frac{a D kk}{aa \mp kk}$, & partant, à cauſe de $a(ar - Dkk) = \pm kkr$.

$\omega = A.\,tang\,\frac{a}{r} - A.\,tang\,(\pm\frac{r}{a})$, où le ſigne inférieur donne effectivement $\omega = A.\,tang\,\frac{a}{r} + A.\,tang\,\frac{r}{a} = 90°$. de ſorte qu'au tems où r devient $= \frac{a D kk}{aa + kk}$, le globe commencera à rouler uniformement, & conſervera depuis ce mouvement en ligne droite pour toujours. Or alors la viteſſe progreſſive ſera

$$= \frac{a}{C} \sqrt{(1 + \frac{D D k^4}{(aa + kk)^2})},$$

& ce mouvement uniforme commencera après un tems écoulé

$$t = \frac{2}{\lambda C}(f - \frac{a D kk}{aa + kk}) = \frac{2kk\,(aa + ff)\,\cos\alpha}{\lambda C\,(aa + kk)\,(a \sin\alpha + f\cos\alpha)},$$

ou $t = \frac{2kk\,(aa + ff)\,\gamma\,\cos\alpha}{\lambda C a\beta\,(aa + kk)}$.

Et alors l'axe de rotation fera avec la droite AB un angle $\theta = A\,tang\,\frac{a}{f} + A\,tang\,\frac{r}{a}$, r étant $= \frac{a D kk}{aa + kk}$.

Or

Or on pourra encore de là trouver les coordonnées pour le lieu où ce mouvent uniforme commencera car, $f - r$ étant $=$

$$\frac{kk\,(aa + ff)\,\cos\alpha}{(aa + kk)\,(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}.$$

$$2aa + ff + fr = \frac{2aa(aa+ff)}{aa+kk} + \frac{kk(aa+ff)(2a\sin\alpha + f\cos\alpha)}{(aa+kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}, \text{ ou}$$

$$2aa + ff + fr = 2(aa+ff) - \frac{fkk\,(aa+ff)\,\cos\alpha}{(aa+kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)},$$

on aura $x = \dfrac{(f-r)\,(2aa + ff + fr)}{\lambda\,(aa+ff)\,V(aa+ff)}.\,\beta\beta$

$$y = \frac{a\,(f-r)^2}{\lambda\,(aa+ff)\,V(aa+ff)}.\,\beta\beta$$

ou en ſubſtituant:

$$x = \frac{\beta\beta\,kk\cos\alpha \times V(aa+ff)}{\lambda\,(aa+kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}\left(2 - \frac{fkk\,\cos\alpha}{(aa+kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}\right),$$

$$y = \frac{\beta\beta\,ak^4\cos\alpha^2 \times V(aa+ff)}{\lambda\,(aa+kk)^2\,(a\sin\alpha + f\cos\alpha)^2},$$

Mais tout ceci mérite d'être encore plus ſoigneuſement dévelopé, ce que je ferai dans les articles ſuivans.

Du commencement du mouvement.

25. Le globe ayant reçu un mouvement progreſſif ſelon la direction AB, avec une viteſſe $= V\,b = \mathfrak{C}$, & en même tems un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal EF, qui faſſe avec AB, un angle BAF $= \alpha$, & dont la viteſſe dans l'équateur ſoit $= V\,c = \gamma$, de ſorte que la partie de devant EHF en eſt déprimée; Fig. 4.

mé; qu'on tire dans le plan horizontal AO, perpendiculaire à EF, & le point le plus bas du globe rasera le plan à cause du mouvement rotatoire selon la direction AC, avec une vitesse $= \gamma$; & à cause du mouvement progressif ce même point se mouvra selon AB, avec une vitesse $= \zeta$. Voyons maintenant suivant quelles loix le globe sollicité par ce double mouvement se mouvra.

Qu'on fasse $A\alpha : AC = \zeta : \gamma$ & à cause de $AC = a$, $A\alpha = \frac{a\zeta}{\gamma}$; qu'on tire encore CD parallele à AB, & après y avoir abaissé du point A une perpendiculaire AD, décomposons le mouvement AC selon les directions $A\alpha$ & AD. Mais, puisque $CAD = FAB = \alpha$, on aura $CD = a \sin \alpha$, & $AD = a \cos \alpha$. Retranchons de CD la ligne $CG = A\alpha = \frac{a\zeta}{\gamma}$, & nous aurons

$$DG = a \sin \alpha - \frac{a\zeta}{\gamma} = \frac{a(\gamma \sin \alpha - \zeta)}{\gamma}, \text{ \& partant}$$

$$AG = \frac{a}{\gamma} \sqrt{(\zeta\zeta - 2\zeta\gamma \sin \alpha + \gamma\gamma)}.$$

Or AG donnant la vraye direction du mouvement au point d'attouchement, la direction du frottement AH lui sera contraire, & l'angle HAB sera $=$ AGD. Donc, si l'angle BAH est posé $= \varepsilon$,

$$\sin \varepsilon \text{ sera} = \frac{\gamma \cos \alpha}{\sqrt{(\zeta\zeta - 2\zeta\gamma \sin \alpha + \gamma\gamma)}},$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\gamma \sin \alpha - \zeta}{\sqrt{(\zeta\zeta - 2\zeta\gamma \sin \alpha + \gamma\gamma)}}, \quad \&$$

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{\gamma \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha - \zeta}.$$

Le globe sera donc au premier instant sollicité selon la direction AH par une force $= \lambda M$; la lettre M représentant le poids du

globe, & λ la partie du poids à laquelle le frottement eſt égal, de ſorte que ſoit ſelon les experiences $\lambda = \frac{1}{3}$.

Mais, en introduiſant cet angle $BAH = \varepsilon$ dans le calcul, les quantités conſtantes de deſſus ſeront déterminées en ſorte que nous ayons :

$$f = \frac{-a\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon},\ C = \frac{a}{\mathfrak{G}\sin\varepsilon},\ \text{\& à cauſe de } \frac{\mathfrak{G}}{\gamma} = \frac{-\cos(\alpha+\varepsilon)}{\sin\varepsilon},$$

$$Dkk = \frac{-aa\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} + \frac{kk(\sin\varepsilon + \sin\alpha\cos(\alpha+\varepsilon))}{\cos\alpha.\cos(\alpha+\varepsilon)},\ \text{ou}$$

$$Dkk = -aa\cot\varepsilon + kk\,\mathrm{tang}(\alpha+\varepsilon),\ \&\ V(aa+ff) = \frac{a}{\sin\varepsilon},$$

où $\alpha + \varepsilon$ repréſente l'angle FAH.

Donc, puiſque le globe ſera au premier moment ſollicité ſelon la direction AH, il ſe détournera de la ligne AB, & ſe mouvra en ligne courbe AYZ, dont nous allons maintenant chercher la nature.

De la ligne courbe décrite par le centre du globe.

26. Soit après le tems t le centre du globe en Y, pour lequel point nous avons poſé ci-deſſus $AX = x$, & $XY = y$. Nous y avons encore introduit la variable r, de maniere que ſoit

$$t = \frac{2(f-r)}{\lambda C} = \frac{2\mathfrak{G}(f-r)\sin\varepsilon}{\lambda a},\ \text{\& de là nous avons enfin trouvé, à cauſe de } \mathfrak{G}\mathfrak{G} = b,$$

$$x = \frac{(f-r)(2aa+ff+fr)}{\lambda CCV(aa+ff)} = \frac{b(f-r)(2aa+ff+fr)\sin\varepsilon^3}{\lambda a^3},$$

$$y = \frac{a(f-r)^2}{\lambda CCV(aa+ff)} = \frac{b(f-r)^2\sin\varepsilon^3}{\lambda aa}.$$

Or

Or, en introduiſant au lieu de r une autre variable u, qui eſt proportionelle au tems, ces formules deviendront plus ſimples; ſoit donc $(f - r) \sin \varepsilon = u$, ou $r = f - \frac{u}{\sin \varepsilon}$, de ſorte que ſoit $t = \frac{2\beta u}{\lambda a}$, & on aura

$$x = \frac{bu\,(2(aa + ff)\sin \varepsilon - fu \sin \varepsilon)}{\lambda a^3}, \quad \&$$

$$y = \frac{buu \sin \varepsilon}{\lambda aa}, \quad \text{ou bien à cauſe de}$$

$$f \sin \varepsilon = -a \cos \varepsilon, \quad \& \ (aa + ff) \sin \varepsilon^2 = aa,$$

x ſera $= \frac{bu\,(2a + u \cos \varepsilon)}{\lambda aa}$, &

$$y = \frac{buu \sin \varepsilon}{\lambda aa}.$$

laquelle ligne courbe doit être continuée jusqu'à ce que r devienne $= \frac{a\,D\,kk}{aa + kk}$.

Or, r étant $= \frac{-a \cos \varepsilon - u}{\sin \varepsilon}$, lorsqu'on ſubſtitue pour Dkk ſa valeur, on obtiendra

$$\frac{-u}{\sin \varepsilon} = \frac{akk\,(\cos \varepsilon + \operatorname{tang}(\alpha + \varepsilon))}{aa + kk}, \quad \& \text{ de là}$$

$$u = \frac{-akk \cos \alpha}{(aa + kk)\cos(\alpha + \varepsilon)}$$

dont la valeur ſera toujours poſitive.

Car $\alpha + \varepsilon$ repréſentant l'angle FAH, dont le complément à deux droits eſt FAG, qui, puisque AG tombe dans l'angle CAB, s'étendant ſur l'un & l'autre côté de la ligne droite AF, ſera néceſſairement aigu, & partant ſon coſinus étant poſitif, celui de l'angle FAH, ſera négatif. En effet on trouve

$$\text{cof}\,(\alpha + \varepsilon) = \frac{-\beta\,\text{cof}\,\alpha}{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma\,\text{ſin}\,\alpha + \gamma\gamma)}}.$$

Par conſéquent, quelque mouvement qu'on ait imprimé au globe, il deviendra néceſſairement uniforme après un tems écoulé

$$t = \frac{2kk\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma\,\text{ſin}\,\alpha + \gamma\gamma)}}{\lambda(aa + kk)},$$

qui ſera toujours poſitif.

Or, pour un point quelconque Y de la ligne courbe, on trouvera le rayon de la courbure

$$= \frac{2b\,(aa + 2au\,\text{cof}\,\varepsilon + uu)^{\frac{3}{2}}}{\lambda a^3\,\text{ſin}\,\varepsilon},$$

qui donc au commencement en A ſera $= \frac{2b}{\lambda\,\text{ſin}\,\varepsilon}$.

Mais, pour entrevoir mieux la ſituation de cet arc parabolique, en éliminant u, nous trouvons

$$(x\,\text{ſin}\,\varepsilon - y\,\text{cof}\,\varepsilon)^2 = \frac{Aby\,\text{ſin}\,\varepsilon}{\lambda},$$

d'où nous apprenons que l'axe de la parabole eſt parallele à la ligne droite AH, que ſon paramètre eſt $= \frac{4b\,\text{ſin}\,\varepsilon}{\lambda}$, & que ſon ſommet ſera trouvé en poſant $u = -a\,\text{cof}\,\varepsilon$, de ſorte que nous ayons pour le ſommet

$x =$

$$x = \frac{-b \cos\varepsilon\,(2 - \cos\varepsilon^2)}{\lambda} = \frac{-b\cos\varepsilon(\cos\varepsilon^2 + 2\sin\varepsilon^2)}{\lambda}, \text{ \& }$$

$$y = \frac{b \sin\varepsilon \cos\varepsilon^2}{\lambda}.$$

Or l'axe de la parabole qui eſt parallele à AH, en eſt éloigné de la diſtance $\frac{2b \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{\lambda}$; cet axe traverſera donc la ligne droite AB, au point I, de ſorte que ſoit $AI = \frac{2b\cos\varepsilon}{\lambda}$, & l'éloignement du ſommet de la parabole au point I ſera $= \frac{b\cos\varepsilon^2}{\lambda}$. C'eſt pourquoi, tirant par le point I une ligne parallele à AH, & ſur celle-ci une perpendiculaire OV, qui doit être menée par le milieu O de l'intervalle AI, cette perpendiculaire aſſignera en V, le ſommet de la parabole dont le foyer ſera éloigné du point I de la diſtance $\frac{b}{\lambda}$, de ſorte qu'en faiſant tomber une perpendiculaire ſur la ligne AI, celle-ci en ſera coupée en deux parties égales; & par conſéquent la ligne droite qui joint le foyer de la parabole avec le point A, ſera avec AI un angle $= \varepsilon$, & partant ſa longueur ſera $= \frac{\beta}{\lambda}$.

Conſtruction de la Courbe.

27. La ſituation de la droite AH, la hauteur b due à la viteſſe du mouvement progreſſif du globe au point A, avec la fraction λ née par le frottement, étant connues, qu'on érige la ligne $AS = \frac{b}{\lambda}$, de ſorte qu'elle incline ſur AI autant que AH eſt incliné ſur AB. Enſuite, tirant du point S, SI parallele à AH, & SO perpendiculaire

ſur AI, qu'on faſſe tomber du point O ſur la ligne SI, la normale OV, alors V ſera le ſommet, & S le foyer de la parabole cherchée. Or il eſt clair que, ſi l'angle HAB étoit aigu, l'axe de la parabole VS tomberoit hors de la droite AB, & s'il étoit obtus, l'axe VS tomberoit entre la ligne AB; mais ſi l'angle BAH étoit droit, alors le point A lui-même ſeroit le ſommet de la parabole, & ſon axe inſiſteroit perpendiculairement ſur AB.

Du mouvement du globe.

28. Après un tems écoulé $t = \frac{2\beta u}{\lambda a}$, le globe étant parvenu en Y, la direction du mouvement progreſſif ſera inclinée à la droite AB, d'un angle dont la tangente eſt $\frac{dy}{dx} = \frac{u \sin \varepsilon}{a + u \cos \varepsilon}$, & la viteſſe progreſſive ſera $\frac{ds}{dt} = \frac{\beta}{a} V(aa + 2au \cos \varepsilon + uu)$.

Or, pour ce qui regarde le mouvement rotatoire, puiſque l'axe, autour duquel il ſe fait demeure toujours horizontal, qu'il ſoit repréſenté par la ligne MYN, qui prolongée rencontre la droite AB en R, & ARY ſera l'angle que nous avons appellé ci-deſſus θ, & que nous avons trouvé $=$ A. tang $\frac{a}{f}$ — A. tang $\frac{ar - Dkk}{kk}$.

Comme donc, en introduiſant l'angle HAB $= \varepsilon$,

f eſt $= \frac{-a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}$; A. tang $\frac{a}{f}$ ſera $= -\varepsilon$, & à cauſe de

$r = \frac{-a \cos \varepsilon - u}{\sin \varepsilon}$; $Dkk = -aa \cot \varepsilon + kk$ tang $(\alpha + \varepsilon)$,

$ar - Dkk$ ſera $= -kk$ tang $(\alpha + \varepsilon) - \frac{au}{\sin \varepsilon}$, d'où ſe fait

$\theta =$

$\theta = A \text{ tang } (\frac{au}{kk \sin \varepsilon} + \text{tang } (\alpha + \varepsilon)) - \varepsilon$, & partant

$\text{tang } (\theta + \varepsilon) = \text{tang } (\alpha + \varepsilon) + \frac{au}{kk \sin \varepsilon}$, ou

$$\text{tang}\,\theta = \left(\frac{au}{kk \sin \varepsilon} + \frac{\sin \alpha}{\cos \varepsilon . \cos(\alpha+\varepsilon)}\right) : \left(\frac{au}{kk \cos \varepsilon} + \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon . \cos(\alpha+\varepsilon)}\right)$$

ou bien $\text{tang } \theta = \frac{kk \sin \alpha \sin \varepsilon + au \cos \varepsilon \cos(\alpha + \varepsilon)}{kk \cos \alpha \sin \varepsilon + au \sin \varepsilon \cos(\alpha + \varepsilon)}$, d'où nous

tirons $\text{tang } (\theta - \alpha) = \frac{au \cos(\alpha + \varepsilon) . \cos(\alpha + \varepsilon)}{kk \sin \varepsilon + au \sin(\alpha + \varepsilon) . \cos(\alpha + \varepsilon)}$.

Mais, ſi nous cherchions l'angle R Y Z $= \omega$, puisque nous avons eu

$$\text{tang } \omega = \frac{akk - r(ar - Dkk)}{kkr + a(ar - Dkk)},$$

nous trouverions, en faiſant les ſubſtitutions de ci-deſſus:

$$\text{tang}\,\omega = \frac{akk \sin\alpha \sin\varepsilon + kku \sin\varepsilon \sin(\alpha+\varepsilon) + aau \cos\varepsilon \cos(\alpha+\varepsilon) + auu \cos(\alpha+\varepsilon)}{akk \cos\alpha \sin\varepsilon + (au + kk)\, u \sin\varepsilon \cos(\alpha + \varepsilon)},$$

ou bien

$$\text{tang}\,(\omega-\alpha) = \frac{kku \sin\varepsilon^2 + aau \cos(\alpha+\varepsilon)^2 + auu \cos\alpha \cos(\alpha+\varepsilon)}{akk \sin\varepsilon + kku \sin\varepsilon \cos\varepsilon + aau \sin(\alpha+\varepsilon)\cos(\alpha+\varepsilon) + auu \sin\alpha \cos(\alpha+\varepsilon)},$$

Enfin, la viteſſe angulaire autour de cet axe M N dirigée en avant, eſt trouvée

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\beta}{akk \cos(\alpha+\varepsilon)} \sqrt{(k^4 \sin\varepsilon^2 + 2akku \sin\varepsilon \sin(\alpha+\varepsilon)\cos(\alpha+\varepsilon) + a^2u^2 \cos(\alpha+\varepsilon)^2)}.$$

Or

Or en prenant $u = \frac{-akk \cos\alpha}{(aa+kk)\cos(\alpha+\varepsilon)}$, où le mouvement uniforme & rectiligne commence, la viteſſe du mouvement progreſſif ſera =

$$\frac{-\beta\sqrt{(a^4\cos(\alpha+\varepsilon)^2 - 2aakk\sin\alpha\sin\varepsilon\cos(\alpha+\varepsilon)+k^4\sin\varepsilon^2)}}{(aa+kk)\cos(\alpha+\varepsilon)},$$

à laquelle la viteſſe rotatoire dans dans l'équateur ſera égale.

Remarque.

29. Ce probleme qui n'étoit pas peu difficile étant expédié, la route pour réſoudre le probleme général, que je me ſuis propoſé de ſuivre ici, n'en eſt pas peu facilitée. Mais alors, l'axe de rotation n'étant plus horizontal, mais incliné à l'horizon, l'inclinaiſon en pourra continuellement varier; & la plus grande difficulté conſiſtera en la maniere la plus propre de faire entrer au calcul tant la poſition de l'axe que ſa continuelle variation, où il paroit encore que tout dépendra d'une préſentation convenable de la figure. Enſuite, nous venons d'apprendre par le développement du probleme précédent, que les difficultés du calcul, ſurtout à l'égard des quantités conſtantes nées par l'intégration, deviennent beaucoup plus aiſées à ſurmonter, lorsqu'on recherche premierement la variation momentanée que le mouvement du globe éprouve au premier inſtant, entant que cette détermination peut enſuite aiſément être appliquée aux élémens des tems quelconques. C'eſt par cette raiſon que j'ai choiſi la même route pour réſoudre le probleme général, en le ſoudiviſant dans les problemes ſuivans.

PROBLEME IV.

Fig. 5. 30. *Ayant imprimé au globe tant un mouvement progreſſif qu'un rotatoire autour d'un axe quelconque qui paſſe par ſon centre, déterminer la variation que le mouvement ſouffre au premier inſtant.*

SOLUTION.

Que la Table des figures repréſente le plan horizontal ſur lequel le mouvement ſe fait; que A ſoit le point auquel le globe touche le plan avant de commencer à ſe mouvoir, & qu'on lui imprime maintenant un mouvement progreſſif ſelon la direction AB, & avec une viteſſe $= V b = \mathfrak{C}$.

Or, pour concevoir mieux le mouvement de rotation, qu'on s'imagine que le globe $A b \alpha \mathfrak{C}$ ſoit conſtitué ſur le plan horizontal de la maniere uſitée dans la Trigonométrie ſphérique. Soit le centre du globe en O, ſon rayon $= a$, & $\mathfrak{C} O b$ le diametre horizontal & parallele à la droite AB, auquel réponde le grand cercle horizontal $b f \mathfrak{C}$. Enſuite, ſoit p un des poles autour duquel la rotation ſe fait au premier moment, de ſorte que Op ſoit l'axe de rotation que je poſe incliné à l'horizon ſous l'angle δ, & dont la projection ſur le plan horizontal ſoit la ligne droite AF, faiſant avec AB un angle $BAF = \alpha$, de maniere que l'axe de rotation rencontre enfin la droite AF.

Pour réduire tout ceci à la ſphere, je tire par p le cercle vertical Apf, & l'angle bAf ſera $= BAF = \alpha$: de là l'arc $bf = a\alpha$, & $fp = a\delta$, de ſorte que ſoit $Ap = a\,(90° - \delta)$. Qu'on imprime maintenant au globe un mouvement de rotation autour de cet axe Op, dont la viteſſe dans l'équateur ſoit $= Vc = \gamma$, de ſorte que le point π en ſoit élevé, & la viteſſe rotatoire du point A ſera $= \gamma \sin (90° - \delta) = \gamma \cos \delta$, dont la direction ſera AC normale à AF.

Qu'on faſſe $A\alpha = \mathfrak{C}$, $AC = \gamma \cos \delta$; & après avoir tiré CF parallele à AB, qu'on y faſſe tomber du point A la perpendiculaire AD. Maintenant, à cauſe de $CAD = \alpha$, AD ſera $= \gamma \cos \alpha \cos \delta$ & $CD = \gamma \sin \alpha \cos \delta$: donc, après avoir retranché de CF la ligne $CG = A\alpha = \mathfrak{C}$, on aura pour la décompoſition du mouvement ſelon les directions AD & DC: $DG = \mathfrak{C} - \gamma \sin \alpha \cos \delta$, & la

droite AG repréſentera la vraye direction du mouvement du point A, qui donc prolongée de l'autre côté aſſignera la direction du frottement, qui toujours eſt $=\lambda M$.

Poſons, pour abréger le calcul, l'angle $BAG = \zeta$, de ſorte que ζ ſoit ici ce que nous avons indiqué ci-deſſus par $180° - \epsilon$, & nous aurons $\operatorname{tang}\zeta = \frac{\gamma \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\delta}{\mathfrak{C} - \gamma \operatorname{ſin}\alpha \operatorname{cof}\delta}$. Donc, pour le mouvement progreſſif, il naitra une force contraire au mouvement $= \lambda M \operatorname{cof}\zeta$, & une autre normale à la précédente qui tâchera de détourner le globe de la direction $AB = \lambda M \operatorname{ſin}\zeta$, par laquelle donc le chemin du globe ſera courbé. Or, en tirant AI, perpendiculaire à AG, & du point O la ligne Oi parallele à AI, de ſorte que ſoit l'arc $bi = BAI = 90° + \zeta$, cette droite Oi ſera l'axe horizontal autour duquel la force du frottement tâche de tourner le globe, de maniere que le point π en ſoit déprimé. Comme donc ce mouvement eſt contraire à celui autour de Op, en décrivant l'arc d'un grand cercle ip, après un tems infiniment petit dt, la rotation ſe fera autour d'un autre axe $O\pi$. Or, pour en déterminer la ſituation par le probleme ſecond, il faut commencer par la recherche de l'arc ip, ce qui ſe fera par la réſolution du triangle ſphérique iAp, dans lequel eſt $Ap = a(90° - \delta)$: $Ai = a.\ 90°$, & $pAi = 90° + \zeta - \alpha$, & dont on trouve $\operatorname{cof}\frac{ip}{a} = -\operatorname{cof}\delta \operatorname{ſin}(\zeta - \alpha) = \operatorname{cof} iOp$. J'appellerai en attendant cet angle $iOp = \Sigma$ qui, dans le probleme ſecond a été poſé $= \zeta$; & comme la viteſſe rotatoire qui là étoit $= \frac{d\Phi}{dt}$, ici eſt $= \frac{\gamma}{a}$, en poſant le moment d'inertie du globe $= Mkk$, l'angle $pO\pi$ ſera $= \frac{\lambda a a dt}{2\gamma kk} \operatorname{ſin}\Sigma$, & la viteſſe de rotation $\frac{\gamma}{a}$ aura pris, dans le tems infiniment petit dt, un accroiſſement

ment $= \frac{\lambda a dt \cos \Sigma}{2kk} = \frac{-\lambda a dt \cos \delta \sin (\zeta - \alpha)}{2kk}$. Donc, puisque l'axe de rotation s'eſt cependant mis de la ſituation Op en $O\pi$, ni ſon inclinaiſon à l'horizon $\zeta\pi$, ni celle de la projection $A\Phi$ à AB, ne ſeront changées. Or ip étant $= a\Sigma$, ſin ipA ſera $= \frac{\cos(\zeta - \alpha)}{\sin \Sigma}$: c'eſt pourquoi, tirant le petit arc πq perpendiculaire à Af, à cauſe de $p\pi = \frac{\lambda a^3 dt}{2\gamma kk} \sin \Sigma$ πq ſera $= \frac{\lambda a^3 dt \cos(\zeta - \alpha)}{2\gamma kk} = \pi A q$ ſin $Ap = FA\Phi . a \cos \delta$, & partant la variation faite dans l'angle $BAF = \alpha$, ou ſon accroiſſement ſera $FA\Phi = \frac{\lambda a a dt \cos(\zeta - \alpha)}{2\gamma kk \cos \delta}$.

Enſuite $\cos ipA$ eſt $= \frac{\sin \delta \sin (\zeta - \alpha)}{\sin \Sigma}$, & enfin

$$pq = \frac{\lambda a^3 dt \sin \delta \sin (\zeta - \alpha)}{2\gamma kk},$$

& par conſéquent, comme l'axe de rotation a été incliné à l'horizon de l'angle δ, à préſent après le tems dt cette inclination ſera augmentée de l'angle $\frac{\lambda a a dt \sin \delta \sin (\zeta - \alpha)}{2\gamma kk}$.

PROBLEME V.

31. *Ayant imprimé au globe tant un mouvement progreſſif qu'un rotatoire autour d'un diametre quelconque, aſſigner pour tout tems & ſon lieu & ſon mouvement.*

SOLUTION.

Le rayon du globe étant $= a$, ſon poids $= M$, & ſon moment d'inertie autour d'un diamétre quelconque $= Mkk$; qu'on lui Fig. 6.

ait imprimé au commencement un mouvement progreſſif ſelon la direction AB, & avec une viteſſe $= V b = \mathfrak{C}$; & comme au commencement le globe eſt ſuppoſé toucher le plan au point A, qu'on lui ait encore imprimé un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque, qui prolongé rencontre le plan horizontal en F, de manière qu'en tirant AF l'angle BAF ſoit $= \alpha$, & l'inclinaiſon de l'axe à la droite AF $= \delta$, de ſorte que ſoit $\text{tang}\, \delta = \frac{a}{AF}$.

Que le globe ſe meuve donc autour de cet axe en avant avec une viteſſe qui dans l'équateur ſoit $= V c = \gamma$, & qu'on détermine de ces données l'angle ζ, de ſorte que ſoit

$$\text{tang}\, \zeta = \frac{\gamma \cos \alpha \cos \delta}{\mathfrak{C} - \gamma \sin \alpha \cos \delta}, \quad \text{& partant}$$

$$\text{tang}\, (\zeta - \alpha) = \frac{\gamma \cos \delta - \mathfrak{C} \sin \alpha}{\mathfrak{C} \cos \alpha}.$$

Maintenant, aprés un tems écoulé t, que le globe touche le plan au point Y, & ſoit AY $= s$ la ligne courbe décrite par le globe, dans laquelle il parcourre dans l'élément du tems dt, l'eſpace infiniment petit $Yy = ds$.

Soit YR $= r$, le rayon de la courbure au point Y: que la viteſſe progreſſive y ſoit $= p$, de ſorte que nous ayons $ds = p\,dt$, & que le globe ſe tourne encore en avant autour d'un axe qui prolongé rencontre le plan horizontal en N, & ayant tiré la droite YN, nommons l'angle NYZ $= \omega$, & l'inclinaiſon de l'axe à l'horizon $= \theta$, de maniere que ſoit $\text{tang}\, \theta = \frac{a}{YN}$. Enſuite, la viteſſe rotatoire même autour de cet axe étant poſe dans l'équateur $= q$, formons pareillement un angle φ, de maniere que ſoit

tang

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{q \cos\omega \cos\vartheta}{r - q \sin\omega \cos\vartheta}, \text{ ou}$$

$$\text{tang}\,(\Phi - \omega) = \frac{q \cos\vartheta - p \sin\omega}{p \cos\omega}.$$

A' préſent, comme par le probleme précédent la force retardante eſt $= \lambda M \cos\Phi$, on aura $2\,dp = \lambda\,dt \cos\Phi$, & à cauſe de la force détournante $\frac{2pp}{r}$ ſera $= \lambda \sin\Phi$: enſuite, on aura pour le mouvement de rotation dont la viteſſe eſt q, ſon accroiſſement $dq = \frac{-\lambda a a dt \cos\vartheta \sin(\Phi - \omega)}{2kk}$, & l'inclinaiſon de l'axe à l'horizon, qui dans ce moment eſt poſée $= \vartheta$, aura pris un accroiſſement dans le tems infiniment petit dt, de ſorte que ſoit

$$d\vartheta = + \frac{\lambda a a dt \sin\vartheta \sin(\Phi - \omega)}{2kkq}.$$

Enfin tirant Yn, on obtiendra $NYn = \frac{\lambda a a dt \cos(\Phi - \omega)}{2kkq \cos\vartheta}$. Mais cette quantité n'étant point le différentiel de l'angle $ZYN = \omega$, puis qu'en y la direction de la ligne courbe prend un accroiſſement $YRy = \frac{ds}{r}$, en ajoutant cette particule à la premiere NYn, le vrai différentiel de ω ſera

$$d\omega = \frac{ds}{r} + \frac{\lambda a a dt \cos(\Phi - \omega)}{2kkq \cos\vartheta}.$$

Or, à cauſe de $ds = p\,dt$ & $r = \frac{2pp}{\lambda \sin\Phi}$, on aura

$$\frac{ds}{r} = \frac{\lambda\,dt \sin\Phi}{2p}.$$

Voici donc les équations qui renferment la ſolution de notre probleme

I. $2dp = -\lambda dt \cos\Phi$.

II. $\frac{ds}{r} = \frac{\lambda dt \sin\Phi}{2p}$.

III. $dq = \frac{-\lambda aadt \cos\theta \sin(\Phi - \omega)}{2kk}$.

IV. $d\theta = \frac{+\lambda aadt \sin\theta \sin(\Phi - \omega)}{2kkq}$.

V. $d\omega = \frac{\lambda dt \sin\Phi}{2p} + \frac{\lambda aadt \cos(\Phi - \omega)}{2kkq\cos\theta}$.

ds étant $= pdt$ & $\text{tang}\,\Phi = \frac{q\cos\omega\cos\theta}{p - q\sin\omega\cos\theta}$, ou bien

$$\text{tang}\,(\Phi - \omega) = \frac{q\cos\theta - p\sin\omega}{p\cos\omega}.$$

Et si l'on prend l'intégrale de cette équation $\frac{ds}{r} = \frac{\lambda dt \sin\Phi}{2p}$, de maniere qu'elle évanouïsse en posant $t = o$, la valeur de $\int \frac{ds}{r}$, donnera l'amplitude de la courbe AY, laquelle étant nommée ψ, & ayant fait tomber de Y sur AB, la perpendiculaire YX, en posant les coordonnées $AX = x$ & $XY = y$, on aura

$$dx = pdt\cos\psi \quad \& \quad dy = pdt\sin\psi$$

I Opération.

32. Commençons par les équations III. & IV. dont celle-là divisée par celle-ci donne:

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{-q\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{dq}{q} = \frac{-d\theta\cos\theta}{\sin\theta}.$$

dont

dont l'intégrale eſt $q = \frac{C}{\sin\theta}$. Or, puisqu'en poſant $t = o$, q devient $= \gamma$ & $\theta = \delta$, la conſtante C étant juſtement déterminée, il ſera $q = \frac{\gamma \sin\delta}{\sin\theta}$: laquelle valeur étant ſubſtituée dans la quatrieme donne

$$d\theta = \frac{+\lambda aadt \sin\theta^2 \sin(\Phi - \omega)}{2kk\gamma \sin\delta}.$$

Enſuite, par la même ſubſtitution

$$\text{tang}\,\Phi \text{ ſera} = \frac{\gamma \cos\omega \sin\delta \cos\theta}{p\sin\theta - \gamma \sin\omega \sin\delta \cos\theta};$$

$$\text{tang}\,(\Phi - \omega) = \frac{\gamma \sin\delta \cos\theta - p\sin\theta \sin\omega}{p\sin\theta \cos\omega}; \quad \&$$

$$d\omega = \frac{\lambda dt \sin\Phi}{2p} + \frac{\lambda aadt \sin\theta \cos(\Phi - \omega)}{2kk\gamma \sin\delta \cos\theta}.$$

Subſtituons y encore pour λdt, ſa valeur $-\frac{2dp}{\cos\Phi}$, afin que dt en ſoit éliminé, & nous aurons

$$d\theta = \frac{-aadp \sin\theta^2 \sin(\Phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \cos\Phi};$$

$$d\omega = -\frac{dp \sin\Phi}{p\cos\Phi} - \frac{aadp \sin\theta \cos(\Phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \cos\theta \cos\Phi},$$

d'où, en chaſſant kk, on obtient

$$d\omega + \frac{dp}{p}\,\text{tang}\,\Phi - \frac{d\theta \cot(\Phi - \omega)}{\sin\theta \cos\theta} = o:$$

& enfin, en ſubſtituant pour tang Φ ſa valeur, à cauſe de

cos

$\cot(\Phi - \omega) = \frac{p \sin\theta \cos\omega}{\gamma \sin\delta \cos\theta - p \sin\theta \sin\omega}$, il ſera

$$d\omega + \frac{\gamma\, dp \sin\delta \cos\omega \cos\theta}{p(\gamma \sin\theta - \gamma \sin\delta \sin\omega \cos\theta)} - \frac{p\, d\theta \cos\omega}{\cos\theta(\gamma \sin\delta \cos\theta - p \sin\omega \sin\theta)} = 0,$$

Or nous éviterons ces détours en retenant l'angle Φ au calcul; car

$$\text{tang}\,\Phi \text{ étant} = \frac{\gamma \sin\delta \cos\omega}{p \,\text{tang}\,\theta - \gamma \sin\delta \sin\omega},$$

$p \,\text{tang}\,\theta \,\text{tang}\,\Phi$ ſera $= \gamma \sin\delta(\sin\omega \,\text{tang}\,\Phi + \cos\omega) = \frac{\gamma \sin\delta \cos(\Phi - \omega)}{\cos\Phi}$,

& délà $\frac{p \,\text{tang}\,\theta \sin\Phi}{\cos(\Phi - \omega)} = \gamma \sin\delta$, ou $p = \frac{\gamma \sin\delta \cos(\Phi - \omega)}{\text{tang}\,\theta \sin\Phi}$,

dont le différentiel logarithmique donne

$$\frac{dp}{p} = -(d\Phi - d\omega)\,\text{tang}(\Phi - \omega) - \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} - d\Phi \cot\Phi,$$

laquelle valeur étant ſubſtituée dans l'équation

$d\omega + \frac{dp}{p}\,\text{tang}\,\Phi - \frac{d\theta \cot(\Phi - \omega)}{\sin\theta\cos\theta} = 0$, on obtiendra

$$d\omega - d\Phi - \frac{d\theta \,\text{tang}\,\Phi}{\sin\theta\cos\theta} - (d\Phi - d\omega)\,\text{tang}\,\Phi.\,\text{tang}(\Phi - \omega) - \frac{d\theta \cot(\Phi - \omega)}{\sin\theta\cos\theta} = 0,$$

ou

$$(d\Phi - d\omega)(1 + \text{tang}\,\Phi\,\text{tang}(\Phi - \omega)) + \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta}(\text{tang}\,\Phi + \frac{1}{\text{tang}(\Phi - \omega)}) = 0,$$

qui diviſée par $1 + \text{tang}\,\Phi\,\text{tang}(\Phi - \omega)$ donne

$$(d\Phi - d\omega)\,\text{tang}(\Phi - \omega) + \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 0,$$

dont l'intégrale eſt $-l\cos(\Phi - \omega) + l\,\text{tang}\,\theta = C$, ou bien

bien, puisqu'en posant $t = 0$, θ devient $= \delta$, & $\Phi - \omega = \zeta - \alpha$, nous obtiendrons

$$\frac{\text{tang}\,\theta}{\text{cos}\,(\Phi - \omega)} = \frac{\text{tang}\,\delta}{\text{cos}\,(\zeta - \alpha)},$$

Or le diviseur $1 + \text{tang}\,\Phi\,\text{tang}\,(\Phi - \omega) = \frac{\text{cos}\,\omega}{\text{cos}\,\Phi\,\text{cos}\,(\Phi - \omega)}$, contient une solution particuliere qui donne $\text{cos}\,\omega = 0$, & partant $\omega = 90°$, d'où résulte $p = \frac{\gamma\,\text{sin}\,\delta}{\text{tang}\,\theta}$, & $dp = \frac{-\gamma\,d\theta\,\text{sin}\,\delta}{\text{sin}\,\theta^2}$, laquelle valeur étant donc substituée dans l'équation

$$d\theta = \frac{-aadp\,\text{sin}\,\theta^2\,\text{sin}\,(\Phi - \omega)}{kk\gamma\,\text{sin}\,\delta\,\text{cos}\,\Phi} = \frac{aadp\,\text{sin}\,\theta^2}{kk\gamma\,\text{sin}\,\delta},$$

elle se changera en celle-ci

$$d\theta = \frac{-aad\theta}{kk}, \quad \text{ou } d\theta = 0,$$

Dans ce cas donc le mouvement devient uniforme.

II Opération.

33. Nous avons déjà fait deux intégrations dont l'une donne $q = \frac{\gamma\,\text{sin}\,\delta}{\text{sin}\,\theta}$, & l'autre $\text{tang}\,\theta = \frac{\text{tang}\,\delta\,\text{cos}\,(\Phi - \omega)}{\text{cos}\,(\zeta - \alpha)}$. Nous en avons ensuite tiré la valeur de $p = \frac{\gamma\,\text{cos}\,\delta\,\text{cos}\,(\zeta - \alpha)}{\text{sin}\,\Phi}$, qui, à cause de $\text{cos}\,(\zeta - \alpha) = \frac{\mathfrak{C}\,\text{sin}\,\zeta}{\gamma\,\text{cos}\,\delta}$, se change en celle-ci $p = \frac{\mathfrak{C}\,\text{sin}\,\zeta}{\text{sin}\,\Phi}$.

Conſidérons maintenant cette équation différentielle

$$d\theta = \frac{-aa\,dp \sin\theta^2 \sin(\Phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \cos\Phi},$$

elle ſe changera, à cauſe de $dp = \frac{-\mathfrak{G}\,d\Phi \sin\zeta \cos\Phi}{\sin\Phi^2}$, dans la ſuivante

$$\frac{d\theta}{\sin\theta^2} = \frac{aa\mathfrak{G}\,d\Phi \sin\zeta \sin(\Phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \sin\Phi^2} = -d.\cot\theta.$$

Or $\cot\theta$ étant $= \frac{\cos(\zeta - \alpha)}{\tang\delta \cos(\Phi - \omega)}$:

$$d.\cot\theta \text{ ſera} = \frac{(d\Phi - d\omega)\cos(\zeta - \alpha)\sin(\Phi - \omega)}{\tang\delta \cos(\Phi - \omega)^2},$$

& partant, en diviſant par $\sin(\Phi - \omega)$, on obtiendra

$$\frac{aa\mathfrak{G}\,d\Phi \sin\zeta}{kk\gamma \sin\delta \sin\Phi^2} + \frac{(d\Phi - d\omega)\cos(\zeta - \alpha)}{\tang\delta \cos(\Phi - \omega)^2} = 0,$$

ou bien à cauſe de $\frac{\cos(\zeta - \alpha)}{\tang\delta} = \frac{\mathfrak{G}\sin\zeta}{\gamma \sin\delta}$, il ſera

$$\frac{aa\,d\Phi}{kk \sin\Phi^2} + \frac{d\Phi - d\omega}{\cos(\Phi - \omega)^2} = 0,$$

laquelle équation étant intégrée comme il faut, on obtiendra

$$-\frac{aa}{kk}\cot\Phi + \tang(\Phi - \omega) = -\frac{aa}{kk}\cot\zeta + \tang(\zeta - \alpha),$$

de ſorte qu'on ait

$$\tang(\Phi - \omega) = \tang(\zeta - \alpha) + \frac{aa}{kk}(\cot\Phi - \cot\zeta).$$

Nous

Nous venons donc de déterminer tout par la ſeule variable Φ Or celle-ci dépendra encore du tems t, de maniere que ſoit

$$2\,dp = \frac{-2\mathfrak{G}\,d\Phi \sin\zeta \cos\Phi}{\sin\Phi^2} = -\lambda\,dt\cos\Phi,$$

ce qui donne $\lambda\,dt = \frac{2\mathfrak{G}\,d\Phi\sin\zeta}{\sin\Phi^2}$, dont l'intégrale eſt

$$\lambda t = 2\mathfrak{G}\sin\zeta\,(\cot\zeta - \cot\Phi).$$

Nous aurons donc $\cot\Phi = \cot\zeta - \frac{\lambda t}{2\mathfrak{G}\sin\zeta}$, & partant

$$\tang(\Phi - \omega) = \tang(\zeta - \alpha) - \frac{\alpha\alpha}{kk}\cdot\frac{\lambda t}{2\mathfrak{G}\sin\zeta};$$

Or nous avons déjà trouvé

$$\tang\theta = \frac{\tang\delta\cos(\Phi-\omega)}{\cos(\zeta-\alpha)};\ p = \frac{\mathfrak{G}\sin\zeta}{\sin\Phi},\ \&\ q = \frac{\gamma\sin\delta}{\sin\theta}.$$

III Opération.

34. Puisque nous venons de déterminer les quantités $p, q, \theta, \&\ \omega$, pour un tems donné t, il ne nous reſte qu'à ſonder la nature de la ligne courbe même décrite par le globe. Cherchons pour cet effet l'angle ψ. Or

$d\psi$ étant $= \frac{\lambda\,dt\sin\Phi}{2p} = \frac{2\mathfrak{G}\,d\Phi\sin\zeta}{2p\sin\Phi}$, à cauſe de

$p = \frac{\mathfrak{G}\sin\zeta}{\sin\Phi}$, nous aurons d'abord $d\psi = d\Phi$, & partant

$$\psi = \Phi - \zeta.$$

Donc $p\,dt$ étant $= \frac{2\mathfrak{G}\mathfrak{G}\,d\Phi\sin\zeta^2}{\lambda\sin\Phi^3}$, il ſera

$$dx = \frac{2\mathfrak{G}\mathfrak{G}\sin\zeta^2}{\lambda\sin\Phi^3}\,d\Phi(\cos\zeta\cos\Phi + \sin\zeta\sin\Phi),\quad \&$$

$$dy = \frac{2\mathfrak{G}\mathfrak{G}\sin\zeta^2}{\lambda\sin\Phi^3}\,d\Phi(\cos\zeta\sin\Phi - \sin\zeta\cos\Phi),$$

lequelles formules étant intégrées donneront les valeurs ſuivantes

$$x = \frac{b\sin\zeta^2}{\lambda}\left(2\cos\zeta + \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta^2} - \frac{2\sin\zeta\cos\Phi}{\sin\Phi} - \frac{\cos\zeta}{\sin\Phi^2}\right),$$

$$y = \frac{b\sin\zeta^2}{\lambda}\left(\frac{2\cos\zeta^2}{\sin\zeta} - \frac{1}{\sin\zeta} - \frac{2\cos\zeta\cos\Phi}{\sin\Phi} + \frac{\sin\zeta}{\sin\Phi^2}\right),$$

d'où l'on tirera pour trouver une équation entre x & y,

$$x\sin\zeta + y\cos\zeta = \frac{b\sin\zeta^2}{\lambda}\left(\frac{2\cos\zeta}{\sin\zeta} - \frac{2\cos\Phi}{\sin\Phi}\right),$$

$$y\sin\zeta - x\cos\zeta = \frac{b\sin\zeta^2}{\lambda}\left(\frac{1}{\sin\Phi^2} - \frac{1}{\sin\zeta^2}\right),\ \&\text{ de là}$$

$$\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi} = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta} - \frac{\lambda(x\sin\zeta + y\cos\zeta)}{2b\sin\zeta^2},$$

$$\frac{1}{\sin\Phi^2} = \frac{1}{\sin\zeta^2} + \frac{\lambda(y\sin\zeta - x\cos\zeta)}{b\sin\zeta^2},$$

Or le quarré de la premiere donnant

$$\frac{\cos\Phi^2}{\sin\Phi^2} = \frac{\cos\zeta^2}{\sin\zeta^2} - \frac{\lambda\cos\zeta(x\sin\zeta + y\cos\zeta)}{b\sin\zeta^3} + \frac{\lambda\lambda(x\sin\zeta + y\cos\zeta)^2}{4bb\sin\zeta^4},$$

en ôtant donc celle-ci de la ſeconde, il reſtera

$$\frac{\lambda y}{b\sin\zeta^3} = \frac{\lambda\lambda(x\sin\zeta + y\cos\zeta)^2}{4bb\sin\zeta^4},\quad \text{ou}$$

$$(x\sin\zeta + y\cos\zeta)^2 = \frac{4by\sin\zeta}{\lambda},$$

d'où il eſt clair que la ligne courbe cherchée eſt une parabole.

Recher-

De la durée de ce mouvement en ligne courbe.

35. Ayant donc trouvé la ſolution du Probleme propoſé, qui mérite d'autant plus une attention particuliere, qu'elle vient de réuſſir heureuſement après tant d'intégrations compliquées, il nous faut encore examiner jusqu'à quand le mouvement du globe ſera conforme aux formules trouvées. Mais, puisqu'il ne ſauroit arriver ici qu'au même inſtant p devienne $= q$, $\omega = 90°$, & $\theta = 0$, il eſt clair qu'un mouvement uniforme, tel que nous l'avons eu dans le probleme précédent, ne ſauroit avoir lieu lorsque l'axe de rotation n'eſt pas horizontal. Or j'ai déjà remarqué au commencement de cette Diſſertation, qu'il y a encore d'autres états de permanence, excepté celui que j'ai conſideré jusqu'ici, & que le globe peut ſe mouvoir uniformément, quand même l'axe de rotation fait un angle avec l'horizon: ce qui arrivera effectivement lorsque l'angle ω devient droit, & qu'en même tems p ſoit $= q \cos\theta$; car, puisqu'alors au point le plus bas du globe il n'y a point de mouvement, manque de frottement, la cauſe d'une variation ultérieure en ſera détruite. Nos formules demeureront donc conformes au mouvement du globe jusqu'à ce qu'il devienne, & $\omega = 90°$, & $p = q \cos\theta$: leſquelles conditions ſe trouvent auſſi remplies à la fois, car, en poſant $\omega = 90°$, on a

$$-\cot\Phi = \operatorname{tang}(\zeta - \alpha) + \frac{aa}{kk}(\cot\Phi - \cot\zeta),$$

$$\text{& de là } \cot\Phi = \frac{aa\cot\zeta - kk\operatorname{tang}(\zeta-\alpha)}{aa + kk},$$

Or la condition $p = q\cos\theta$, donne l'équation

$$\frac{\mathfrak{G}\sin\zeta}{\sin\Phi} = \frac{\gamma\sin\delta}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{\gamma\cos\delta\cos(\zeta-\alpha)}{\sin\Phi}, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\delta\sin\Phi}{\cos(\zeta-\alpha)},$$

Mais, à cauſe de $\omega = 90°$, tang ϑ ſera trouvé de même $= \frac{\text{tang } \delta \text{ ſin } \vartheta}{\text{cof}(\zeta - \alpha)}$, & partant il eſt évident que cette condition $p = q \text{ cof } \theta$, renferme déjà en ſoi celle-ci $\omega = 90°$.

Le mouvement uniforme commencera donc effectivement dès que cot Φ ſera devenu $= \frac{aa \text{ cot } \zeta - kk \text{ tang } (\zeta - \alpha)}{aa + kk}$.

Or, à cauſe de $\frac{\lambda t}{2 \mathfrak{G} \text{ ſin } \zeta} = \text{cot } \zeta - \text{cot } \Phi$,

$\frac{\lambda t}{2 \mathfrak{G} \text{ ſin } \zeta}$ ſera alors $= \frac{kk \ (\text{cot } \zeta + \text{tang } (\zeta - \alpha))}{aa + kk}$, ou bien

$\frac{\lambda t}{2 \mathfrak{G} \text{ ſin } \zeta} = \frac{kk \text{ cof } \alpha}{(aa + kk) \text{ ſin } \zeta \text{ cof}(\zeta - \alpha)}$, & partant

$$t = \frac{2 kk \gamma \text{ cof } \alpha \text{ cof } \delta}{\lambda (aa + kk) \text{ ſin } \zeta},$$

Or, afin que cette formule trouvée pour le moment dans lequel le mouvement uniforme commence, ne paroiſſe pas évanouir par la poſition de $\alpha = 90°$, ou de $\delta = 90°$, ou bien qu'elle ne paroiſſe pas encore croître jusqu'à l'infini en poſant $\zeta = 0$, ſubſtituons-y pour ζ ſa valeur, & ce tems t écoulé depuis le commencement jusqu'à l'uniformité du mouvement ſera

$$= \frac{2 kk}{\lambda (aa + kk)} \sqrt{(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - 2 \mathfrak{G} \gamma \text{ ſin } \alpha \text{ cof } \delta + \gamma\gamma \text{ cof } \delta^2)}.$$

Donc, afin que le mouvement devienne uniforme dès le commencement, il faudra que ſoit & $\alpha = 90°$, & $\mathfrak{G} = \gamma \text{ cof } \delta$.

Evo-

Evolution ultérieure des formules trouvées.

36. Puisque nous avons ici réduit tout à l'angle Φ, dont la raiſon au tems t eſt déterminée, nous pourrons de même que ci-deſſus introduire au lieu du tems t une certaine ligne u qui lui eſt proportionelle. Qu'on poſe donc $u = \frac{\lambda a t}{2\mathfrak{C}}$, de ſorte que ſoit $t = \frac{2\mathfrak{C}u}{\lambda a}$; & qu'on ſe ſerve encore, lorsque les circonſtances le feront juger à propos, de cette rélation

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{\gamma \cos\alpha \cos\delta}{\beta - \gamma \sin\alpha \cos\delta}, \quad \text{ou bien de celle-ci}$$

$$\cos(\zeta - \alpha) = \frac{\beta \sin\zeta}{\gamma \cos\delta}: \quad \text{\& les formules trouvées}$$

pour le mouvement du corps, avant qu'il ſoit devenu uniforme, ſeront les ſuivantes

$$\cot\Phi = \cot\zeta - \frac{u}{a \sin\zeta}, \quad \text{ou tang}\,\Phi = \frac{a \sin\zeta}{a\cos\zeta - u}. \quad \text{D'où s'enſuit}$$

$$\sin\Phi = \frac{a \sin\zeta}{\sqrt{(aa - 2au\cos\zeta + uu)}}.$$

Enſuite, on aura $\text{tang}\,(\Phi - \omega) = \text{tang}\,(\zeta - \alpha) - \frac{au}{kk \sin\zeta}$.

De là on tire:

$$\text{tang}\,\omega = \frac{kk\gamma\cos\delta\,(a\sin\alpha + u\sin(\zeta-\alpha)) + \beta au\,(a\cos\zeta - u)}{kk\gamma\cos\delta\,(a\cos\alpha - u\cos(\zeta-\alpha)) - \beta aau\sin\zeta}.$$

De plus, l'inclinaiſon de l'axe de rotation θ ſera déterminée de maniere que ſoit

$$\text{tang}\,\theta = \frac{kk\gamma\sin\delta}{\sqrt{(k^4\gamma\gamma\cos\delta^2 - 2\beta akk\gamma u\cos\delta\sin(\zeta-\alpha) + \beta\beta aauu)}},$$

ou

ou $\sin\theta = \frac{kk\gamma \sin\delta}{\sqrt{(k^4\gamma\gamma - 2\beta akk\gamma u \cos\delta \sin(\zeta - \alpha) + \beta\beta aauu)}}$.

De là ſe fera $p = \beta\sqrt{(1 - \frac{2u}{a}\cos\zeta + \frac{uu}{aa})}$,

& $q = \sqrt{(\gamma\gamma - \frac{2\beta\gamma au}{kk}\cos\delta \sin(\zeta-\alpha) + \frac{\beta\beta aauu}{k^4})}$.

Enfin, pour la ligne courbe décrite on aura

$$x = \frac{bu(2a - u\cos\zeta)}{\lambda aa}, \quad \& \; y = \frac{buu \sin\zeta}{\lambda aa}.$$

Or ces formules ne dureront pas plus longtems que jusqu'à ce que ſoit devenu $u = \frac{akk\gamma \cos\alpha \cos\delta}{\beta(aa + kk)\sin\zeta}$, ou bien

$$u = \frac{akk}{\beta(aa+kk)}\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma\cos\delta^2)},$$

après quoi la viteſſe progreſſive du globe ſera

$$p = \frac{\sqrt{(\beta\beta a^4 + 2\beta\gamma aakk \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma k^4 \cos\delta^2)}}{aa + kk},$$

auquel la viteſſe rotatoire $q\cos\theta$ au point d'attouchement étant égale; le globe continuera de ſe mouvoir de cette maniere uniformement en ligne droite. Enſuite, l'axe de rotation ſera incliné à l'horizon de l'angle $ZYN = \omega$ exiſtant droit, de ſorte que ſoit.

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\gamma(aa + kk)\sin\delta}{\sqrt{(\beta\beta a^4 + 2\beta\gamma aakk \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma k^4 \cos\delta^2)}}.$$

COROLLAIRE I.

37. Le globe rouleroit dès le commencement en ligne droite ſi ζ étoit $= 0$. Or cela pourra encore arriver d'une double façon excepté

excepté le cas $\gamma = 0$ traité ci-deſſus: premierement, lorsque l'angle BAF $= \alpha$ eſt droit; & en ſecond lieu, lorsque l'axe de rotation au commencement du mouvement eſt vertical, ou que δ eſt $= 90°$.

COROLLAIRE II.

38. Mais, lorsque $\delta = 90°$, l'angle BAF $= \alpha$ n'entre plus au calcul. Donc, puisqu'il nous ſera permis de le prendre à notre volonté, poſons $\alpha = 90°$, & nous ſerons en état de déduire ce cas du précédent. Je vais développer ces deux cas dans les paragraphes ſuivans.

Développement des cas, où au commencement la projection de l'axe de rotation EF eſt normale à la direction du mouvement AB.

39. α étant donc $= 90°$, après avoir poſé l'inclinaiſon de l'axe de rotation à l'horizon $= \delta$, la viteſſe progreſſive $= Vb = \mathfrak{C}$, & celle de rotation en avant & dans l'équateur $= Vc = \gamma$, on obtiendra tang $\zeta = 0$, & de là

$$\text{ou } \zeta = 0° \text{ lorsque } \mathfrak{C} > \gamma \cos\delta,$$
$$\text{ou } \zeta = 180° \text{ lorsque } \mathfrak{C} < \gamma \cos\delta.$$

Donc, après un tems écoulé t, en prenant $u = \frac{\lambda a t}{2\mathfrak{C}}$, à cauſe de XY $= 0$, le globe ſe trouvera au point X. Or, pour déterminer ce lieu, nous aurons à diſtinguer les cas ſuivans.

I. Soit $\mathfrak{C} > \gamma \cos\delta$, & partant $\zeta = 0$; on aura donc AX $= x = \frac{bu(2a - u)}{\lambda aa}$, & la viteſſe progreſſive en cet endroit ſera $p = \frac{\mathfrak{C}(a - u)}{a}$. Enſuite, à cauſe de $\cos\alpha = 0$, $\cos(\zeta - x) = 0$, & $\sin\zeta = 0$, il ſe fera $\omega = 90°$, ſavoir la projection de l'axe de rotation demeurera ſans-ceſſe perpendiculaire

à la droite A B. Or l'axe de rotation ſera incliné à l'horizon ſous l'angle θ:

$$\text{tang } \theta \text{ étant} = \frac{kk\gamma \sin \delta}{kk\gamma \cos \theta + \mathfrak{G} au}.$$

De là nous apprennons que cette inclinaiſon diminue continuellement. Enſuite la viteſſe de rotation autour de cet axe ſera dans l'équateur

$$q = V(\gamma\gamma + \frac{2\mathfrak{G}\gamma au \cos \delta}{kk} + \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G} aauu}{k^4}),$$

laquelle augmentera continuellement, juſqu'à ce que le mouvement uniforme commence, ce qui arrivera en faiſant

$$u = \frac{akk(\mathfrak{G} - \gamma \cos \delta)}{\mathfrak{G}(aa + kk)}, \text{ ou après un tems écoulé}$$

$$t = \frac{2kk(\mathfrak{G} - \gamma \cos \delta)}{\lambda(aa + kk)}.$$

Or alors la viteſſe progreſſive ſera $p = \frac{\mathfrak{G} aa + \gamma kk \cos \delta}{aa + kk}$,

& $\text{tang } \theta = \frac{\gamma(aa + kk) \sin \delta}{\mathfrak{G} aa + \gamma kk \cos \delta}$.

C'eſt ici qu'il faut rapporter le cas, où le globe ait au commencement reçu un mouvement de rotation en arriere; on ſatisfera à ce cas en prenant γ négatif. Or, poſant $-\gamma$, au lieu de γ, les quantités p & x, ne ſe changeront pas, & alors on aura

$$\text{tang } \theta = \frac{kk\gamma \sin \delta}{kk\gamma \cos \delta - \mathfrak{G} au}, \quad \& \; q = -\gamma + \frac{\mathfrak{G} au}{kk}.$$

Enſuite le mouvement uniforme commencera en prenant

$$u = \frac{akk(\mathfrak{G} + \gamma \cos \delta)}{\mathfrak{G}(aa + kk)}, \text{ ou } t = \frac{2kk(\mathfrak{G} + \gamma \cos \delta)}{\lambda(aa + kk)},$$

alors

alors la viteſſe progreſſive ſera $= \frac{\mathfrak{G}aa - \gamma kk \cos\delta}{aa + kk}$, & la tangente de l'inclinaiſon de l'axe à l'horizon ſera $= \frac{\gamma(aa+kk)\sin\delta}{\gamma kk\cos\delta - \mathfrak{G}aa}$.

Il peut arriver en ce cas que le globe recule, ſavoir lorsque $\gamma kk\cos\delta$ eſt $> \mathfrak{G}aa$; où en même tems l'axe de rotation ſera incliné de l'autre part. Or, ſi $\gamma\cos\delta = \frac{\mathfrak{G}aa}{kk}$, le globe ſeroit réduit en repos, & l'axe de rotation deviendroit en même tems vertical.

II. Lorsque $\mathfrak{G} < \gamma\cos\delta$; ζ ſera $= 180°$, & après un tems écoulé t, en poſant $u = \frac{\lambda at}{2\mathfrak{G}}$, le globe ſera en X; AX $= x$, étant $= \frac{bu(2a+u)}{\lambda aa}$, & là la viteſſe progreſſive p ſera $= \frac{\mathfrak{G}(a+u)}{a}$: Enſuite, il ſe fera comme ci-deſſus $\omega = 90°$, de ſorte que la projection de l'axe demeure perpendiculaire à AB: or, pour l'inclinaiſon de l'axe à horizon, on aura tang $\theta = \frac{kk\gamma\sin\delta}{kk\gamma\cos\delta - \mathfrak{G}aa}$, qui donc augmentera continuellement, & l'axe deviendra même vertical en prenant $u = \frac{\gamma kk\cos\delta}{\mathfrak{G}a}$, & puis l'angle θ ſurpaſſera 90°.

Or la viteſſe de rotation dans l'équateur ſera

$$q = V\left(\gamma\gamma - \frac{2\mathfrak{G}\gamma au\cos\delta}{kk} + \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}aauu}{k^4}\right),$$

qui donc ſera la plus petite lorsque u eſt $= \frac{\gamma kk\cos\delta}{\mathfrak{G}a}$, & alors q ſera $= \gamma\sin\delta$, après lequel tems q augmentera de nouveau.

Mais le mouvement uniforme commencera après un tems écoulé $t = \frac{2kk(\gamma\cos\delta - \mathfrak{G})}{\lambda(aa+kk)}$, de ſorte que ſoit $u = \frac{akk(\gamma\cos\delta - \mathfrak{G})}{\mathfrak{G}(aa+kk)}$.

alors la viteſſe progreſſive p deviendra $= \frac{\mathfrak{G} au + \gamma kk \cos\delta}{aa + kk}$, & tang θ ſera $= \frac{\gamma (aa + kk) \sin\delta}{\mathfrak{G} aa + \gamma kk \cos\delta}$. Où il faut remarquer que cette valeur de u eſt plus petite que l'autre $\frac{\gamma kk \cos\delta}{\mathfrak{G} a}$, qui produiroit la plus petite viteſſe rotatoire, $\mathfrak{G} a$, & que partant ce cas du plus petit ne ſauroit avoir lieu.

C'eſt ici qu'il nous faudra conſidérer en particulier le cas où la viteſſe progreſſive $\mathfrak{G}$ évanouit; car alors, à cauſe de $\mathfrak{G} u = \frac{1}{2} \lambda at$, la quantité u deviendra infinie; & partant il ſera néceſſaire d'introduire à ſa place le tems même t.

Donc, après un tems écoulé t, à cauſe de $b = \mathfrak{E}\mathfrak{G}$, le globe ſera en X; $AX = x$ étant $= \frac{1}{4} \lambda tt$; où la viteſſe progreſſive ſera $p = \frac{1}{2} \lambda t$: de ſorte que ce mouvement ſoit uniformement accéléré, & même il ſera toujours également vite, quel que ſoit le mouvement de rotation qu'on ait imprimé au globe, pourvu que α ſoit $= 90°$.

Or alors ſera trouvé tang $\theta = \frac{kk\gamma \sin\delta}{kk\gamma \cos\delta - \frac{1}{2} \lambda aat}$, & la viteſſe de rotation dans l'équateur ſera

$$q = V \left(\gamma\gamma - \frac{\lambda \gamma aat \cos\delta}{kk} + \frac{\lambda\lambda a^4 tt}{4k^4} \right).$$

Mais le mouvement devient uniforme après un tems écoulé $t = \frac{2kk\gamma \cos\delta}{\lambda (aa + kk)}$: lequel tems eſt égal au tems d'une chute libre d'un corps par une hauteur, de laquelle il auroit acquis la viteſſe $\frac{kk\gamma \cos\delta}{\lambda (aa + kk)}$:

Or

Or alors ſera la viteſſe progreſſive $= \frac{\gamma\, kk \cos\delta}{aa + kk}$, &

$$\text{tang}\,\theta = (1 + \frac{aa}{kk})\,\text{tang}\,\delta.$$

Soit $kk = \frac{2}{5}aa$, comme cela arrive dans les globes homogenes, & on aura la viteſſe progreſſive $= \frac{2}{7}\gamma \cos\delta$, & $\text{tang}\,\theta = \frac{7}{2}\,\text{tang}\,\delta$.

Développement du cas où au commencement l'axe de rotation fut vertical.

40. Comme δ eſt $= 90°$: $\cos\delta$ ſera $= 0$, & partant ce cas doit être déduit de la premiere partie du cas précédent. Donc ici, après un tems ecoulé t, poſant $u = \frac{\lambda at}{\mathfrak{G}}$, le globe ſe trouvera en X, de ſorte que ſoit $AX = x = \frac{bu(2a - u)}{\lambda aa}$, & là la viteſſe progreſſive ſera $p = \mathfrak{G}(1 - \frac{u}{a}) = \mathfrak{G} - \lambda t$. Enſuite, on aura pour la poſition de l'axe conſtamment $\omega = 0$, & $\text{tang}\,\theta = \frac{\gamma kk}{\mathfrak{G}au} = \frac{\gamma kk}{\lambda aat}$, & partant l'angle θ qui au commencement fut droit, décroitra continuellement, & la viteſſe dans l'équateur ſera

$$q = V(\gamma\gamma + \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}\,aauu}{k^4}) = V(\gamma\gamma + \frac{\lambda\lambda a^4 tt}{k^4}).$$

Or le globe acquerra un mouvement uniforme après un tems écoulé $t = \frac{2\mathfrak{G}kk}{\lambda(aa + kk)}$, & alors la viteſſe progreſſive ſera $p = \frac{\mathfrak{G}aa}{aa + kk}$, & $\text{tang}\,\theta$ ſera $= \frac{\gamma(aa + kk)}{\mathfrak{G}aa}$.

Soit $kk = \frac{2}{5} aa$, & ce mouvement uniforme commencera après le tems $t = \frac{4\mathfrak{G}}{7\lambda}$. En attendant un corps pesant en tombant librement acquerra une viteſſe $= \frac{2\mathfrak{G}}{7\lambda}$, & tang θ ſera $= \frac{7\gamma}{5\mathfrak{G}}$.

41. Dans tous les autres cas, auxquels ni $\mathfrak{G} = 0$, ni $\alpha = 90°$, ni $\delta = 90°$, le globe ne roulera point en ligne droite, mais en ligne courbe, dont le mouvement ſera déterminé par les formules données au §. 36. de cette maniere.

Solution générale du Probleme propoſé.

42. Lorsqu'on imprime au globe étant en A une viteſſe progreſſive $= V b = \mathfrak{G}$, dans la direction AB, & qu'on lui imprime en même tems un mouvement de rotation dirigé en avant dont la viteſſe ſoit dans l'équateur $= Vc = \gamma$, & qui ſe fait autour d'un axe incliné à l'horizon; que cet axe étant prolongé rencontre le plan horizontal en F, de ſorte que ſoit BAF $= \alpha$, & l'inclinaiſon de l'axe à l'horizon $= \delta$, où tang $\delta = \frac{a}{AF}$; a dénotant ici le rayon du globe.

Qu'on cherche de là l'angle ζ, de maniere que ſoit tang $\zeta = \frac{\gamma \cos\alpha \cos\delta}{\mathfrak{G} - \gamma \sin\alpha \cos\delta}$, & poſant la peſanteur du globe $= M$, la force du frottement $= \lambda M$, le moment d'inertie du globe $= Mkk$, ſon mouvement ſe déterminera de la maniere ſuivante: où il faudra encore remarquer que lorsque le globe conſiſte d'une matiere homogene, kk eſt $= \frac{2}{5} aa$, & qu'on puiſſe pour la plûpart prendre $\lambda = \frac{1}{3}$.

I. Soit t le tems écoulé depuis le commencement, qu'on prenne une ligne u proportionelle à ce tems, & qu'on poſe $u = \frac{\lambda a t}{2\mathfrak{G}}$; t exprimera

primera donc encore le tems dans lequel un corps grave tombant librement acquiert une viteſſe $= \frac{\zeta u}{\lambda a}$. Ou bien, en poſant le tems écoulé $t = \Theta$ ſecondes, & la viteſſe acquiſe par la chute d'une ſeconde $= \sqrt{g}$; la lettre g dénotant la hauteur de la chute, de même que b & c ſignifient les hauteurs dues aux viteſſes ζ & γ, on aura $u = \lambda \Theta a \sqrt{\frac{g}{b}}$. Or il eſt connu qu'un corps parcourt avec la viteſſe $\sqrt{g}$ toutes les ſecondes un eſpace des $31\frac{1}{4}$ pieds du Rhin; il faudra donc auſſi ſubſtituer ce nombre à la place de $\sqrt{g}$, lorsqu'on exprime également les viteſſes $\zeta = \sqrt{b}$, & $\gamma = \sqrt{c}$, par des eſpaces parcourus dans une ſeconde, & meſurés avec le pied du rhin.

II. Or, le tems t ou de Θ ſecondes étant écoulé, le globe touchera le plan horizontal dans le point Y, de ſorte que ſoit, après en avoir tiré ſur AB la perpendiculaire YX,

$$AX = x = \frac{bu(2a - u \cos\zeta)}{\lambda aa}, \quad \& \quad XY = y = \frac{buu \sin\zeta}{\lambda aa},$$

où b eſt la hauteur, par laquelle un corps tombant acquiert la viteſſe ζ, & qui, lorsqu'on l'exprime par le nombre des pieds parcouru dans une ſeconde, ſera $= \frac{2}{125} \zeta\zeta$ pieds.

III. Enſuite, dans cet endroit Y, la viteſſe progreſſive ſera $p = \zeta \sqrt{(1 - \frac{2u}{a} \cos\zeta + \frac{uu}{aa})}$, dont la direction eſt Yy, qui prolongée ſera avec AB un angle dont la tangente ſera $= \frac{u \sin\zeta}{a - u \cos\zeta}$ $=$ tang BTY, & la viteſſe rotatoire dans l'équateur pour ce même endroit ſera

$q =$

$$q = V(\gamma\gamma - \frac{2\mathfrak{G}\gamma au}{kk}\cos\delta\sin(\zeta-\alpha) + \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}aauu}{k^4}),$$

& cette viteſſe ſera dirigée en avant.

IV. J'entends ici par équateur, le grand cercle ſur la ſurface du globe qui eſt perpendiculaire à l'axe de rotation. Que cet axe prolongé rencontre le plan horizontal en N, & que ſon inclinaiſon à l'horizon ſoit θ, de ſorte que ſoit

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\gamma\, kk\sin\delta}{V(\gamma\gamma k^4\cos\delta^2 - 2\mathfrak{G}\gamma akku\cos\delta\sin(\zeta-\alpha) + \mathfrak{G}aauu)}.$$

V. Or, tirant la droite YN, celle-ci fera avec la direction Yy un angle y YN $= \omega$, de maniere que ſoit

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\gamma kk\cos\delta(a\sin\alpha + u\sin(\zeta-\alpha)) + \mathfrak{G}au(a\cos\zeta - u)}{\gamma kk\cos\delta(a\cos\alpha - u\cos(\zeta-\alpha)) - \mathfrak{G}aau\sin\zeta},$$

$$\text{ou tang}\,(\omega-\alpha) = \frac{\gamma kku\cos\delta\sin\zeta + \mathfrak{G}au(a\cos(\zeta-\alpha) - u\cos\alpha)}{\gamma kk\cos\delta(a - u\cos\zeta) - \mathfrak{G}au(a\sin(\zeta-\alpha) + u\sin\alpha)},$$

Mais cette ligne YN fera encore avec AB, un angle dont la tangente ſera $= \frac{\gamma kk\sin\alpha\cos\delta + \mathfrak{G}au\cos\zeta}{\gamma kk\cos\alpha\cos\delta - \mathfrak{G}au\sin\zeta}$.

VI. Or ce mouvement curviligne ne durera pas plus longtems que jusqu'à ce que ſoit fait

$$u = \frac{\gamma akk\cos\alpha\cos\delta}{\mathfrak{G}(aa + kk)\sin\zeta}, \quad \text{ou}$$

$$u = \frac{akk}{\mathfrak{G}(aa+kk)}V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - 2\mathfrak{G}\gamma\sin\alpha\cos\delta + \gamma\gamma\cos\delta^2),$$

après

après lequel tems écoulé ſera la viteſſe progreſſive

$$= \frac{V\,(\mathfrak{G}\mathfrak{G}a^4 + 2\mathfrak{G}\gamma aakk \sin\alpha\cos\delta + \gamma\gamma k^4\cos\delta^2)}{aa + kk}.$$

& alors l'angle ZYN deviendra droit, & l'axe de rotation ſera incliné à l'horizon d'un angle dont la tangente eſt $=$

$$\frac{\gamma\,(aa + kk)\sin\delta}{V\,(\mathfrak{G}\mathfrak{G}a^4 + 2\mathfrak{G}\gamma aakk\sin\alpha\cos\delta + \gamma\gamma k^4\cos\delta^2)}.$$

Enfin, la viteſſe de rotation q dans l'équateur ſera telle qu'il ſoit $q\cos\theta = p$; & comme il n'y aura plus de frottement, le globe continuera de rouler uniformement en ligne droite.

DÉMONSTRATION
DU THEOREME DE HARRIOT,

AVEC UNE

METHODE DE CHERCHER,
SI UNE E'QUATION ALGE'BRIQUE A TOUTES LES RACINES POSSIBLES, OU NON?

PAR M. AEPINUS.

Traduit du Latin.

Planche VIII. L'Epoque principale des accroiſſemens que l'Algébre a reçu dans le ſiecle paſſé, peut être à bon droit aſſignée au tems où, ſoit *Descartes*, ſoit *Harriot*, ou qui que ç'ait été, (car les Ecrivains varient ſur cet Inventeur,) ont trouvé que chaque équation algébrique peut être réſolue en des facteurs ſimples qui contiennent les racines de l'équation, laquelle doit être conſidérée comme le produit de tous ces facteurs. En effet, cette propoſition a ouvert un vaſte champ pour découvrir ſans effort pluſieurs propriétés inſignes des équations; auſſi ceux qui s'appliquoient alors à cultiver l'analyſe, n'ont-ils pas négligé la belle occaſion qui leur étoit offerte. Cependant la plûpart des choſes qu'ils ont tirées de ce principe par rapport à la nature des équations, en ont plutôt été déduites par une ſimple induction, que par voye de démonſtration. Dans la ſuite, on n'a pas eu de peine à appuyer un grand nombre de ces Propoſitions ſur des démonſtrations aſſez rigoureuſes; mais il en reſte encore quelques unes qui ont donné bien de la peine aux plus grands Mathématiciens, lorsqu'ils ont voulu en trouver les démonſtrations; & ils y ont ſouvent travaillé ſans ſuccès.

Il

Il faut ranger dans cette claſſe le Theorème, où, par la ſérie des ſignes, dont les termes d'une équation ſont affectés, on détermine le nombre des racines poſitives & négatives de cette équation. C'eſt celui qu'on appelle communément *le Theorème d'Harriot*. Je vais fournir ici après d'autres ſa démonſtration, dont je n'ai autre choſe à dire, ſinon que je crois qu'elle n'eſt pas indigne d'attention. Les cinq premieres propoſitions de mon Mémoire comprennent cette démonſtration; mais, comme les principes ſur lesquels elle eſt fondée, m'ont conduit comme par la main à une méthode de chercher, ſi toutes les racines d'une équation propoſée ſont poſſibles, ou non; différente, autant que je puis le ſçavoir, de toutes les méthodes connues jusqu'à préſent, j'ai crû qu'il n'étoit pas hors de propos d'ajoûter encore quelques autres propoſitions qui ſervent à expliquer cette méthode.

PROPOSITION I.

Si la courbe ABCDEF eſt définie par l'équation algébrique Fig. 3.

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - - - - - + F = y$$

en prenant x pour l'abſciſſe, y pour l'appliquée, & que toutes les racines de l'équation ſoyent réelles, ſans qu'aucunes ſe trouvent égales,

1. cette courbe concourt avec le diametre m fois.

2. le diametre en eſt coupé autant de fois, de façon qu'à chaque interſection les y paſſent au côté oppoſé, c'eſt à dire, de poſitifs deviennent négatifs, ou de négatifs poſitifs,

3. les x étant poſitifs, les y deviennent enfin auſſi poſitifs, ſoit que m ſoit pair ou impair; mais les x étant négatifs, les y deviennent enfin poſitifs, lorsque m eſt *pair*, mais négatifs lorsqu'il eſt impair.

4. ſi les y commencent à décroitre, il ne ſe fait jamais de croiſſans des décroiſſans, à moins que la courbe n'ait auparavant coupé le diamètre.

5. entre deux interſections quelconques de la courbe avec le diametre, tombe un plus grand y, mais ſeulement unique, & les plus grands y ſont alternativement poſitifs & négatifs.

DÉMONSTRATION.

1. En effet, toutes les fois que x devient racine de l'équation, tout autant de fois y devient $= 0$; mais, ſi x paſſe par toutes les valeurs poſſibles, il devient m diverſes fois racine (par l'hypotheſe.) Donc la courbe m concourt avec le diamètre m fois, d'où

2. elle touche, ou coupe le diamètre. Or ce n'eſt pas le premier. Car, qu'elle touche le diamètre en H, & qu'on mene NS parallele au diamètre dans la diſtance $MH = G$, & la courbe coupera la ligne NS, $m + 1$ fois; car le contact venant à ceſſer, il nait à ſa place deux interſections. Mais, en poſant $MH = G = WT$, & $VT = Z$, on aura $WV = Y = Z + G$, d'où la courbe rapportée à la droite NS ſeroit définie par l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} - - - - - + F = Z \quad - G$$

c'eſt pourquoi cette équation de m dimenſions auroit $m + 1$ racines, ce qui ſeroit abſurde. La courbe coupe donc le diametre à chaque concours, & les y paſſent à chaque interſection au côté oppoſé.

3. En poſant $x = \infty$, tous les termes, outre le premier, évanouïſſent, d'où $x^m = y$, laquelle valeur eſt poſitive, ſi x eſt poſitif; mais, ſi x eſt négatif, & m pair, cette valeur eſt pareillement poſitive, au lieu qu'elle devient négative, lorsque m eſt un nombre impair.

Fig. 2. 4. En effet, que les y décroiſſent en QP, & que de là ils deviennent de nouveau croiſſans; qu'on mene GH parallele au diametre CD, dans la diſtance $PR > PQ$; & cette droite ſera coupée par la courbe $m + 2$ fois. Soit $PR = VT = G$, $VW = Z$, $G = Z$

ſera

ſera y; d'où la courbe rapportée au diametre GH eſt définie par l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} - - - - - + F = Z - G$$

Or alors l'équation de m dimenſions auroit $m + 2$ racines; ce qui eſt abſurde.

5. Car dans l'une & l'autre interſection les y deviennent $= 0$, d'où s'enſuit qu'ils doivent croître depuis 0, & enſuite décroître de nouveau jusqu'à 0: ce qui fait qu'entre deux interſections prochaines quelconques tombe néceſſairement le plus grand y, mais ſeulement unique; car, s'il y en avoit pluſieurs, les y de décroiſſants deviendroient croiſſants, ſans interſection préalable: ce qui eſt contraire au N°. 4. Mais comme les y à chaque interſection paſſent au côté oppoſé (n. 2.) la méme choſe doit arriver auſſi dans les plus grands y, qui tombent entre deux interſections prochaines quelconques.

COROLLAIRE I.

On peut former les fluxionales d'une ſemblable équation jusqu'à l'ordre n^{eme}, en prenant dx pour conſtante.

En effet ſoit

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - - - - - = y$, on aura la fluxionale

1. $mx^{m-1}dx + (m - 1)Ax^{m-2}dx - - -$

2. $m(m-1)x^{m-2}dx^2 + (m-1)(m-2)Ax^{m-3}dx^2 - - -$

& en général

$y^{eme}. m(m-1)....(m-r+1)x^{m-r}dx^r + (m-1)....(m-r)Ax^{m-r-1}dx^r ...$

Que ſi dans cette formule on ſubſtitue pour r un nombre quelconque entier, plus grand que m, tous les termes évanouiſſent; ce qui n'arri-

n'arrive pas, tant que r n'eſt pas plus grand que m, d'où toutes les fluxionales au delà de l'ordre m deviennent $=$ o.

COROLLAIRE II.

Si l'on conçoit que la fluxionale de l'ordre r ſoit diviſée par la conſtante dx^r, ſa valeur ſera proportionelle au différentiel de y du même degré r; d'où, ſi l'on ſuppoſe que des courbes ſoyent conſtruites, dont les appliquées ſont définies par ces équations, leurs y appliquées ſeront comme les fluxions de y de tous les dégrés. Or tout ce qui a été démontré dans la propoſition convient à ces courbes, que j'appellerai fluxionales. J'indiquerai à l'avenir leurs appliquées par 1F, 2F — — — nF. J'ai tracé un ſyſteme de ſemblables courbes, qui appartiennent à l'équation du cinquieme degré dans la Figure III. où je ſuppoſe que l'on compte les abſciſſes depuis le point auquel la droite GH rencontre chaque diametre, en prenant les abſciſſes poſitives vers la gauche, & les négatives vers la droite. Cette Figure pourra fournir des exemples particuliers des choſes que je démontrerai dans la ſuite d'une maniere univerſelle.

COROLLAIRE III.

Le dernier terme de la fluxionale r^{me} eſt $= r.(r-1)-.-.-.1 \times +\mathfrak{D}$, en entendant par $\mathfrak{D}$ le coëfficient du terme de l'équation primitive de l'ordre $m + r - 1$. En effet, le terme f^{me} de la fluxionale de l'ordre r eſt $=$

$$(m-f-1)(m-f) - - - - (m-r-f+2) \times +\mathfrak{D}x^{m-r-f+1}.$$

$\mathfrak{D}$ indiquant le coëfficient du terme $f$eme de l'équation primitive, ce qui réſulte de l'induction, & peut être facilement démontré. Mais le dernier terme de la fluxionale de l'ordre r eſt celui dans lequel l'expoſant de x eſt $=$ o, d'où, ſi le $f$me doit être le dernier, $m - r - f + 1$ ſera $=$ o, ou bien $f = m - r + 1$, laquelle valeur de f, étant ſubſtituée dans la formule générale, on parvient à la valeur du dernier terme.

COROL-

COROLLAIRE IV.

Au même x, où tombe dans la premiere fluxionale une interſection, tombe le plus grand y, & de la même maniere au même x où dans la fluxionale de l'ordre $(n + 1)$ tombe une interſection, là tombe dans celle de l'ordre n le plus grand nF. Car là où la fluxionale 1e. ou $(n+1)^{me}$ coupe le diametre, 1F ou $(n+1)$F prenant la valeur contraire, d'où les y, ou nF, commencent de nouveau à décroître, & par conſéquent ſont les plus grands.

PROPOSITION II.

Si de l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} - - - - - - + F = y.$$

on prend tous les F tombants en $x = 0$, dans la ſérie de ces F mêmes, il y aura autant d'échanges de ſignes, & autant de ſucceſſions, qu'il s'en trouve dans l'équation même.

DÉMONSTRATION.

En effet, en concevant $x = 0$, dans la fluxionale de l'ordre r (Cor. II. Prop. I.) tous les termes évanouïſſent outre le dernier, dans lequel x ne ſe trouve pas. Or ce dernier terme eſt (Cor. III. Prop. I.) $= (r.\ r - 1 - - - - 1)\ x + \Phi$. Comme donc $(r.\ r - 1 - - - - 1)$ eſt un nombre poſitif, cet rF obtiendra le même ſigne de Φ, c'eſt à dire, celui du coëfficient du terme $(m - r + 1)$; d'où il eſt néceſſaire que la ſuite des ſignes des F tombants en $x = 0$, ſoit la même que celle des ſignes de l'équation.

PROPOSITION III.

La fluxionale n^{me} coupe le diametre pour le moins autant de fois, aux abſciſſes tant poſitives que négatives, que celle de l'ordre ſuivant $n + 1$.

DÉMON.

DÉMONSTRATION.

Que la fluxionale $(n + 1)^{me}$ coupe le diametre r fois.

1. aux x positifs; & comme, à chaque interſection de celle-ci, il tombe un *maximum* dans celle de l'ordre n, le nombre de ces *maximum* ſera $= r$, aux abſciſſes poſitives. Or, entre deux plus grands quelconques, tombe une interſection; ainſi les interſections qui tombe entre les plus grands nF, ſont au nombre de $r - 1$. Mais comme les nF aux abſciſſes poſitives deviennent enfin poſitifs croiſſant à l'infini, (Prop. I.) le dernier *maximum* de ces côtés-là eſt négatif; d'où réſulte que ce *maximum* eſt encore ſuivi d'une interſection, qui ne tombant point entre deux *maxima*, n'eſt pas contenue parmi celles dont on a fait ci-devant l'enumération; & ainſi il y a au moins r interſections dans la fluxionale n aux poſitifs.

2. La démonſtration eſt la même, ſi l'on prend les interſections, qui ſe font aux x négatifs.

PROPOSITION IV.

Si les ſignes des nF & $(n + 1)$ F, qui tombent aux $x = 0$ changent, il y aura dans la fluxionale n des interſections $r + 1$, aux abſciſſes poſitives. Mais, ſi les ſignes ſe ſuccedent, il n'y a pas plus d'interſections que r. Le contraire a lieu aux abſciſſes négatives.

DÉMONSTRATION.

En effet, quand les ſignes ſont changés, les $(n + 1)$F, ont une valeur oppoſée à nF, d'où les nF ſont décroiſſans; de la vient qu'aux x poſitifs la fluxionale n coupe enfin le diametre. Mais cette interſection tombe avant le premier *maximum* nF. Car ſoit le contraire, & l'interſection de n^{me} ne tombera pas avant l'interſection la plus proche de $(n + 1)^{me}$. Or, dans l'interſection de $n + 1$, les $(n + 1)$ F deviennent homogenes aux nF; d'où les nF devien-

droient

droient de nouveau croiſſants de décroiſſants ſans l'interſection préalable, (ce qui eſt contre la Propoſ. I.) Cette interſection tombe donc avant le premier *maximum* nF. Et comme elle n'eſt pas contenue parmi celles qui ont été rapportées dans la propoſition précédente, il y aura en tout $(r + 1)$ interſections dans la fluxionale de l'ordre n.

Au contraire, ſi les ſignes ſe ſuccedent, les nF croiſſent juſqu'à la premiere interſection de $(n + 1)$, c'eſt à dire juſqu'au premier *maximum* nF, d'où s'enſuit qu'il ne tombe aucune interſection avant le premier *maximum* nF, mais qu'elles ſont toutes contenues ſous celles qui ont été précédemment indiquées.

La démonſtration vers les abſciſſes négatives ſe fait de la même maniere, moyennant les changemens convenables.

PROPOSITION V.

S'il eſt vrai qu'il y ait dans la fluxionale $(n + 1)$ autant d'interſections aux x poſitifs, qu'il y a d'échanges de ſignes dans la ſérie des F mêmes, pris aux $x = 0$, qui ſuivent $(n + 1)$ F, cela eſt pareillement vrai dans la fluxionale n. Et s'il eſt encore vrai dans la fluxionale $(n + 1)$ qu'il y ait autant d'interſections aux x négatifs qu'il y a de ſucceſſions de ſignes dans la ſérie des F mêmes aux $x = 0$ qui ſuivent $(n + 1)$ F, cela ſera vrai dans celle de l'ordre n.

DÉMONSTRATION.

En effet que cela ſoit vrai dans la $(n + 1)^{me}$, &

1. nF & $(n + 1)$ F, pris aux $x = 0$, ſoyent hétérogenes à la ſérie des ſignes des F mêmes, qui ſuivent $(n + 1)$ F, eſt

joint un changement de ſignes, qui deviennent $r + 1$. Mais, dans ce cas auſſi, le nombre des interſections dans la fluxionale n devient $r + 1$. (par la Propoſ. précéd.) Au contraire, ſi

2. nF & $(n + 1)F$ ſont homogenes, alors il n'y a point de changement de ſignes dans la ſérie des F, ni de nouvelle interſection jointe au nombre des interſections qui ſe trouvent dans la fluxionale n, d'où s'enſuit que de part & d'autre demeurent les r interſections.

La démonſtration du ſecond membre s'exécute de la même maniere.

COROLLAIRE I.

Si dans la fluxionale $(m - 1)me$, qui coupe le diametre une ſeule fois, on prend un point duquel les abſciſſes ſoient comptées, de façon que $(m - 1)F$ pris aux $x = o$ ſoit poſitif, il ne tombe point d'interſection aux x poſitifs; le contraire arrivant, ſi $(m - 1)F$ aux $x = o$ eſt négatif. De là vient qu'il eſt vrai dans la fluxionale $(m - 1)$, qu'il y a autant d'interſections aux x poſitifs, qu'il exiſte d'échanges dans la ſérie des F, qui ſuivent nF, les mF étant toujours poſitifs. La même choſe a donc lieu dans la fluxionale $(m - 2)$, $(m - 3)$ &c.

COROLLAIRE II.

En comparant ces poſitions, la vérité du Théoreme de *Harriot* ſe manifeſte d'elle-même.

PROPOSITION VI.

Oter un terme quelconque d'une équation.

SOLU

SOLUTION.

Cela ſe fait, comme on le ſçait par les élémens, en augmentant ou diminuant les racines de l'équation. Soit donc l'équation donnée

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \text{ — — — —}$$

En ſubſtituant au lieu de x, $y + z$, on aura

$$x^m = y^m + \frac{m}{1} Ay^{m-1} z^n + \frac{m.m-1}{1.2} y^{m-2} z^2 \text{ — — —}$$

$$+ Ax^{m-1} = + Ay^{m-1} + \frac{m-1}{1} Ay^{m-2} z \text{ — — —}$$

$$+ Bx^{m-2} = + By^{m-2} \text{ — — —}$$

Ainſi le coëfficient de chaque puiſſance de y ſera de

$$m) = 1$$

$$m - 1) = \frac{m}{1} z + A$$

$$m - 2) = \frac{m.m-1}{1.2} z^2 + \frac{m-1}{1} Az + B.$$

& en général le coëfficient de la puiſſance y^{m-n}, c'eſt à dire, du $(n+1)^{me}$ terme ſera

$$\frac{m.m-1.\ldots\ldots m-n+1}{1.2\ldots\ldots n} z^n + \frac{m-1.\ldots\ldots m-n+1}{1\ldots\ldots(n-1)} Az^{n-1} + \&c.$$

Donc, ſi l'on veut ôter de l'équation le terme $(n+1)^{me}$, on n'a qu'à ſubſtituer pour z une des racines de cette expreſſion, égalé à zero, d'où le coëfficient de ce terme devient $= 0$.

PROPOSITION VII.

Si d'une équation quelconque le terme $(n + 1)$ manque, je dis que $(m - n)$ F, pris aux $x = 0$, ſera pareillement $= 0$, c'eſt à dire que $x = 0$ eſt la racine de la fluxionale $(m - n)^{me}$.

DÉMONSTRATION.

En effet $(m - n)$ F aux $x = 0$, eſt

$$(n + 1.\ n.\ n - 1 - - - - - 1)\ x + \Phi$$

mais le terme $(n + 1)$ manquant, ſon coëfficient Φ devient $= 0$, d'où auſſi $(m - n)$ F $= 0$.

PROPOSITION VIII.

Si l'on prend $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F, tombants au même x avec la derniere interſection de la fluxionale n, vers les x poſitifs, $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F ſeront hétérogenes, ſi toutes les racines de l'équation ſont réelles.

DÉMONSTRATION.

Au même x, qui convient à la derniere interſection de l'n^{me}, tombant le dernier *maximum* de l'$(n - 1)^{me}$, qui eſt négatif, ſi toutes les racines ſont réelles (par la Prop. I.) mais $(n + 1)$ F tombant à cet x, eſt poſitif. Car la derniere interſection de n tombe après le plus grand *maximum* nF: donc, après la derniere interſection de $(n + 1)$, par laquelle les $(n + 1)$ F deviennent poſitifs, (Prop. I.) d'où $(n + 1)$ F eſt néceſſairement poſitif.

PRO-

PROPOSITION IX.

Si la propoſition précédente eſt véritable dans le cas démontré, je dis qu'elle eſt vraye auſſi de tous les $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F, qui tombent au même x, avec une interſection quelconque de l'n^{me}.

DÉMONSTRATION.

En effet, ſi cette Propoſition eſt vraye pour un x quelconque, auquel tombe l'interſection de l'n^{me}, je dis qu'elle le ſera de même pour tout x immédiatement ſuivant, auquel la fluxionale n^{me} coupe le diametre. Car au même x, avec l'interſection la plus prochaine de l'n^{me}, tombe le *maximum* de l'$(n - 1)^{me}$ qui ſuit immédiatement. Or entre deux *maxima* quelconques tombe l'interſection, d'où s'enſuit que les $(n - 1)$ F paſſent à l'oppoſite. Mais les $(n + 1)$ Fy paſſent pareillement. Car, entre deux interſections de n tombe le plus grand nF, & au même x, avec le plus grand nF, la fluxionale $(n + 1)$ coupe le diametre. Donc les $(n + 1)$ F paſſent du côté oppoſé. Ainſi $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F paſſant ainſi à l'oppoſite, il eſt manifeſte que, s'ils ont été auparavant hétérogenes, ils le demeureront encore. Or cette propoſition a lieu par rapport aux derniers $(n + 1)$ F; donc elle eſt applicable à tous. (Prop. VIII.)

COROLLAIRE.

Si donc de tels $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F deviennent homogenes, toutes les racines de l'équation ne ſeront pas réelles.

PROPOSITION X.

Si d'une équation quelconque on ôte un terme, & que les termes qui touchoient de part & d'autre celui qu'on a ôté, deviennent homogenes, ce ſera un indice de racines impoſſibles.

DÉMONSTRATION.

En effet, la ſérie des ſignes de l'équation eſt la même que la ſérie des ſignes des F mêmes, pris aux $x = o$. (Prop. II.) Si donc, en ôtant un terme, les termes placés de côté & d'autre ſont homogenes, dans la ſérie des F mêmes, les F placés de côté & d'autre du terme $(m - n)$ F qui manque (Prop. VII.) ſeront auſſi homogenes; d'où il s'enſuit néceſſairement que quelques unes des racines ſont impoſſibles.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

* *
*

MÉMOIRE,

SUR

LA DÉCOUVERTE DES LOIX D'UN CHIFRE DE FEU M. LE PROFESSEUR HERMAN,

PROPOSÉ COMME ABSOLUMENT INDÉCHIFRABLE.

PAR M. BEGUELIN.

I.

Je ne ſai ſi le ſujet de ce Mémoire ſeroit digne de l'Académie à laquelle j'ai l'honneur d'en rendre compte, n'étoit que le chifre dont il s'agit contient un défi formel, non ſeulement à tous les Mathématiciens de l'Europe, mais encore à toutes les Sociétés des Sciences; & qu'en effet il eſt reſté indéchifrable des années entieres.

Ce chifre m'aiant été communiqué vers la fin de Mai paſſé, par l'un des premiers Géometres de l'Europe, je m'en chargeai, plus par curioſité, que dans l'eſpérance d'y déterrer une clé, que des calculateurs incomparablement plus habiles que moi s'étoient rebutés d'y chercher. Auſſi ma ſurpriſe fut-elle extreme, quand, dès le troiſieme jour, je vis que cette clé étoit en mon pouvoir, & qu'il ne faloit plus qu'un peu de loiſir pour la dégager tout à fait des difficultés qui reſtoient à réſoudre. J'y réuſſis aſſez bien pour pouvoir rendre le chifre & ſa clé huit jours après qu'il m'eût été confié.

II. S'il y a quelque choſe d'intéreſſant dans cette découverte, c'eſt moins la connoiſſance du chifre en lui-même, qui ne fait que l'ob-

jet d'une ſimple curioſité, que la maniere d'y parvenir. C'eſt la marche de l'eſprit dans ces ſortes de recherches, qui, (comme l'a déjà obſervé M. sGraveſande dans ſa Métaphyſique, à l'occaſion d'un chifre moins compliqué,) peut être d'une influence réelle dans les Sciences, & manifeſter l'uſage, & la juſte application, des premiers principes de la Métaphyſique. Auſſi, ce que je me propoſe principalement dans ce Mémoire, c'eſt de rapporter au vrai la route que j'ai ſuivie dans ce déchifrement. Quoiqu'elle m'ait conduit aſſez droit au but, je me flatte qu'on ne me ſoupçonnera pas d'en vouloir impoſer. Ceux qui ſavent le peu de tems que j'ai à donner à des occupations de cette nature, comprendront aſſez, que, pour peu d'écarts que j'euſſe fait, ils auroient conſumé plus de tems que je n'en ai mis à arriver à la vraie ſolution de ce probleme.

Pl. VIII. & IX. No. 1. & 2.

III. Le chifre propoſé eſt compoſé d'environ 25 caracteres différens, outre les neuf chifres de l'arithmétique. A'chacun de ces caracteres répond immédiatement au deſſous une lettre de l'alphabet; & chaque mot eſt ſéparé de l'autre par un point. Pluſieurs de ces caracteres en ont encore un autre immédiatement au deſſus d'eux, & ces caracteres ſupérieurs ſont en partie les mêmes que les inférieurs; quelques autres, qui ne conſiſtent qu'en points ou en ſimples lignes, paroiſſent affectés à la rangée ſupérieure, & ne ſe rencontrent nulle part dans l'inférieure. C'eſt ce que l'inſpection du chifre explique au premier coup d'oeil.

IV. Comme je croyois ce chifre extrêmement difficile, & qu'il n'étoit pas naturel, dans cette ſuppoſition, de penſer que chaque caractere repondit à la lettre placée au deſſous; ma premiere idée fut, que ces caracteres inférieurs n'étoient placés là que pour faire prendre le change, & qu'il n'y avoit que les ſignes ſupérieurs qui fuſſent ſignificatifs. Mais, dans cette ſuppoſition, il auroit falu que chaque ſigne ſupérieur exprimât, ou des ſillabes entieres, ou certain nombre de lettres; & je m'apperçus d'abord que cela ne pouvoit pas être; 1°. puiſqu'il eût falu un beaucoup plus grand nombre de caracteres ſupérieurs, qu'il

qu'il n'y en avoit effectivement; 2°. parce qu'aux mêmes ſignes ſupérieurs, répondoient des ſillabes différentes. Je tirai donc de là ma premiere concluſion: *Les ſignes ſupérieurs ne déſignent pas des ſillabes.*

V. Cela poſé, ma ſeconde concluſion fut: *chaque caractere inférieur déſigne effectivement une lettre de l'alphabet;* puiſque je voyois autant de ces caracteres que de lettres au deſſous, & que chaque mot étoit diſtingué par des points, & même par une parentheſe lorſque le cas l'exigeoit.

VI. Paſſant plus loin, je crus pouvoir ſuppoſer, que *chaque caractere répondoit à la lettre de l'alphabet placée immédiatement au deſſous de lui.* Il eſt vrai que l'epithete d'*orientaliſche Wiſſenſchaft*, que l'Auteur donne à ſon chifre, me fit ſoupçonner que peut-être faloit-il lire chaque mot de droite à gauche, & qu'ainſi les caracteres ſeroient dans un ordre renverſé par rapport aux lettres auxquelles ils répondoient. Mais, outre que je ne trouvois pas une correſpondance plus uniforme entre ces caracteres, & les lettres, ſoit que je les priſſe à rebours, ou de gauche à droite; j'obſervai de plus que *chaque lettre initiale d'un mot avoit un double caractere, au lieu que la finale n'en avoit quelquefois qu'un ſimple.* Or ſi le ſigne ſupérieur étoit peut-être la marque d'une clé particuliere, il étoit naturel qu'elle ſe trouvât ſur la premiere lettre du mot.

VII. Cependant je ne pouvois me diſſimuler, qu'*un même caractere, ſoit ſimple ou double, déſignoit tantôt une lettre tantôt une autre.* C'eſt ce que la ſimple inſpection du chifre montroit presque à chaque mot; & de plus l'auteur du chifre avoit aſſuré que chaque mot pouvoit s'écrire en autant de manieres différentes qu'il y avoit de différens caracteres.

VIII. Je fus d'abord tenté de croire que cette diverſité de ſignification d'un même ſigne, venoit de la multiplicité des clés particulieres, que je ſuppoſois être indiquées par les ſignes ſupérieurs. Je

concevois qu'on pouvoit avoir rangé tous les caracteres du chifre dans une Table, ou eſpece d'échiquier, d'environ 24. files; que chaque caractere, ſe retrouvant une fois dans chaque rang, pouvoit par là répondre ſucceſſivement à chaque lettre de l'alphabet, & que le ſigne ſupérieur déſignoit le rang, ou la file, qui déterminoit la ſignification du caractere. Mais, pour que cette hypotheſe fut la vraye, il faloit que toutes les fois qu'un même caractere ſeroit précédé, ou accompagné du même ſigne ſupérieur, il ſignifiât la même lettre de l'alphabet, & c'eſt ce que je ne trouvois presque nulle part; d'où je crus pouvoir conclure: que *la raiſon de la différente ſignification d'un même caractere, ne venoit, ni de la multiplicité des clefs particulieres, ni du ſigne ſupérieur qui l'accompagnoit, ou qui le précédoit.*

IX. Combinant cette concluſion-ci avec celle de l'Article VI. qui me paroiſſoit également ſûre, voici comme je raiſonnai. Il eſt impoſſible que la diverſité de ſignification d'un même caractere ſoit arbitraire; *il faut* donc *qu'il y ait toujours une raiſon ſuffiſante pourquoi dans chaque place ce caractere déſigne plutôt une lettre qu'une autre.* Or cette raiſon n'étant, ni dans le caractere même qui n'a point de ſignification fixe (§. VII.) ni dans les ſignes ſupérieurs (§. VIII.) il ne reſte à la chercher que *dans la rélation du caractere*, c. à. d. *dans ſa maniere de coëxiſter avec les autres;* en un mot, *dans ſa ſituation par rapport à ceux qui le précédent, ou qui le ſuivent, ſoit médiatement, ou immédiatement.*

X. Pouſſant ce raiſonnement plus loin, pour arriver à une concluſion plus préciſe, je dis: que, comme en écrivant, les caracteres qui ont précédé ſont plus connus que ceux qui ſuivront, *il y avoit plus de raiſon de chercher la cauſe de cette diverſité de ſignification dans les caracteres qui précédoient, que dans ceux qui ſuivoient.*

XI. Faiſant enſuite réflexion qu'il y a des mots qui ne ſont compoſés que de deux lettres, & me rappellant en même tems l'obſervation de l'Article VI. que chaque initiale a un double caractere, j'en conclus:

elus : que *probablement ce n'étoit que le caractere immédiatement précédent qui déterminoit la ſignification du caractere ſuivant*, & que c'*étoit la raiſon pourquoi chaque initiale étoit compoſée de deux caracteres.*

XII. Avant d'aller plus loin, il étoit également aiſé, & néceſſaire, de vérifier cette hypotheſe. Je cherchai dans le chifre des endroits où les deux mêmes caracteres voiſins ſe trouvaſſent répétés. S'ils donnoient toujours la même lettre, mon raiſonnement étoit juſte; s'ils en donnoient d'autres, ma ſuppoſition tomboit d'elle-même. Je trouvai plus que je ne cherchois: j'avois apperçu que les caracteres $3\ominus$, étoient ſouvent répétés; en les raſſemblant tous, j'eus la table ſuivante.

Dans le mot	*Societaten* — — —	$\overline{\Delta}$ $3\ominus$	a pour finale — *t*
— — —	*Secretaires* — — —	$3\ominus$	— — — — *t*
— — —	*Interpretes* — — —	$\top$ $3\ominus$	— — — — *t*
— — —	*Potentaten* — — —	$\perp$ $3\ominus$	— — — — *t*
— — —	*Potentaten* — — —	$\ominus 3$	— — — — *t*
— — —	*anſtatt* — — —	$\ominus$ 3	— — — — *t*
— — —	*buchſtaben* — — —	$\ominus$ 3	— — — — *t*
— — —	*dexteritat* — — —	$3\ominus$	— — — — *t*

Tous ces divers exemples, qu'aucun cas contraire ne démentoit, confirmerent non ſeulement ma concluſion du §. XI. mais me firent voir de plus; 1°. que *le ſigne ſupérieur du caractere qui précéde, n'influe point à déterminer la ſignification du caractere ſuivant*, & 2°. qu'*il*

 n'im-

n'importe quelle position les deux caracteres ayent l'un par rapport à l'autre, pour donner la même signification : puisque, dans les exemples recueillis ci-deſſus, que ⊖ ſoit à gauche, ou à droite, ou au deſſus de 3. il donne toujours également : *t.*

XIII. M'étant ainſi aſſûré que chaque lettre étoit déterminée par l'aſſemblage de deux caracteres voiſins, il ne s'agiſſoit plus que de découvrir comment cette détermination réſultoit d'un tel aſſemblage. Or il étoit évident que la raiſon de ce réſultat ne pouvoit être que dans la figure même du groupe formé par les deux caracteres, ou dans la valeur arbitraire de chaque caractere, dont la ſomme ou la différence exprimât le nombre attribué à chaque lettre de l'alphabet.

La premiere ſuppoſition ne me paroiſſoit point vraiſemblable; 1°. parce qu'il auroit falu autant de groupes, ou de doubles caracteres pour chaque mot, que ce mot contenoit de lettres : ce qui ne ſe trouve point dans ce chifre; 2°. y ayant environ 32. caracteres différens, leur combinaiſon de deux à deux pour en former des groupes, eût donné une clé de plus de mille chifres différens pour n'exprimer que vingt & quatre lettres; ce qui rendroit un chifre très incommode. 3°. Dès que la ſignification d'une lettre ſeroit attachée à la figure du groupe, il ne devroit plus être indifférent que l'un des caracteres fut devant, ou derriere, deſſous ou deſſus l'autre, comme cela paroiſſoit l'être par les exemples de l'Article XII.

Par toutes ces raiſons je conclûs donc : que, *pour que chaque caractere pût être déterminé par celui qui le précédoit immédiatement à repréſenter une certaine lettre, & qu'il pût en même tems concourir avec le caractere ſuivant à ſignifier une autre lettre; il faloit*, puiſque chaque lettre étoit en ſoi un tout indiviſible, *ſuppoſer à chaque caractere une valeur numéraire, qui, combinée avec celle du caractere voiſin, exprimât le nombre aſſigné à chaque lettre de l'alphabet.*

XIV. Arrivé à cette concluſion, je n'eus rien de plus preſſé que de la vérifier ſur le chifre même. Je m'attendois cependant à y ren-

con-

contrer deux grands obſtacles. 1°. Je ne connoiſſois point encore la ſignification des ſignes ſupérieurs. 2°. Je ne pouvois découvrir la valeur arbitraire de chaque caractere que par le moyen du nombre attribué à chaque lettre; & je n'oſois pas eſpérer que ce nombre fût celui qui réſulte de leur ordre naturel. Pour écarter ces difficultés, je m'appliquai à chercher dans le chifre propoſé des mots où il n'y eût que peu de ſignes ſupérieurs, & pluſieurs chifres arabes qui ſe ſuiviſſent deux à deux, dans la ſuppoſition que ceux-ci retenoient leur valeur connue.

Je trouvai toutes ces conditions réunies dans le mot *Geſchicklichkeits*. J'y vis que 8. précédé de 3. deſignoit *l*: or 8 + 3 = 11. & *l* eſt l'onzieme dans l'ordre alphabetique. J'y vis enſuite 1. précédé de 8. deſigner *i*, neuviéme lettre de l'Alphabet; enfin j'y trouvai 2. précédé de 3. ſignifier *e*. cinquieme lettre dans l'ordre naturel.

XV. Parvenu à cette ouverture, le plus difficile étoit fait. J'eus bientôt la valeur de divers caracteres, à l'aide des chifres qui les accompagnoient; & ces caracteres, une fois connus, m'aiderent à fixer la valeur des autres. Toutes ces déterminations ſe confirmoient réciproquement, & il me fut aiſé d'appercevoir que le point placé ſur un chifre rendoit ſa valeur négative.

Cependant, les valeurs les mieux conſtatées ſe démentoient à l'égard de certaines lettres, telles que, *p*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x*; & j'avoue que c'eſt ce qui m'a arrêté le plus longtems. Convaincu que les lettres répondoient à leur nombre naturel depuis *a* jusqu'à *o*, il ne me venoit point dans l'eſprit que les autres pûſſent ne pas ſuivre le même ordre. L'évidence néanmoins me força à le reconnoitre. Toutes les valeurs aſſignées à mes caracteres s'accordoient à faire conſtamment, *s* = 16. excepté dans les ſeuls cas où la ſuppoſition que j'avois faite de *s* = 18, avoit ſervi à déterminer la valeur du caractere; & dans ce cas là, cette valeur donnoit des anomalies partout ailleurs où ce caractere reparoiſſoit; anomalies qui s'évanouiſſoient en poſant *s* = 16.

Je

Je fus donc obligé de recommencer ma clé, en m'assurant avant toutes choses du nombre attribué à chaque lettre de l'Alphabet; & pour ne pas m'y tromper, je ne fixai que la valeur rélative des caracteres, telle qu'elle résultoit des équations aux lettres; jusqu'à ce que le nombre assigné à chaque lettre me fut assez connu pour déterminer sans erreur la valeur absolue de ces caracteres. Je rapporterai par occasion dans l'Article XVIII. un exemple qui montrera ma méthode de procéder dans cette recherche. Je parvins ainsi à former la Table suivante de la valeur numéraire des lettres.

a = 1	*i* = 9	*r* = 15
b = 2	*k* = 10	*s* = 16
c = 3	*l* = 11	*t* = 17
d = 4	*m* = 12	*u*, & *v* = 18
e = 5	*n* = 13	*w* = 19
f = 6	*o* = 14	*x* = 23
g = 7	*p* = 21	*y* = ...
h = 8	*q* = ...	*z* = 20

XVI. Cette Table m'ayant mis en état de donner à chaque signe, (dont je connoissois la valeur rélative en lettres,) sa juste valeur numéraire, j'entrepris de déchifrer réellement chaque mot des deux échantillons, sur *la loi générale du chifre:* savoir *que la somme des valeurs de deux caracteres qui se suivent immédiatement, donne le nombre de la lettre placée sous le dernier de ces caracteres.* Mais, quoique je ne trouvasse presque aucune anomalie dans l'application de cette loi aux lettres intermédiaires & finales des mots, j'en trouvois presque partout à l'égard des deux lettres initiales de ces mots. Je dis, *presque* partout, puisque de 96 mots que le chifre proposé contient, il n'y en avoit qu'une vingtaine dont les initiales suivissent la loi générale. Cette irrégularité m'obligeant d'examiner de plus près les caracteres initiaux, m'y fit appercevoir une singularité bien remarquable: c'est

que

que depuis le mot *in*, jusqu'au mot *deterrirung*, l'auteur a affecté de ſuivre dans les neuf initiales inférieures, les neuf chifres de l'Arithmétique ſelon leur ordre naturel. Le même ordre revient enſuite en caracteres dont la valeur eſt affirmative, depuis le mot *zahl* jusqu'au mot *in;* & de là recommence encore le même ordre pour les valeurs négatives depuis *buchſtaben*, jusqu'à *ihr;* pour ne pas parler ici des 12. premiers mots, dont les ſix dernieres initiales répetent les ſix premieres dans un ordre renverſé.

Cette obſervation, jointe à la certitude que j'avois de la valeur préciſe des caracteres, me fit découvrir trois loix particulieres de ce chifre que je vais rapporter.

1 *Tout caractere initial inférieur dont la valeur eſt au deſſus de* 9. *conſerve ſa valeur conſtante.*

2. *Tout caractere initial inférieur dont la valeur affirmative eſt au deſſous de* 10. *vaut dans cette place le double de ſa valeur ordinaire.*

3. *Tout caractere initial inférieur dont la valeur négative eſt au deſſous de* 10. *vaut dans cette place le double de ſa valeur ordinaire, plus une unité.*

XVII. Je vais continuer de rapporter tout de ſuite les autres loix particulieres qui ſont, ou une ſuite da la loi générale, ou des obſervations que j'ai faites en déchifrant.

4. *Le caractere ſupérieur initial conſerve toujours ſa valeur ordinaire.*

5. *Le caractere ſupérieur ne ſert qu'a déterminer par ſa valeur la lettre immédiatement au deſſous, & nullement celle qui ſuivra à droite, à moins que le caractere inférieur ne ſoit zéro*, parce qu'en ce dernier cas le caractere ſupérieur eſt cenſé occuper la place inférieure, & par conſéquent ſuivre la loi générale.

6. *Lorſqu'au milieu d'un mot il y a un ſigne ou caractere ſupérieur, ne fut-ce qu'un point*, comme on a alors déjà deux valeurs re-

quiſes pour déterminer la lettre, *on ne joint jamais celle du caractere qui précede à gauche.* Cette loi n'a pas lieu 1°. lorsque le ſigne ſupérieur eſt + qui vaut 10. 2°. lorsque le caractere inférieur eſt zéro. 3°. lorsque le ſigne ſupérieur n'a point de valeur, c. à d. lorsque c'eſt un point qui indique ſimplement la ſouſtraction, parce que dans les deux derniers cas la raiſon de la loi ceſſe, & que dans le premier, la valeur du caractere inférieur ſeroit trop aiſément connue. Par cette même raiſon, la loi n'a pas lieu à l'égard de la finale.

7. *Un point placé ſur un caractere, qui n'eſt pas un chifre arithmétique, augmente toujours ſa valeur d'une unité.*

8. *Un point placé dans la figure d'un tel caractere, le rend ſimplement négatif, ſans rien ajouter ni diminuer à ſa valeur.*

9. *Une valeur négative ou ſouſtractive n'eſt telle que rélativement au caractere qui précede; toute valeur eſt affirmative ou additive par rapport au caractere ſuivant.* De là vient que *l'initiale inférieure eſt toujours affirmative, quoique le caractere ſoit négatif:* parce que le caractere ſupérieur n'eſt au deſſus de lui qu'à cauſe qu'il ne convenoit pas de le placer à côté.

10. Comme les lettres répondent toutes à des nombres affirmatifs, *la différence entre deux caracteres dont l'un eſt négatif, eſt toujours cenſée affirmative,* quoique la valeur du caractere négatif ſoit la plus grande.

11. *Lorsque le caractere à gauche eſt zéro, il faut ajouter la valeur de celui qui précede le zéro.*

XVIII. Après avoir déterré toutes ces Loix, il ſembloit qu'il ne devoit plus reſter la moindre difficulté; cependant je ne ſaurois diſſimuler que je me vis encore arrêté au tout premier mot; & voici pourquoi.

J'avois par le mot: *Wuſſenſchaften*, $a = 1 + 0 = 1$. Je ſavois par le mot *Mathematici*: $c = 4 - 1 = 3$. Or j'avois trou-

trouvé dans le mot *caracteren*, $6 + \nabla = a$, d'où j'avois conclu $\nabla = -5$. Ce même mot me fournissoit aussi $\nabla + \forall = c = 3$: de là j'avois tiré $\forall = -8$. Enfin, je voyois encore dans ce même mot $\forall + 9 = t$, ce qui me donnoit: $t = 17$. Jusques là tout alloit bien; & puisque, par les exemples rapportés (Art. XII.) j'avois par tout $3 + \Theta = t$; je n'avois garde de n'en pas conclure l'équation $\Theta = 14$: & trouvant dans le mot *potentaten*: $4 + \overline{\wedge} = t$, j'en tirois par le même raisonnement $\overline{\wedge} = 13$. Ces valeurs trouvées se confirmoient encore en ce que dans ce dernier mot, & ailleurs, je trouvois $\overline{\wedge}\Theta' = a = 1$. qui est la différence entre 13. & 14. Cependant ni l'une ni l'autre de ces valeurs n'étoit la vraye; & voilà, pour le dire en passant, comme deux erreurs différentes peuvent se prêter force mutuellement, & nous fermer le chemin de la vérité. J'étois si sûr de mon calcul, que quoique presque partout où l'un de ces deux caracteres revenoit, je trouvasse une anomalie, j'aimois mieux la mettre sur le compte du Copiste, que de supposer une erreur dans des déterminations si bien établies. Enfin le mot: *so*, du second exemple, me dessilla les yeux; j'y vis $\overline{\wedge} - 5 = 16$, & $\overline{\wedge} - 7 = 14$. Il étoit donc impossible de ne pas en tirer l'équation: $\overline{\wedge} = \pm 21$. d'où resultoit nécessairement celle de: $\Theta = -20$. ce qui satisfaisoit également aux deux équations trouvées. $3 + \Theta = t = 17$. & $4 + \overline{\wedge} = t = 17$. L'écart venoit de ce que je n'avois pas imaginé, que Θ, & $\overline{\wedge}$. pussent avoir des valeurs négatives.

XIX. Il est tems de passer à la clé du chifre, & d'en faire l'application aux deux exemples proposés. S'il y reste encore quelques difficultés, elles ne roulent que sur des minuties qui n'interéssent plus, & qui s'evanouiroient si l'on avoit plus d'exemples à comparer; ou peut être aussi, si ceux qu'on a, étoient plus corrects.

Jai représenté la valeur des caracteres dans la Planche IX. N°. 3. & quant aux signes supérieurs, en voici la signification: Planche IX. No. 3.

•• = 0

(ſur un caractere) = 1

(ſur un chifre précédé d'un plus grand nombre) = —•

: = — 1

— = 2

÷ = — 2

+ = 10

+ (initial) = 6. par la 4. Loi.

⊥ = 11

⊥ = •— 11

⊙ indique qu'il faut doubler la valeur du caractere inférieur.

⊙ indique qu'il faut doubler la valeur du caractere inférieur, & y ajouter l'unité. Si le caractere inférieur eſt un chifre arithmétique, précédé d'un plus petit nombre, le ſimple point tient lieu de ce ſigne ⊙, qu'on a choiſi pour les autres caracteres, apparemment par ce que le ſimple point ſur ces caracteres a déjà ſa ſignification, ſavoir l'unité. Au reſte ⊙ ſur l'initiale vaut 10. ſuivant la 4. loi.

Au ſurplus, s'il étoit poſſible qu'il reſtât encore des doutes ſur la juſteſſe de cette clé, il n'y auroit quà jetter les yeux ſur deux mots fauſſement indiqués dans l'échantillon, l'un par *translations clavis*, dans le premier exemple, & l'autre par *puncto*, dans le ſecond; ce qui, dans l'un & l'autre cas, ne donne aucun ſens; au lieu qu'en les déchifrant ſelon la clé que j'ai trouvée, le premier mot eſt: *regulmäſſigen*, & le ſecond: *wider*, comme le ſens du texte l'exige.

XX. Voici maintenant le déchifrement du premier exemple; où, pour mieux faire voir la loi du chifre, je commencerai toujours par la valeur du caractere ſupérieur.

— 2

Tab. VIII. No. 1.

—2+21. 21—20. 20—7.
w *a* *n*

—4+20. —2+5. 5+3. 3+11. 11—1+3.
s *c* *h* *o* *n*

—11+12. 12—1. 5+5+1. 5—3+3.
a *l* *l* *e*

1+11. 11—10. 10+7. ... 6+6. ... 4+10+3. 4+4+1. 4—1. 1—1+9.
m *a* *t* *e* *m* *a* *t* *i* *c* *i*

6+10. 10+4. 4—7. 7+2. 2—7. 8+8+1. —4+3. 3—20. 1+4. 4+8+1.
s *o* *c* *i* *e* *t* *a* *t* *e* *n*

—1+5. 5+0. 5+0+10.
d *e* *r*

14—5. 9—9. 9—7. 7—9. 9—4. 6—6—1.
w *u* *s* *s* *e* *n*

6+10. 10—7. 7+1. 1+0. 1+0+5. 5+12. 12—7. 7+5+1.
s *c* *h* *a* *f* *t* *e* *n*

8—10. 10—3. 3—6—7
u *n* *d*

5+11. 11-6. 6-3. 3+10+2. 2+3. 3-20. 5-4. 4+5. 5+10. 1+4. 4+3+9
s *e* *c* *r* *e* *t* *a* *i* *r* *e* *s*

—3+12. ...+3. 3—20. 1+4. 4+11. 11+10. 10+5. 5+0.
i *n* *t* *e* *r* *p* *r* *e*

5+0+10+2. 2—7. 7+2+7.
t *e* *s*

—21—20. 20—9. 9—2. —3—8. 8—7.
a *l* *l* *e* *r*

0+21. 11+3. 3-20. -4+9. 9+4. 4-21. 21-20. 20-3. 3-8. 8+1+4.
p *o* *t* *e* *n* *t* *a* *t* *e* *n*

7+2. 2+11.
i *n*

3+4. 4−3. 3+10. 10+7. 7+12+1.
g *a* *n* *t* *z*

−1+6. 6+12. 12+3. 3+11. 11+10. 10−9+0.
e *u* *r* *o* *p* *a*

7−8. 8+3. 3+8.
a *l* *l*

−1+10. 10−2. 1+7+7. 7−2. 2+2+9.
i *h* *r* *e* *n*

−5+12. 12−7. 7+9. 9−6. 6+2. 2+7. 7+3. 3+8. 8+1. 1+7.
g *e* *s* *c* *h* *i* *k* *l* *i* *h*

7+3. 3+2. 2+7. 7+10. 10+1+5.
k *e* *i* *t* *s*

−4+14. 14+1. −6+5. 5+1. 1+8+8. 8−3. 3+9+1.
k *r* *a* *f* *t* *e* *n*

4+16. 16−2+4.
z *u*

−14+18. 1+4. 4-21. -4+9. 9+6. 6+3. 3+10+2. 2-20. 20-7. 7-3+3.
d *e* *t* *e* *r* *i* *r* *u* *n* *g*

−1+5. 5+4. 4+12. 12−7. 7+..
d *i* *s* *e* *r*

14+6. .... 6+2. 2+8+1.
z *a* *h* *l*

10+

10 + 8. 8 + 5. 5 — 2 + 1:
u *n* *d*.

—7+10. 10—9. 9+6. 6—5. 5—8. 8+9. 9—4. 1+7+7. 7—2. 2+8+3.
c *a* *r* *a* *c* *t* *e* *r* *e* *n*

4+12. 12—9. 9—1. 1+10+4. 4+5. 5+1. 1+7+9
s *c* *h* *r* *i* *f* *t*

1+14. 14—9. 9—2. 2—20. 20—9. 9+3. 3—4. 4+10+2.
r *e* *g* *u* *l* *m* *a* *s*

8+8. 8+1. 1+6. 6—1. 1+3+9.
s *i* *g* *e* *n*

1+16. 16—1. 1+0. 6+6+1. 6+10. 10+1. 9+8.
t *r* *a* *n* *s* *l* *a*

8+9. 9+0. 9+0+5. 5+8. 8—2+10.
t *i* *o* *n* *s*

—9+18. 18—5.
i *n*

—5+7. 7+11. 11—8. 8+0. 8+0+8. 8+9. 9—8. 8—6. 6—1. 1+9+3
b *u* *c* *h* *s* *t* *a* *b* *e* *n*

—8+9. 9+9. . . . 9—7. 7+2. 2—7. 7+10. 10—5. 5—1+9
a *u* *f* *b* *i* *e* *t* *e* *n*

5+11. —6+9+11.
s *o*

—9+13. 13+1. —20+5. 5+1. 8+8+1. 8—7+4
d *o* *r* *f* *t* *e*

—11+15. 15—10. 10+3. 6+6+1. 6+8. 8—5. 5—2+5
d *e* *n* *n* *o* *c* *h*

— 16

— 16 + 17. 17 — 6. 6 + 1 + 4
a l l

— 10 + 19. 3 + 5. 5 + 1 + 9
i h r

— 6 + 10. 10 — 9. 9 + 6. 6 — 5. 5 + 2 + 6
d a r a n

10 + 9. 9 — 4. 4 + 9. 9 — 5. 5 + 0. 5 + 0 + 8. 8 — 4. 4 — 3 + 4
w e n d e n d e

— 20 + 8. 8 + 10. 10 — 2. 2 — 3 + 6
m u h e

11 + 7. 7 — 2. — 5 + 20. — 1 + 8. 8 + 3 . . . — 4 + 9. 9 — 1 + 5
v e r g e b e n

13 + 5. 5 + 8. 8 — 4
u n d

— 2 + 20. 20 — 8. 8 + 8. 8 + 6. 6 + 7. 7 + 9. 9 + 3 + 5
u m s o n s t

4 + 12. 12 — 7 . . . . 7 — 3 + 9.
s e i n

— 4 + 11. 11 — 6. 6 + 10. 10 + 7. 7 — 2. 2 — 10. 1 + 4. 4 + 8 + 1
g e s t e h e n

— 8 + 20. 20 — 2. 2 + 10 + 4. 4 + 12. — 9 + 4. 4 — 1 + 10.
m u s s e n

— 3 + 7. 7 — 6. 6 + 10. 10 + 2 + 4.
d a s s

— 7 + 11. 11 — 6. 6 + 10. 10 + 6. 6 — 1. 1 + 3 + 9.
d e s s e n

6 +

6 + 15. 15 + 0. 15 + 0 − 1. 1 − 5. 5 + 4. 4 + 3. 4 + 4 + 1.
p r o d i g i

4 + 10. 10 + 6. 6 − 5 + 4.
o s e

− 20 + 16. 1 + 4. 4 + 10 + 9. − 21 + 4. 4 − 9. 9 + 6. 6 + 3.
d e x t e r i

3 + 10 + 4. 4 − 5. 5 + 12.
t a t

− 2 + 11. 11 − 3. 3 + 3 + 9
i h r

− 4 + 5. 5 + 6. 6 + 5. 5 + 0. 5 + 0 + 1 + 9
a l l e r

− 10 + 8. 8 − 3. 3 − 10. 10 + 5. 5 + 4. 4 − 6 + 8.
b e g r i f

9 + 9. 9 − 7. 1 + 4. 7 + 7 + 1. 7 + 9. 9 + 8. 8 − 3. − 1 + 10. 10 − 3. 3 − 3 + 5.
u b e r s t e i g e

SECOND EXEMPLE.

Tab. IX. No. 2.

2 + 2. 2 + 7. 7 − 7 + 5.
d i e

8 + 6. 6 + 9. 9 + 0. 9 + 0 − 4. 4 + 9. 9 + 8. 8 − 7.
o r i e n t a

7 + 4. 4 + 5. 5 + 10 + 1. 1 − 4. 4 − 2 + 3.
l i s c e

12 + 7. 7 + 11. 11 + 5. 5 + 11 + 0. 11 + 0 − 6. 6 + 7.
w u s s e n

7 + 9. 9 − 6. − 2 + 10. 10 − 9. 9 − 3. 3 + 5 + 9
s c h a f t

−4+5. 5+8. 8+8. −20+3. 3−4. 8+8+1. 8−1+10.
a *n* *s* *t* *a* *t* *t*

0+4. 4−9. 9+1+5.
d *e* *r*

−6+8. 8+10. 10−7. 7+9. 9+8. −3+4. 4−2. 2−7. 7+1+5.
b *n* *c* *s* *t* *a* *b* *e* *n*

3+9. 9+0. 9+0−1+9.
m *i* *t*

10+10. 10−9. 9−1. 1+3+7.
z *a* *h* *l*

12+6. 6+7. 7−6+3
u *n* *d*

−7+10. 10−9. 9+6. 6−7. 7−4. 4−21. 1+4.
e *a* *r* *a* *c* *t* *e*

4+11. 11−6. 6−1+8
r *e* *n*

9+11. 11+7.
z *u*

5+11. 11−8. 8+0. 8+0+7. 7−2. 4+4+1. 4−2. 2−7. 7−3+9
s *c* *h* *r* *e* *i* *b* *e* *n*

10+8. 8+5. 5−8+7.
u *n* *d*

−8+12. 12−3. 3+10+3. 3−3+5,
d *i* *s* *e*

−4+13. 13+0.
i *n*

7+

7 + 12. 12 — 3. 3 — 7. 7 — 2. 2 + 4 + 9
w i d e r

— 1 + 10. 10 — 1 + 4.
i n

— 12 + 14. 14 + 4. 4 — 1. 1 + 7. 7 + 9. — 20 + 3. 3 — 4.
b u c h s t a

4 — 6. 6 — 1. 1 + 3 + 9.
b e n

5 + 15. 15 — . . + 5
x u

— 5 + 20. — 4 + 9. 9 — 6. 6 + 3. 3 + 10 + 8. 8 + 7. — 20 + 6.
r e c i p r o

6 — 3. 4 + 4 + 1. 4 + 11. 11 — 6. 6 — 2 + 9
c i r e n

— 1 + 2. 2 + 9. 9 + 7.
a l s

2 + 2. 2 — 7. 7 + 8. 8 — 3. 3 + 9 + 1.
d e r e n

0 + 4. 4 + 5. 5 + 11. 11 — 6
d i s e

14 + 2. 2 — 5. 5 + 3. 7 + 7 + 1. 7 + 2. 2 + 4. 4 + 3 + 10.
s c h r i f t

3 + 2. 2 — 11. 11 + 2
e i n

10 + 2. 2 — 20. 20 — 4. 8 + 8 + 1. 8 — 3. 3 + 3 + 9
m u s t e r

— 3 + 12. 12 + 4. 4 — 21.
i s t

2 + 16. 16 — 2. 2 + 2 + 9.
v o n

— 12 + 17. — 17 + 8. 8 + 5. 5 + 0. 5 + 0 — 1 + 9.
e i n e r

— 5 + 21. 21 — 7.
s o

7 + 14. 14 + 1. 11 + 3. 3 — 7. 7 + 2. 2 + 5. 5 + 4. 4 + 10.
p r o d i g i o

10 + 6. 6 — 11. 11 — 1 + 3.
s e n

— 12 + 16. 1 + 4. 4 + 10 + 9. 9 + 8. 8 — 3. 3 + 12. 12 — 3.
d e x t e r i

3 — 20. — 3 + 2. 2 + 5 + 10.
t a t

1 + 18. 9 — 4. 4 + 7. 7 — 4. — 2 + 10. 10 — 5.
w e l c h e

0 + 19. 19 — 5. 5 + 3. 3 + 3 + 5.
w o h l

2 + 7. 7 + 3 + 3.
i n

— 2 + 9. 9 — 8. 8 + 5. 5 + 12. 12 + 8
g a n t z

0 + 5. 5 + 10 + 3. — 20 + 5. 5 + 9. 9 + 10 + 2. 9 — 8.
e u r o p a

4 + 12. 12 — 9. — 2 + 10. 10 + 9. 9 — 4. 4 + 11.
s c h w e r .

11 + 0. 11 + 0 — 2. 2 — 5. 5 — 3 + . . .
l i c h

3 +

3 + 15. 15 — 1. 1 + 3 + 9
v o n

5 + 4. 4 — 9. 9 + 3. 3 — 4. 4 + 9. 9 — 5. 5 + 3 + 9
i e m a n d t

9 + 11. 11 + 7.
x u

— 6 + 10. 10 — 5. 8 + 8 + 1. 8 — 3. 3 + 10 + 2. 7 + 7 + 1. 7 + 2.
d e t e r r i

2 + 13 + 0. 13 + 0 — 8. 8 — 3 + 8.
r e n

XXI. J'ai laiſſé, comme on voit, une lacune aux endroits défectueux, qui ſont en très petit nombre. Si le peu d'exactitude qu'on remarque dans le texte de ce chifre permet de ſuppoſer quelques fautes dans le chifre même, il ſera très aiſé de concilier, à l'aide d'un leger changement, ces anomalies avec les loix rapportées ci-deſſus.

Pour dire en deux mots mon ſentiment ſur ce chifre; il me paroit aſſez ingénieux, & je ne doute point qu'il ne fut commode s'il n'étoit ſurchargé de loix particulieres. Il y a une bizarrerie dans l'aſſignation de la valeur des lettres alphabétiques, qui choque; & la multiplicité des loix, jointe aux divers uſages d'un même ſigne donneroit infailliblement lieu, lorsqu'on voudroit s'en ſervir, à bien des fautes d'inadvertance. L'Auteur a eu tort d'ailleurs d'annoncer cette invention d'un ton ſi haut; il eſt peu de chifres qu'on ne puiſſe déterrer dès que l'on en connoit la langue, & que les mots ſont diſtingués; à plus forte raiſon ſeront-ils déchifrables, lorsqu'on a ſi peu de ſoin d'éviter le retour des mêmes ſignes pour exprimer la même lettre, & qu'on y ajoute encore la ſignification. Enfin, puisque ce chifre rouloit ſur des valeurs numéraires, il ne devoit y entrer aucun chifre arabe, ou du moins ceux-ci devoient ne pas y conſerver leur valeur connue. Un chifre impénétrable aux yeux de toute l'Europe, devoit être mieux déguiſé.

SUR

LE SENS MORAL.

PAR M. MERIAN.

Quel eſt, dans l'eſprit de l'homme, le principe qui le porte à approuver ou à blâmer certaines actions, & qui par là rend ces actions ou moralement bonnes, ou moralement mauvaiſes?

Les Philoſophes qui ont traité cette matiere avec le plus de ſuccès, peuvent être partagés en deux claſſes. Les uns attribuent la connoiſſance du bien & du mal moral aux lumieres de l'entendement, ou de la raiſon; les autres à une ſenſation immédiate, à une eſpece de goût naturel, qu'ils ont appellé LE SENS MORAL.

Ce dernier principe, quoiqu'on en puiſſe trouver quelques veſtiges dans l'Antiquité philoſophique, n'a été mis dans tout ſon jour que dans le ſiecle où nous vivons, & par des Philoſophes Anglois. Le Lord *Shaftsbury*, ce brillant génie, cet incomparable Ecrivain, eſt le premier docteur du Sens Moral; mais il ne l'enſeigne point avec la ſéchereſſe méthodique d'un docteur: non-content de l'embellir des charmes de ſa divine éloquence, & de la ſublime poëſie de ſon ſtyle, il paroit lui-même ſi fortement affecté de ce ſens, qu'il eſt à craindre que l'on ne ſoit plûtot entrainé par ſon enthouſiaſme que convaincu par ſes raiſons. M. *Hutcheſon* aſſujettit cette doctrine à une méthode plus ſévere & plus exacte. Enfin M. *Hume* y a porté le flambeau de l'expérience, & a tâché de l'établir ſur des preuves de fait.

Je me borne ici à des queſtions, ſur leſquelles ces illuſtres Philoſophes me ſemblent avoir laiſſé quelque choſe à dire; & je réduis mon

mon Mémoire à trois articles. Dans le premier, j'examine ſi le Sens Moral peut paſſer pour un Principe philoſophique. Dans le ſecond, je le compare avec l'Amour propre; & dans le troiſieme, avec les principes de Morale fondés ſur le raiſonnement. (*).

PREMIERE PARTIE.

Qu'eſt-ce qu'un Principe philoſophique? C'eſt une propoſition générale, qui explique d'une maniere claire et intelligible les phénomenes qui y ſont ſubordonnés. Expliquer un phénomene, c'eſt aſſigner une cauſe que l'on conçoit pouvoir le produire, & dont on peut ſe former une idée nette & préciſe.

Je découvre que la différence entre le bien & le mal moral ne dépend pas du raiſonnement; j'aurai détruit un principe faux, quoique philoſophique. Je découvre de plus que cette différence dépend du ſentiment; c'eſt une vérité nouvelle. Prouver cette vérité par induction, faire voir qu'elle ſatisfait à tous les cas, c'eſt l'ériger en Principe. Mais, quand je me tromperois, ou quand tous les Moraliſtes ſe tromperoient ſur les fondemens de la Morale, cela ne fait rien à notre queſtion; car, encore une fois, il ne s'agit pas ici de ce qui eſt vrai ou faux, mais de ce qui eſt philoſophique & de ce qui ne l'eſt pas.

La Morale eſt, comme la Phyſique, fondée ſur l'Expérience & ſur l'Analogie; ſes principes ſont des phénomenes généraliſés. A' la conſidérer ſous cet aſpect, le Sens Moral me paroit un principe pour le moins auſſi philoſophique qu'aucun de ceux qui ont été employés pour rendre raiſon des changemens qui arrivent dans le monde matériel. Je ne ſais même ſi à cet égard il n'a pas quelque avantage. Le Phyſicien eſt ſouvent obligé de recourir à des cauſes qui ne ſe manifeſtent point aux ſens; & quelque plauſibles que ſoient les analogies

(*) *Je donne ici ces Mémoires, tels que je les ai écrits en 1758, & en 1759. Depuis ce tems il a paru, en Angleterre, de nouveaux ouvrages ſur le* Sens Moral, *mais dont on voit bien que je n'ai rien pu emprunter.*

logies qu'il forme, elles ne ſauroient être vérifiées par des expériences immédiates. Auſſi voit-on que ces ſortes de principes ſont ſouvent ruinés par de nouvelles découvertes, qui amenent de nouveaux principes. Ici cette difficulté s'évanouit: la queſtion peut ſe réduire à un fait dont chacun eſt en état de connoitre. Il n'y a qu'à ſonder nos coeurs, & à voir ce qui s'y paſſe lorsque nous approuvons ou blâmons les actions, les moeurs, & les caracteres.

Mais, dit-on, ce Sens Moral ne peut être analyſé par le raiſonnement; c'eſt un point où il faut s'arrêter: ce n'eſt donc pas un principe philoſophique, mais un de ces azyles de l'ignorance que la ſaine Philoſophie proſcrit, une faculté occulte, une idée innée, un inſtinct, un être de l'Ecole. Voyons ſi cette objection eſt fondée.

Lorsqu'on ſoutient que le bien & le mal moral nous ſont connus par des ſenſations immédiates, on nie qu'ils nous ſoient originairement connus par un acte de la raiſon; & ſuppoſé qu'on le nie à juſte titre, le principe que l'on établit, pour être vrai, en ſera-t-il moins philoſophique? Quand je dis que ce ſont les ſens qui me font diſtinguer le chaud du froid, le doux de l'amer, &c. m'objectera-t-on que je ne parle pas en Philoſophe, parce qu'il n'entre point de raiſonnement dans cette diſtinction? Mais c'eſt préciſément ce que je veux; le raiſonnement n'y entre point, par ce qu'il n'y doit point entrer.

Et où eſt le ſyſteme qui ſoit à l'abri de la même objection? Tous les raiſonnemens, & tous les axiomes, ſe réſolvent dans des idées ou dans des perceptions ſimples. On pourroit donc également nier de tous les ſyſtemes qu'ils ſoient bâtis ſur des principes philoſophiques, puisqu'ils s'arrêtent tôt ou tard à des idées, ou à des perceptions, qui ne ſouffrent plus d'analyſe. Dans toutes nos recherches il eſt un terme où la raiſon elle-même exige que nous ceſſions de raiſonner, parce qu'une diſcuſſion ultérieure ne peut nous conduire qu'à la confuſion & à l'erreur. Celui, par exemple, qui entreprendroit de prouver que nous diſcer-

diſcernons les qualités ſenſibles par le raiſonnement, plus il entaſſeroit de ſyllogiſmes, plus il s'éloigneroit de la vérité.

Mais ce ſentiment moral eſt une faculté occulte. . . . Le ſentiment moral eſt la faculté qui nous découvre immédiatement le bien & le mal renfermés dans les actions humaines. Qu'y a-t-il ici d'occulte? Qu'y a-t-il de plus occulte que dans le ſentiment phyſique? Je ſens avec délices le doux parfum de la roſe: je ſuis agréablement affecté d'une action généreuſe, noble, héroïque. Je ne vois pas qu'il y ait rien de plus myſtérieux dans l'un de ces cas que dans l'autre. Si l'on vouloit uſer de rétorſion, ne pourroit-on pas dire que ces prétendus raiſonnemens ſont des raiſonnemens occultes; puiſque tous les jours nous diſcernons le bien du mal, ſans les avoir préſens à l'eſprit, & ſans même les connoitre?

Mais enviſageons de plus près ces qualités, ou ces vertus occultes que la Philoſophie moderne réprouve.

Lorsqu'on demandoit aux Philoſophes de l'Ecole pourquoi l'aimant attire le fer; ils répondoient que cela ſe faiſoit par une vertu attractive, ou par une vertu ſympathique: ou c'étoit ne rien dire, ou c'étoit avouer leur ignorance: & s'ils l'euſſent entendu ainſi, la réponſe eût été très raiſonnable; car en effet, ce phénomene étoit produit par une cauſe occulte rélativement à eux. De quoi donc peut-on les reprendre? C'eſt d'avoir donné pour une explication ce qui n'en étoit pas une; c'eſt comme ſi un homme à qui je ferois une queſtion, répondoit en Arabe, *je n'en ſais rien*, & puis prétendoit avoir réſolu la queſtion.

Le cas que nous traitons eſt tout autre. Je ne m'intéreſſe au bien & au mal moral qu'en vertu de la connoiſſance que j'en ai, & autant que je puis les diſtinguer. Or l'on demande de quelle ſource me vient cette connoiſſance. Ici j'ai à opter entre le ſentiment & la raiſon; c'eſt à dire, entre deux facultés connues de mon ame; & laquelle des deux que je choiſiſſe, je puis aſſigner une fauſſe origine; mais je

n'aſſigne pas une origine occulte. La queſtion eſt analogue à celle-ci; d'où ſavez-vous que l'aimant attire le fer? Si je répons que les ſens me l'apprennent, eſt-ce parler un langage obſcur & inintelligible? Et que je diſe des qualités phyſiques, ou des qualités morales, qu'elles ſont ſenties; ne me fais-je pas également comprendre?

Le Sens Moral une fois admis, ou ſuppoſé, toutes les autres queſtions tombent d'elles-mêmes. Si l'on n'y peut point faire de réponſe, c'eſt qu'elles n'ont point de ſens, & ſont tout à fait hors du ſujet. Que demanderez-vous par exemple? Sera-ce, pourquoi nous approuvons le bien, & déſapprouvons le mal? Mais ces noms de bien & de mal n'ont été donnés qu'après coup aux actions qui nous ont inſpiré des ſentimens d'approbation & de blâme. Ce ſeroit donc demander pourquoi nous trouvons le miel doux & l'abſinthe amere. Sera-ce pourquoi nous n'approuvons pas le mal, & déſapprouvons le bien? C'eſt demander pourquoi le blanc n'eſt pas noir, où, comme dans la Comédie, pourquoi la nuit il ne fait pas jour? Pour répondre à de pareilles queſtions, on n'a pas beſoin de cauſes occultes. Le plus court eſt de n'y pas répondre.

Lorsque Descartes éleva une nouvelle Philoſophie ſur les ruines de l'Ecole, pour rendre raiſon de la formation du monde, & des phénomenes qui frappent nos ſens, il imagina des élémens, des matieres ſubtiles, des tourbillons. Perſonne ne le ſoupçonna alors d'avoir ramené dans ſa Phyſique les qualités occultes qu'il venoit de proſcrire. Ceux-même qui ont combattu ſon ſyſteme, n'ont pû nier que l'idée n'en fut très philoſophique. Et les Phyſiciens de nos jours, qui dans l'explication des phénomenes de l'aimant, de la lumiere, de l'électricité, ſuppoſent une matiere éthérée, qui ne tombe pas immédiatement ſous les ſens, ne furent jamais accuſés de parler le jargon ſcolaſtique. Auſſi ces accuſations ſeroient-elles extrémement déplacées; & pourquoi? Parce que ces hypotheſes ſont analogues au cours de la Nature, & ſe lient aux loix déjà connues. Je vois, dans le ſpectacle Lyrique, le char du Soleil qui traverſe les airs. Ce n'eſt aſſurément pas une hypo-

hypotheſe obſcure que de ſuppoſer qu'il eſt ſoutenu, pouſſé, ou tiré par des contrepoids, par des reſſorts, par des machines cachées ſous le théatre. C'eſt l'analogie qui me fait juger ainſi.

Transportons ceci dans le monde moral. Quand j'attribue la différence qui eſt entre le bien & le mal, à la ſenſation, je puis avoir tort; mais au moins je ne crée aucun nouveau principe; je ne fais qu'appliquer un principe ſuffiſamment connu, & dont l'action n'eſt pas même cachée.

Mais, inſiſte-t-on, ce ſont donc là des ſenſations innées. . . .

Je répons que le Sens Moral n'eſt pas plus inné que ne le ſont les ſens phyſiques: il eſt, comme eux, une faculté qui ſe déploye à la préſence de certains objets: & quand on ſuppoſeroit que l'Ame n'eſt d'abord qu'une table raſe, il faut toujours qu'elle puiſſe recevoir l'impreſſion des objets, comme la table reçoit les figures ou les caracteres. Qu'on rejette, tant qu'on voudra, les idées innées, on ne peut nier au moins que l'ame ne ſorte des mains du Créateur avec la faculté de ſentir, puisqu'autrement elle n'auroit jamais de ſenſation.

Enfin, l'on penſe avoir détruit le Sens Moral en lui donnant le nom d'*Inſtinct*, nom décrié parmi les Philoſophes. Mais l'eſt-il à juſte titre? Et ce que l'on y ſubſtitue eſt-il beaucoup plus lumineux? On le change contre celui de *Force*, & l'on croit avoir fait merveille. Mais où ſeroit le grand mal de l'appeller *Sens*, mot plus intelligible encore que celui de force, & plus analogue à ce que nous connoiſſons de l'économie de l'eſprit humain?

Quand on voit exécuter aux animaux, & à l'homme même, certaines opérations régulieres, dont on ne peut placer l'origine dans la raiſon, quel inconvénient y auroit-il de ſe ſervir du terme d'*Inſtinct*; pourvu que ce terme ne déſigne alors que le phénomene, à peu près comme celui d'Attraction dans la Phyſique Newtonienne? Cependant rien ne nous oblige ici de recourir à ce terme. Nous fondons la

Morale ſur des ſenſations immédiates; & perſonne n'ignore ce que c'eſt que ſentir.

La vérité eſt qu'en Morale, tout comme en Phyſique, il faut s'arrêter à certaines limites, que l'eſprit humain ne ſauroit franchir. Après avoir obſervé les faits particuliers, & les caracteres qui leur ſont communs, on les raſſemble ſous des notions générales, que l'on érige en principes. Telle eſt, par exemple, la peſanteur, ou la Gravitation univerſelle; & quand on refuſe cette force à la matiere, on ſe trouve arrêté à la force d'impulſion: & quand on veut aller plus loin, on ſe trouve arrêté à quelque autre force. Le Philoſophe a fait ſon devoir, lorsqu'il eſt parvenu à ſubordonner les phénomenes particuliers à un phénomene général, analogue au cours de la nature, & applicable dans les détails; trop heureux encore, s'il y peut réuſſir! Je dirois même qu'il y a plus de Philoſophie à ſavoir ſe borner aux notions claires, que l'expérience confirme, qu'à ſe perdre dans des ſubtilités placées trop loin de nous. On ſe fait, il eſt vrai, des principes plus étendus; mais, paſſé un certain point, plus un principe s'étend, plus il devient vague & obſcur. Quand l'eſprit ſyſtématique nous a emporté au delà d'une certaine région, il nous laiſſe dans les ténébres. Le Sage s'arrête au terme qui ſépare les ténebres de la lumiere.

SECONDE PARTIE.

La Nature a attaché le plaiſir & la peine à certaines perceptions de mon ame. Parmi ces perceptions, les unes ſe rapportent à mon corps, & m'avertiſſent de ce qui tend à le conſerver ou à le détruire. D'autres me peignent les beautés de la Nature & de l'Art. D'autres enfin me font diſtinguer le bien & le mal qui eſt dans les actions, dans les moeurs, & dans les caracteres des hommes. Ces dernieres ſont l'objet du Sens Moral.

Le Sens Moral ne produit donc, ni une ſeche approbation, ni une ſimple idée d'approbation ou de blâme, comme M. Hutcheſon ſemble quelquefois s'exprimer. C'eſt le plaiſir & la peine qui me font approuver

prouver & condamner. Juger une action bonne ou mauvaiſe, c'eſt en être, agréablement, ou désagréablement, affecté. Voilà en quoi conſiſte le jugement moral, & le langage du coeur. Si, à la vue d'une action, mon ame demeure immobile & ſans s'ébranler, cette action me paroit indifférente. Si elle me cauſe un ſentiment agréable, elle me paroit bonne; & mauvaiſe, ſi elle me cauſe un ſentiment contraire; l'un & l'autre à proportion de l'intenſité du ſentiment.

Nous n'approuvons & nous n'aimons la vertu que parce que ſa contemplation nous donne du plaiſir; & faut-il s'en étonner? Ce plaiſir, & l'approbation ou l'amour, ſont exactement la même choſe. Si l'on appelle ceci amour propre, ou amour intéreſſé, il eſt ſûr que le parfait désintéreſſement eſt impoſſible; & ſi impoſſible qu'on ne peut pas même s'en former l'idée. Ce ſeroit prétendre que l'on aimât & que l'on n'aimât pas, ou que tout à la fois l'on aimât & haît le même objet.

Mais ne ſeroit-il pas ridicule de dire que je trouve le miel doux, parce qu'il eſt de mon intérêt de le trouver ainſi? Il n'eſt pas moins ridicule de ſoutenir que nous trouvons la vertu aimable, parce que notre intérêt exige qu'elle le ſoit. Outre que cela eſt bien éloigné d'être généralement vrai; ſuis je donc le maitre de déterminer les impreſſions que les objets doivent faire ſur mon eſprit? Aſſurément, ſi cela dépendoit de moi, je trouverois la coloquinte auſſi douce que le miel, & le vinaigre auſſi bon que le vin de Champagne. Je ſerois agréablement affecté de tous les objets; & ma vie entiere ſeroit un tiſſu de ſenſations délicieuſes.

Il eſt donc abſurde d'attribuer à des vues intéreſſées ce goût naturel qui me fait approuver la vertu & blâmer le vice. C'eſt un goût primitif, qui précede toute ſorte de vues & de réflexions. Le plaiſir & la peine qui conſtituent ſon eſſence, ne naiſſent point après avoir réfléchi ſur ce qui nous eſt utile ou nuiſible. Ils nous préviennent, ils s'élevent en nous, indépendamment de toute conſidération perſonelle, de tout retour ſur nous-mêmes.

Pour ſe convaincre que le bien & le mal moral nous frappent auſſi immédiatement que le bien & le mal phyſique, il n'y a qu'à conſidérer les cas où ces deux ſortes de biens & de maux ſont en conflit. Nous aimons la vertu malheureuſe, quoique nous n'aimions pas le malheur. Nous détestons le crime fortuné, quoique nous n'ayons aucune averſion pour les biens dont il eſt accompagné. Il y a plus: il ſemble que le crime en devienne plus noir à nos yeux, à meſure que la Fortune y répand ſes faveurs; & au contraire, la Vertu inébranlable au milieu des revers eſt le plus beau de tous les ſpectacles, un ſpectacle digne, comme l'a dit Séneque, d'attirer les regards complaiſans de la Divinité. Cela fait clairement voir qu'il eſt un plaiſir immédiat, attaché à la contemplation du bien moral; je dis un plaiſir indépendant de tout motif, de toute circonſtance étrangere; & que la Vertu n'eſt pas un vain nom.

Voici de nouveaux exemples de ce conflit, qui prouvent la même choſe. Qu'eſt ce que ces remords qui viennent allarmer le fortuné coupable dans l'yvreſſe même du plaiſir, & cette ſérénité de conſcience qui raſſure l'honnête homme dans le ſein de l'adverſité? C'eſt encore le Sentiment Moral, qui contredit, pour ainſi parler, le ſentiment phyſique, & redreſſe, en quelque façon, la diſtribution inégale des biens & des maux de la vie, & le déſordre apparent des événemens de ce monde. Preuve manifeſte que le Sens Moral exiſte, & agit par lui-même, & que ce principe n'eſt ſubordonné ni à l'amour propre, ni à aucun autre principe.

Je conviens que tout homme qui raiſonne juſte, & qui ſait calculer les ſuites de ſes actions, préférera la vertu au vice: il verra que ſur le tout l'homme de bien eſt plus heureux que le méchant. Cependant le Sens Moral n'a rien de commun avec ce calcul. Il exiſte avant qu'on ait calculé; il influe ſur ceux qui ne calculent point, ſur ceux-même qui croiroient ce calcul faux, & à qui leur Arithmétique donneroit un réſultat différent ou contraire.

Sup-

Suppoſons un homme entierement dépourvû de ce goût naturel que nous appellons le Sens Moral; mais qui, après avoir fait une juſte eſtimation des biens & des maux qui réſultent de la différente conduite des hommes, ſe détermineroit pour une conduite honnête, comme étant le parti le plus ſage qu'il puiſſe prendre. Cet homme, ſans doute, agit par des vues intéréſſées; il ne recherche que les récompenſes attachées à la vertu; il pourroit haïr la vertu, & la ſuivre, comme nous avalons une médecine désagréable pour le bien de notre ſanté. Cet homme eſt-il vertueux? Il s'en faut bien. Cet homme aime-t-il la vertu? Non; l'Amour intéreſſé ne porte qu'abuſivement le nom d'amour. Cet homme n'aime-t-il rien du tout? Eſt-il incapable d'aimer? Il en eſt très capable, & il aime en effet les avantages phyſiques, & les agrémens qui découlent de l'obſervation des regles qu'il s'eſt preſcrites, & il les aime d'un amour très pur & très déſintéreſſé; il les aime pour eux-mêmes; il ſe les propoſe pour derniere fin, pour la fin où la conduite qu'il tient doit le faire parvenir.

C'eſt une grande erreur que de penſer qu'il n'y a que la vertu que l'on puiſſe aimer pour elle-même. Ou plutôt toute cette diſpute ſur l'amour pur & ſur l'amour intéreſſé, eſt remplie d'équivoques & de malentendus. Nous aimons pour eux-mêmes tous les objets dont la contemplation ou la jouiſſance excite en nous un plaiſir immédiat; car c'eſt dans ce plaiſir même que l'amour conſiſte. C'eſt ainſi que nous aimons les objets qui flattent nos ſens; c'eſt ainſi encore que nous approuvons & que nous aimons la vertu. Et c'eſt ce que vouloient dire les Anciens en diſant qu'elle eſt ſa propre récompenſe. Si elle a déjà tant de charmes lorsque nous la contemplons hors de nous; de quelles délices ne doit-elle pas inonder nos coeurs, lorsque nous pouvons la contempler en nous-mêmes? Avouons cependant que quelques uns de ces Philoſophes, les Stoïciens ſurtout, outroient cette maxime. Selon eux, la ſatisfaction interne dont le Sage jouit, le rend inſenſible à tous les maux: les tourmens les plus horribles ne ſauroient troubler ſa félicité; il ne ceſſe pas d'être heureux dans le taureau même de Phalaris. Des opinions auſſi extravagantes

gantes ne valent pas la peine d'être réfutées. J'aimerois autant dire à un homme en proye aux douleurs aigues de la goutte ou de la gravelle; promenez vos yeux ſur ce payſage riant, voyez ce beau tableau, & vous ſerez guéri. Le ſentiment de la beauté morale, comme celui de la beauté phyſique, ne donne qu'un degré de plaiſir, qui peut être balancé, effacé même, & réduit à une quantité négative, par des peines prépondérantes.

J'ai nommé indifféremment approbation & amour ces ſentimens qui nous font connoître le bien moral; parce que toute approbation ſentie eſt en effet un degré d'amour, ou ſi l'on veut, un élément de l'amour. Quoique cette approbation & cet amour ne ſoient pas la vertu même, ce ſont pourtant des affections louables, des tendances vers la vertu.

Ici ſe préſente une conſéquence qui paroit d'abord aſſez ſinguliere, mais qui n'en eſt pas moins juſte. C'eſt que cet amour pur de la vertu, qui paſſe pour une choſe ſi difficile, pour le dernier degré de la perfection myſtique, & chez bien des gens pour une pure chimere; que cet amour, dis-je, eſt la choſe du monde la plus ordinaire, & la plus naturelle. Chaque ſenſation morale eſt une acte d'amour pur, où, ſans y chercher aucun profit, ſans aucune vue mercenaire, notre ame découvre ſon affection pour le bien à cauſe du bien, où elle chérit la vertu à cauſe d'elle-même.

Direz-vous qu'elle ne la chérit qu'à cauſe du plaiſir qu'il y a à la chérir? Mais nous avons vû que ce plaiſir & cet amour ne ſont pas deux choſes différentes. Elle ne ſe dit point: je m'en vais aimer la vertu pour avoir du plaiſir; car il ne tient pas à elle d'aimer ou de n'aimer pas. Voir le bien, & ſentir ce plaiſir approbateur, c'eſt un ſeul & même acte. Or je défie le Myſtique le plus abſorbé dans la vie intérieure, de concevoir un amour plus pur. Que dis je? C'eſt ici le ſeul amour poſſible. Les hommes, les Anges, Dieu-même, ne ſauroient aimer autrement.

Je

Je vais plus loin, & je demande, s'il ſe peut un amour plus pur que celui qui ſe termine dans l'objet aimé, ſans ſe propoſer aucun avantage à acquérir par le moyen de cet objet? Combien donc n'eſt pas déſintéreſſée l'affection de la plûpart des hommes pour la vertu? Ils l'aiment ſans la pratiquer. Les plus vicieux ne ſauroient refuſer leur approbation, leur eſtime, leur admiration même, à des traits d'humanité, de généroſité, de grandeur d'ame, dont ils ne ſe ſentent pas capables. On ne peut leur ſoupçonner aucun des motifs que l'on pourroit ſoupçonner à un homme de bien. Ainſi les plus grands ſcélérats ſeroient ceux qui approuvent, & qui aiment la vertu avec le plus de déſintéreſſement.

Mais, en effet ce déſintéreſſement eſt égal chez tous les hommes; & il n'y a aucun mérite à cela: il n'y a pas plus de mérite, dis-je, à approuver la vertu, & à blâmer le vice, qu'à préférer le doux à l'amer, à avoir faim & ſoif, & à ſentir les autres mouvemens de la nature. Les ſenſations ne ſont point ſoumiſes à l'empire de la volonté: nous les éprouvons néceſſairement à la préſence des objets propres à les faire naitre.

Rien donc de plus frivole que ces diſputes embrouillées ſur l'amour pur, & ſur l'amour intéreſſé. Pluſieurs Moraliſtes ont regardé le déſintéreſſement comme le caractere diſtinctif des affections honnêtes. Mais, de quelque maniere qu'ils définiſſent l'intéreſt & le déſintéreſſement, on trouve également le premier dans les affections les plus honnêtes, & le ſecond dans les affections les plus deshonnêtes. On peut faire voir que la bienveillance & la haine ſont également intéreſſées ou déſintéreſſées, dans tous les ſens que l'on voudra attacher à ces expreſſions. Les paſſions les plus brutales & les plus vicieuſes ne ſont pas plus réfléchies, que les affections les plus douces & les plus louables. On ne ſe paſſionne pas dans la vue d'augmenter ſon bonheur, en aſſouviſſant ſa paſſion. Tout au contraire, le plaiſir que l'on y trouve, n'en eſt un qu'autant que la paſſion préexiſte; c'eſt elle ſeule qui le détermine à être plaiſir. Qui eſt-ce qui d'un eſprit calme déſireroit de

voir couler le ſang humain? Et ſi on pouvoit ſe donner cet affreux déſir, où eſt l'homme qui ſe le donneroit, ou qui crût y gagner en ſe le donnant?.

Enfin l'amour propre, ſi l'on entend par là ce ſentiment naturel qui veillant à notre conſervation nous fait rechercher le bien & fuir le mal phyſique, n'eſt ni un principe vicieux, ni oppoſé au Sens Moral. La ſeule différence entre ces deux principes, c'eſt que le premier ſemble tendre plus directement au bien de l'individu, & l'autre au bien de l'eſpece. Mais qu'eſt ce que le bien de l'eſpece? La ſomme du bien dont jouiſſent les individus qui la compoſent. Le bonheur de l'eſpece réſulte du bonheur des individus, & reflue ſur eux. Que chaque individu cherche ſon véritable bien; l'eſpece ſera heureuſe. Que l'eſpece ſoit heureuſe, les individus le ſeront auſſi. Ici donc l'amour propre, & le Sens Moral, loin de ſe combattre, ſont deux principes qui concourent au même but. L'amour propre ne dégénere en vice, & ne contrarie le Sens Moral, que lorsque corrompu par des paſſions qui préſentent de fauſſes idées de bonheur, il cherche le bien particulier aux dépens du bien général. Et ceci au fond n'eſt qu'un faux amour propre, ou un amour propre mal-entendu.

TROISIEME PARTIE.

Il me reſte à comparer la Morale du Sentiment avec la Morale raiſonnée.

Ce que je vois d'abord, c'eſt qu'il n'y a, entre ces deux Morales, aucune oppoſition, quant aux préceptes, ou à la doctrine. Elles preſcrivent les mêmes devoirs, elles établiſſent les mêmes regles de conduite. Soyez juſte, humain, bienfaiſant: c'eſt une voix qui ſort du tribunal de la raiſon, auſſi-bien que du fond de mon coeur.

Le même probleme admet pluſieurs ſolutions. Il ne répugne point qu'une vérité ſentie ſoit encore connue par le raiſonnement. Nos ſens ne découvrent-ils pas des phénomenes que le Phyſicien qui

a médité la nature & les propriétés des corps, apperçoit dans leurs cauſes, & que ſouvent il prévoit avant de les voir?

Le Sens Moral approuve immédiatement une certaine action. Vous me démontrez que cette action eſt conforme à la convenance des choſes, à la raiſon éternelle, à la perfection de l'Univers, à la volonté du ſupreme Légiſlateur, à l'amour propre bien entendu. Ce n'eſt que la même vérité, préſentée ſous différentes faces: & il eſt très agréable de ſe convaincre que notre goût primordial s'accorde ſi bien avec la raiſon, avec la perfection, avec la volonté divine, & avec notre véritable intérêt.

Il n'eſt point de ſyſteme de Morale avec lequel, par rapport aux conſéquences pratiques, notre principe ne puiſſe s'accommoder; l'on diroit presque qu'il eſt l'abrégé, ou une eſpece de concentration de ces ſyſtemes. Je ne compte point ici ces doctrines abſurdes, fondées ſur la ſuppoſition que tous les hommes ſe haïſſent naturellement, que l'état de Nature eſt une guerre de tous contre tous, qu'il n'y a entre la vertu & le vice qu'une différence arbitraire, & que la Morale eſt la fille de la Politique. Ces maximes révoltent la raiſon, auſſi-bien que le ſentiment; ce ſont des blaſphemes contre l'humanité.

Mais quelle eſt, dans notre eſprit, la premiere ſource de la Moralité? D'où nous vient à tous la connoiſſance originaire du bien & du mal moral? Comment la Nature nous inſtruit-elle de nos devoirs? Ici les Philoſophes que j'ai en vue, ſoutiennent que cette connoiſſance ne peut s'acquérir que par l'uſage de la raiſon, ou par une opération de l'Entendement. Les uns vous diront qu'il faut enviſager les différentes rélations des objets; les autres qu'il faut réfléchir ſur ce qui contribue à notre perfection. Un Ecrivain fort ingénieux (*) a réduit toute la différence morale au menſonge & à la vérité. Quelques uns l'ont cherchée dans une volonté arbitraire de Dieu, ce qui eſt une erreur groſſiere; d'autres dans la volonté de Dieu réglée ſur ſon entendement, ce qui retombe dans les principes dont nous venons de parler.

(*) *Wollaſton.*

ler. Ceux qui ont remonté le moins haut, ont pris pour baſe le bonheur & le malheur, c'eſt à dire, ce bonheur & ce malheur poſitif qui reſte après la compenſation des maux par les biens & des biens par les maux.

Ce ſont ces ſortes de principes que j'appelle raiſonnés, ou intellectuels. Ils tiennent tous d'aſſez près les uns aux autres; & leur différence ne conſiſte peut-être que dans le plus ou le moins d'abſtraction. Mais notre tâche, c'eſt de les comparer avec le Sens Moral, auquel ils ſont tous également oppoſés entant que principes.

Je ne ſaurois, je l'avoue, me perſuader que ce ſoit aucun de ces principes qui détermine nos jugemens moraux. Il me ſemble que nous approuvons & déſapprouvons immédiatement les actions, les moeurs, & les caracteres, auſſi-tôt qu'ils paroiſſent devant nous, ou qu'ils nous ſont repréſentés. Seroit-il poſſible que le jugement moral ne ſe trouvât qu'au bout d'une chaine de raiſonnemens dépendante d'un principe abſtrait? Le peuple ignore abſolument, & ces principes, & l'art d'en tirer des conſéquences. Le Philoſophe, qui les invente, ou qui les étudie, ne les applique jamais dans l'occaſion; il eſt auſſi immédiatement frappé du bien & du mal moral que le reſte des hommes: & quand il ſe propoſeroit de faire uſage de ces notions abſtraites, il n'en a pas le tems; avant qu'il les ait arrangées, le ſentiment a déjà décidé.

Croira-t-on en effet, que la Nature, qui nous avertit, par des ſenſations immédiates, des biens & des maux phyſiques, ait placé ſi loin de nous la connoiſſance du bien & du mal moral; qu'elle prenne tant de détours pour nous en inſtruire; qu'elle en ait attaché la découverte à de pénibles méditations, aux ſubtilités de la Philoſophie, à une Dialectique litigieuſe? Je n'aurois point de peine à le croire, ſi c'étoient là des queſtions de ſimple curioſité, ou du moins d'une utilité fort éloignée. Il eſt aſſez dans l'ordre qu'elle nous faſſe acheter ces ſortes de Sciences par la recherche & le travail. Mais la Science la plus importante, la plus indiſpenſablement néceſſaire à tous les hommes, ſans laquelle il n'y a point de vrais biens dans la vie, ne ſeroit-elle

elle qu'à la portée de quelques ſpéculateurs? Cela eſt ſi peu naturel, ſi contraire à l'expérience, que je ne crois pas que perſonne puiſſe ſérieuſement le ſoutenir.

Si tous les hommes, ſans en excepter les plus dépravés & les plus barbares, donnent des indices d'une connoiſſance du bien & du mal; ſi l'on en trouve des traces jusques dans les enfans & dans les animaux, je ne vois pas de quel droit on peut attribuer ces connoiſſances au raiſonnement. D'ailleurs, les principes raiſonnés dont nous avons fait l'énumeration different entr'eux; & quoique peut-être on parvienne à les concilier jusqu'à un certain point, ils ne ſont pourtant pas les mêmes. Comment donc ſe pourroit-il que des principes qui ne ſont pas même communs à tous les Philoſophes, fuſſent communs à tous les hommes?

Ceux qui ont ſenti les inconvéniens qu'il y a à placer la ſource de la doctrine des Moeurs dans un raiſonnement en forme, appuyé d'un principe abſtrait, n'ont pourtant pas cru devoir la chercher hors de l'entendement. Ils ſe ſont reſtraints à la vue immédiate. Notre entendement, ont-ils dit, voit la convenance, ou la diſconvenance des actions, auſſi évidemment & auſſi promptement qu'il voit qu'une ligne a deux bouts, ou qu'un triangle a trois angles.

Cette opinion eſt plus plauſible, elle a quelques difficultés de moins que la précédente. Cependant il en reſte encore aſſez contre l'une & l'autre.

Eſt-il vrai que la connoiſſance du bien & du mal moral ſe borne à un acte intellectuel, & ne conſiſte que dans un ſec raiſonnement, ou dans une ſtérile intuition? En conſidérant une figure, en liſant un axiome, ou en ſuivant le développement d'une propoſition de Géométrie; ſuis-je affecté de la même façon que lorsque je vois exercer une acte de bienfaiſance & d'humanité, ou même, lorsque j'en entens le ſimple récit? Si dans ces deux rencontres votre eſprit ſe trouve dans la même aſſiette, je conviens que nous n'avez point de ſenſation morale; mais je doute fort que vous ayez des moeurs.

Je demande, en un mot, ſi la vue intellectuelle qui diſcerne le bien du mal, eſt accompagnée ou ſuivie d'un ſentiment. Le nier, ce n'eſt pas ſeulement contredire l'expérience uniforme du genre humain, & démentir l'hiſtoire de tous les tems, & de tous les peuples; c'eſt détruire la Morale de fond en comble, en la réduiſant à une froide ſpéculation. Les vérités purement intellectuelles ne ſont pas obligatoires. Quand je concevrois toutes les propriétés du cercle, je ne ſuis pas obligé pour cela de faire des cercles: quand je ſais que la ligne droite eſt la plus courte entre deux points; cela ne m'empêchera point de décrire des courbes. Je vois un homme qui va ſe noyer, ſans rien ſentir à cette vue; je le laiſſerai périr ſans remords. Qu'eſt-ce en effet qui m'engagera à le ſecourir? Sera-ce l'aptitude phyſique de ma main à le tirer de l'eau? Mais ma main a la même aptitude à demeurer immobile; elle en a une autre pour le plonger? Sera-ce quelque convenance abſtraite ou métaphyſique? Je ne le conçois gueres, mais je veux que cela ſoit: qu'en arrivera-t-il? J'aurai une vérité éternelle dans l'eſprit: mais cette vérité ne ſera pas un motif. Il en ſera comme ſi je me diſois; deux & deux ſont quatre.

Deux exemples, empruntés d'un Philoſophe célebre, mettront ceci dans un plus grand jour.

Un jeune rejetton, dit ce Philoſophe, qui en dérobant la ſeve à l'arbre dont il eſt ſorti, le fait deſſécher, eſt préciſément dans le cas de Néron, lorsqu'il fit mourir Agrippine. Et cela eſt très vrai, en ſuppoſant que la Morale ne conſiſte que dans des rapports abſtraits, qui ſont ici les mêmes.

Je ſauve la vie à un homme; cet homme me plonge le poignard dans le ſein. Quel rapport y a-t-il entre ces deux actions? Celui de contrariété; ce ſont deux actions contraires. Mais ſuppoſons que je rende un ſervice ſignalé à celui qui m'a fait une injure atroce. Il y a ici le même rapport de contrariété. Cependant la premiere de ces actions eſt déteſtable, & la ſeconde un effort ſublime de vertu. Ce n'eſt

n'eſt donc pas le rapport métaphyſique, mais le ſentiment moral, qui en fait la différence.

Si ce ſentiment nous manquoit, toutes les vérités de pratique ne ſeroient plus que des vérités ſpéculatives, & l'inaction ſeroit le moindre mal qu'il y auroit à en appréhender. Une vérité abſtraite eſt une foible digue contre les attraits du plaiſir ſenſuel, & contre le torrent des paſſions. Vous venez de lire douze volumes de Morale, où toutes les vertus & tous les vices ſont traités par chapitres, & ſyſtématiquement démontrés. Vous en ſentez-vous plus de diſpoſition à la vertu? C'eſt beaucoup ſi cette lecture ne vous en a point dégoûté. L'amour de la vertu ne s'enſeigne pas; pour ſe faire aimer, elle n'a qu'à paroitre: le germe du bien eſt dans tous les cœurs; mais la ſpéculation ne va point jusques-là: il faut quelque choſe de plus pour le faire éclorre. Qu'un Orateur diſſerte froidement ſur les mœurs; qu'il analyſe & prouve tous nos devoirs. Peut-être conviendrons-nous en baaillant qu'il a raiſon; mais ſon diſcours ne fera pas la moindre impreſſion ſur nous. C'eſt bien autre choſe, lorsqu'on nous peint, de ſes vraies couleurs, la beauté céleſte de la vertu, lorsque dans de grands exemples on nous la montre comme perſonnifiée, lorsqu'on nous préſente de ces modeles divins où elle brille dans tout ſon éclat. Quel effet ne fait point ſur la ſcene la vertu miſe en action!

Voyez à nos ſpectacles,

Quand on peint quelque trait de candeur, de bonté,
Où brille, en tout ſon jour, la tendre humanité:
Tous les cœurs ſont remplis d'une volupté pure,
Et c'eſt là qu'on entend le cri de la Nature.

C'eſt le langage d'un excellent Poëte, qui par dévotion vient de renoncer au Théatre, & que ces vers devroient y rappeller.

Mais cette approbation unanime, ces larmes délicieuſes, ce cri de la Nature, ne partent-ils pas du ſentiment? Ne prouvent-ils pas que

que c'eſt le ſentiment qui juge du bien & du mal moral, que le goût pour la vertu eſt dans tous les eſprits, qu'il dépend, comme tous les autres goûts, du degré de ſenſibilité, & s'enflamme à la vue des grands modeles.

Ne cherchons donc la ſource de la doctrine des Mœurs, ni dans une Raiſon qui argumente, ni dans une Intuition dénuée de ſentiment.

Mais ne pourroit-on pas conſerver l'intuition, en la combinant avec la ſenſation; en ſorte qu'il en réſultât des opérations mixtes, compoſées d'un côté de vues intellectuelles, & de l'autre de ſentimens agréables ou déſagréables?

Il eſt hors de doute que cela rapprocheroit de bien près les deux ſortes de principes que nous comparons. On ne ſauroit nier que les phénomenes du Sens Moral ne réſultent de la conſtitution des objets extérieurs, & de cette rélation, tant entr'eux qu'avec nous, qui les rend propres à nous affecter d'une certaine façon. Il ne reſteroit donc qu'à décider, ſi nous appercevons cette conſtitution des objets, & ces rapports, dans le tems que nous éprouvons le ſentiment moral? Or je laiſſe cette déciſion à l'expérience d'un chacun.

Il eſt des Philoſophes qui penſent que les notions abſtraites, à force de les répéter, & de nous familiariſer avec elles, peuvent ſe changer en ſenſations. Voilà pourquoi ils nous recommandent la méditation aſſidue des principes abſtraits de la Morale: l'habitude que nous aurons contractée de concevoir promptement ces principes, & de parcourir, d'un clin d'œil, toute la chaine des conſéquences, formera en nous ce tact ſpirituel qui fait presque immédiatement diſtinguer le bien du mal.

Cette idée eſt très belle. Elle paroit expliquer l'origine ou la formation du ſens moral, en même tems qu'elle le fait rentrer dans la claſſe des facultés intellectuelles. Il me ſemble que, dans cette hypotheſe, on pourroit encore rendre raiſon du plaiſir ou de la peine qui accom-

accompagnent nos ſenſations morales. Ces plaiſirs & ces peines étoient peut-être attachés ſéparément à chacune des vues abſtraites qui entrent dans le jugement moral. Or, comme ces vues y ſuccedent l'une à l'autre avec beaucoup de rapidité, ces ſentimens épars ſe raſſemblent, & ſe pelotonnent, pour ainſi dire, dans le ſentiment total: & c'eſt probablement ce qui en fait la vivacité.

Cette Théorie ne détruit point le Sens Moral; elle ne fait que le réſoudre dans un principe ſupérieur: & comme elle réſout dans le même principe le ſentiment du Beau, & jusques aux ſens phyſiques, elle laiſſe aux ſenſations morales la même place dans notre eſprit qu'elle accorde à toute autre ſenſation. Car on ſait que, dans ce ſyſteme, toute perception où les principes, les rapports, les idées abſtraites, ſont envelopés d'une maniere confuſe ou obſcure, revient également à ce que nous appellons ſentir.

Cependant il ſe préſente ici quelques doutes. Et d'abord, il paroit que ce n'eſt que par l'uſage & par l'exercice que nous pourrions acquérir le Sens Moral, & apprendre à y convertir nos notions abſtraites: ce qui s'écarteroit de l'analogie des autres ſens, & de la marche ordinaire de l'eſprit humain, qui des ſenſations s'éleve aux idées intellectuelles; au lieu qu'on le fait ici deſcendre des idées intellectuelles aux ſenſations. Cela ſuppoſeroit donc des principes, des axiomes généraux, que nous n'aurions point obtenus par la généraliſation; des idées abſtraites qui ne ſeroient abſtraites de rien, qui exiſteroient en nous indépendamment de l'impreſſion, tant des ſens extérieurs que du ſens interne, & même avant cette impreſſion: ou, s'il faut tout dire, cela ſuppoſeroit des idées innées.

D'un autre côté, il ſemble qu'il faudroit beaucoup rabattre de l'univerſalité de notre principe. Il ne ſeroit gueres acceſſible qu'aux ſpéculateurs; il n'y auroit que les Philoſophes qui, à force de méditer ſur les abſtractions, apprendroient à ſentir. Au moins faudroit-il leur attribuer un degré fort ſupérieur de ſenſibilité morale; & je crains que ce ne ſoit le contraire. A meſure qu'on ſubtiliſe la Morale, &

qu'on la délaye dans les abſtractions, le ſentiment s'émouſſe: on s'accoûtume peu à peu à ne regarder la Vertu que comme un objet de ſpéculation. De là naiſſent le relâchement & l'indifférence; ou du moins n'eſt-ce plus le même zele, ni la même ardeur pour la pratique de nos devoirs. Ce n'eſt gueres dans l'école des Métaphyſiciens que ſe ſont formés ces héros de morale, ces eſprits embraſés de l'amour de la Vertu au point de lui ſacrifier tout autre intérêt, & de prodiguer pour elle leurs biens, leur ſang, & leur vie. Mais c'eſt de quoi je me propoſe de traiter plus amplement dans un Diſcours ſur l'Enthouſiasme Moral.

Enfin, les docteurs du Sens Moral ne reconnoitront jamais cette converſion d'idées intellectuelles en ſentiment. Ils prétendent, au contraire, que les principes de la Morale raiſonnée ne ſont que des abſtractions de la Morale ſentie; qu'ils ne ſont que le Sens Moral réduit en Métaphyſique. Ils ſe ſervent d'une fiction. Suppoſons, diſent-ils, que tout fût à rebours, que le ſentiment interne approuvât ce qu'il condamne, & blâmât ce qu'il approuve: il y a toute apparence que la faculté abſtractive ſe feroit une Morale diamétralement oppoſée à celle que nous avons. On ſe trompe en attribuant originairement à la Raiſon, ou à l'Intellect, des opérations qu'ils ne font, pour ainſi dire, que quinteſſencier. Telles ſont peut-être les notions du beau & du difforme, du parfait & de l'imparfait, du bien & du mal; qui d'abord ne ſont en nous que le plaiſir & la peine attachés à la vue de certains objets, ou de certaines actions, & dont enſuite on fait des idées en les généraliſant. On peut ſans doute rechercher après coup, pourquoi ces choſes nous plaiſent ou déplaiſent, & y découvrir certaines circonſtances communes, que nous appellerons convenance, beauté, perfection &c. Mais, ce qui eſt plus vrai encore, c'eſt que le ſentiment nous conduit à ces généralités, & non ces généralités au ſentiment.

L'Objection la plus forte que je connoiſſe contre le Sens Moral, & que je ne diſſimulerai point, c'eſt celle-ci.

Si la Morale n'eſt qu'une affaire de ſentiment, ou de goût, elle pourroit fort bien n'être appropriée qu'à notre eſpece; & qui ſait même ſi elle eſt commune à l'eſpece entiere? Alors que devient l'éternité des Loix de la Nature?

Tâchons de traiter, avec une ſobriété philoſophique, des matieres auſſi délicates, & j'oſe le dire, des matieres auſſi reſpectables.

Lorsque, dans la chaleur de la diſpute, on a conduit une queſtion jusqu'aux abîmes du Scepticiſme, il arrive pour l'ordinaire que les deux partis s'y trouvent également arrêtés: & alors ce qu'ils peuvent faire de plus ſage, c'eſt de retourner tout doucement ſur leurs pas, & d'apprendre à devenir plus modeſtes.

Y ſonge-t-on bien lorsqu'on jette ſur le Sens Moral le ſoupçon de n'être affecté qu'à l'eſpece humaine? Et ne voit-on pas que le même ſoupçon peut retomber ſur la Raiſon, & ſur l'Entendement? Eſt-il plus certain que tous les entendemens ſoient formés ſur le même modele, & que notre ſcience ſoit la ſcience univerſelle des eſprits? D'ailleurs la Raiſon ne tire-t-elle pas des ſens les matériaux qu'elle employe? Et où en ſerions-nous, ſi comme un Philoſophe moderne le prétend, elle n'étoit elle-même qu'une maniere de ſentir?

A ne conſidérer que notre eſpece, je ne ſais en vérité ſi le Sens Moral ne s'y manifeſte pas plus univerſellement que la Raiſon? Combien peu d'hommes ſont en état, je ne dis pas, de former & d'inventer d'eux-mêmes les principes abſtraits de la Morale, mais de les ſaiſir lorsqu'ils leur ſont préſentés? Cependant ces mêmes hommes diſtinguent le bien du mal auſſi ſûrement que le peut faire le Philoſophe le plus profond. Mais enfin, quand il y auroit des monſtres en fait de ſenſation, n'y en a-t-il point en fait de raiſonnement? Les eſprits faux ſont-ils plus rares que les cœurs corrompus? Suppoſons qu'il y ait des individus à figure humaine, nés ſans le moindre goût pour la vertu, & ſans la moindre étincelle de ce goût: ces individus auront encore moins ces principes raiſonnés, ou

intellectuels, ſur quoi vous fondez la Morale; & vous perdrez vos peines à vouloir les leur donner.

J'ai dit que le Scepticiſme, pouſſé à un certain point, ſe détruit lui-même. Nous nous méfions de nos facultés; mais nous ſommes, à tout moment, obligés de nous en ſervir: nous avons beau leur conteſter leurs droits; elles ne laiſſent pas de les exercer, & de remplir leur deſtination. Nous ne pouvons employer que les matériaux & les inſtrumens qui ſont en notre diſpoſition. Nous ne pouvons concevoir dans les êtres ſupérieurs que des propriétés rélatives à celles que nous remarquons en nous, ou autour de nous. Si, dans les animaux, nos concitoyens ſur ce globe, nous obſervons déjà quelque choſe de ſemblable au Sens Moral, je ne vois pas ce qui nous empêcheroit de l'attribuer encore aux claſſes qui ſont au deſſus de nous. Le bonheur des Intelligences pures, & la béatitude divine, conſiſtent ſans doute dans un plaiſir moral, analogue à celui que le ſentiment de la vertu nous fait goûter ici-bas.

Sans nous étendre ſur l'éternité des Loix Naturelles, voyons en peu de mots ſi le Sens Moral y peut porter atteinte.

Les vérités morales ne ſont éternelles qu'entant qu'on les enviſage comme des propoſitions générales, & purement ſpéculatives. Mais la Morale du ſentiment peut être généraliſée, & réduite à de pareilles propoſitions; elle peut donc jouir du même privilege. Les vérités les plus éternelles, s'il eſt permis de parler ainſi, ſont-elles autre choſe qu'une combinaiſon d'idées abſtraites qui ont leur ſource dans des perceptions ſenſibles?

Nous avons vu que les conſéquences de tous les différens principes de Morale ſont les mêmes. Que l'on ſuppoſe donc le principe de Convenance, celui de Perfection, ou tel autre qu'on voudra: nos ſenſations internes peuvent s'accorder avec ces principes, quand même ils nous ſeroient entierement inconnus. Il eſt tout naturel de croire que les actions & les moeurs que le Sens Moral approuve, ſont

ſont les mêmes qui obtiennent l'approbation de la ſuprême Intelligence, comme étant les plus dignes de la nature raiſonnable, les plus propres à perfectionner l'homme, les plus conformes à l'ordre univerſel. Et je ne vois pas que les loix naturelles, ou les préceptes moraux, aient beſoin d'une autre éternité.

On diſtingue communément entre vérités néceſſaires ou abſolues, & vérités contingentes ou conditionelles. Les premieres, dit-on, ne ſuppoſent que la ſimple poſſibilité, les ſecondes l'exiſtence actuelle. Je ne ſais ſi cette diſtinction eſt juſte à tous égards. Il ſuffit, je l'avoue, que le triangle ſoit poſſible pour pouvoir regarder comme vrayes toutes les propoſitions d'Euclide qui le concernent. Mais ne ſuffit-il pas auſſi qu'un certain arrangement, un certain ſyſteme ſoit poſſible, pour pouvoir en affirmer tout ce qui y eſt compris? Si l'on dit que le triangle eſt néceſſairement & éternellement poſſible, le ſyſteme dont je parle l'eſt auſſi, parce que je ſuppoſe qu'il n'implique point contradiction. Et ne puis-je pas me repréſenter une combinaiſon dont les parties tiennent enſemble, ſous la notion d'un triangle? Si l'on veut chercher la différence en ce que ce dernier ne ſuppoſe rien à faire, rien à exécuter; j'en conviens par rapport aux vérités idéales qui réſultent d'un triangle idéal; mais n'en eſt il pas de même d'une combinaiſon, ou d'un ſyſteme idéal? Si de l'idée on paſſe à la réalité, les deux cas ſont encore paralleles: au premier il y a un triangle à faire, au ſecond un ſyſteme à exécuter.

Si l'on croit contingentes les vérités fondées ſur le Sens Moral, parce qu'elles ſuppoſent la condition de l'exiſtence d'êtres doués de ce Sens; la Morale raiſonnée ne ſuppoſe-t-elle pas également l'exiſtence d'êtres doués de raiſon? A le prendre ainſi, toutes les vérités ſeroient contingentes; & puis de quoi diſputons-nous?

ANALYSE DE LA RAISON.

PAR M. SULZER.

Après avoir lû l'année paſſée un Eſſai ſur le Génie, dans lequel j'avois entrepris d'analyſer cette qualité de l'eſprit, il m'a paru enſuite qu'on pourroit faire la même choſe par rapport à la Raiſon. Cette recherche pourroit même être plus importante que l'autre. C'eſt principalement par la raiſon que l'homme ſe diſtingue des bêtes: & ſi nous pénétrons jusqu'à l'origine de ce don précieux de la Nature, ſi nous découvrons les cauſes qui le produiſent & les circonſtances qui le ſoutiennent; nous verrons par quel moyen la Nature a ſu nous élever à un dégré plus haut que les autres animaux, & cette connoiſſance nous conduira à la découverte des moyens de perfectionner cette prérogative de notre nature: but auquel tendent l'éducation & une partie de la Légiſlation.

Je penſe qu'il n'y a plus perſonne qui ſoit ſérieuſement du ſentiment de *Des-Cartes*, que les animaux ne ſont que des machines deſtituées du ſentiment intérieur. C'eſt une des erreurs les plus groſſieres, qui ſe ſoyent gliſſées dans la Philoſophie. La reſſemblance entre l'homme & les autres animaux eſt trop frappante, pour qu'il ſoit poſſible de nier qu'ils ſoyent doués de la plûpart des facultés que nous attribuons à notre ame. Il n'y a que la raiſon, le goût, & le ſens moral, qui leur manquent, pour reſſembler en tout à l'eſpece humaine.

On conviendra donc, qu'il y a des êtres doués du ſentiment intérieur, capables d'avoir des idées, ayant de la mémoire, l'imagination, une eſpece de jugement; & qui, malgré cela, n'ont ni la raiſon, ni le goût, ni le ſens moral; & c'eſt une queſtion qui mérite notre attention, de ſavoir, d'où dépendent ces prérogatives que la Nature

nous a accordées, en les refuſant aux autres animaux, qui d'ailleurs nous reſſemblent par tant d'endroits. Je me borne dans ce Mémoire à cette partie de la queſtion qui regarde le Raiſon.

On prend le mot *Raiſon* dans un double ſens. Il ſignifie, ou l'enchaînement des vérités univerſelles, comme *Leibniz* l'a remarqué, ou bien la faculté de raiſonner, ou d'appercevoir cet enchainement; ſens dans lequel *Wolff* a pris ce mot. Dans le premier ſens, la Raiſon eſt, dans chaque être raiſonnable, le recueil ou la maſſe des connoiſſances philoſophiques qu'il poſſede; & dans l'autre, la faculté de les acquérir. Nous avons donc deux choſes à examiner; la faculté même, & ce qu'elle produit. Je commence par le premier point.

Je pourrois ſuppoſer ici ce que le célebre *Wolff* a remarqué dans ſa Pſychologie, ſur la Raiſon, le raiſonnement, & les différentes facultés de l'ame qui y concourent. Mais, ſachant que les Ecrits de ce Philoſophe ne ſont pas lûs autant qu'ils le méritent pour le fond des choſes qu'ils renferment, & qu'ils ſont presque inconnus hors de l'Allemagne, je crois devoir expoſer en peu de mots, ce que je ſuppoſe ici comme démontré par ce Philoſophe.

La Raiſon, ſelon lui, eſt la faculté de connoitre plus ou moins la liaiſon entre les vérités univerſelles. Car raiſonner n'eſt autre choſe que connoitre, ou ſentir, que telles propoſitions-ſuivent néceſſairement de telles autres. Le raiſonnement ſuppoſe donc néceſſairement des notions générales, par conſéquent des idées particulieres desquelles les notions réſultent enſuite; il ſuppoſe de plus le jugement, parce que c'eſt par cet acte de l'eſprit qu'on forme les propoſitions fondamentales du raiſonnement. Or le jugement ſuppoſe néceſſairement l'attention & la réflexion, qui dépendent en partie de l'imagination, de la mémoire, & de l'eſprit. De là il s'enſuit que la Raiſon ſe forme par le concours de toutes les facultés de l'eſprit; qu'elle ſuppoſe la force repréſentative de l'ame, la faculté d'avoir des idées, l'imagination, la mémoire, l'eſprit, l'attention, la réflexion, & le jugement.

Voilà

Voilà en abrégé l'analyſe que *Wolff* a faite. Pour la pouſſer plus loin, je me propoſe de rechercher ici les élémens de ces élémens.

La premiere propriété de tout être doué du ſentiment intérieur, celle qui, en même tems, paroit être la ſource de toutes les autres, eſt la *force repréſentative*, comme *Leibnitz* & *Wolff* l'ont appellée, ou ce principe d'activité qui nous porte, & nous force en quelque façon, à nous prêter aux impreſſions excitées en nous par les ſens. C'eſt cette force qui donne aux êtres intelligens l'activité, la vivacité, & la ſenſibilité; c'eſt elle qui paroit produire tout les changemens qui arrivent dans l'intérieur des ſubſtances. Nous n'avons aucune meſure de cette force: nous ignorons même ſi elle eſt plus grande dans un ſujet que dans l'autre; ſi elle agit avec plus de force dans l'homme que dans la bête; ou ſi, ſemblable à la gravité des corps terreſtres, elle eſt la même dans les différens ſujets. Cependant nous ſavons qu'elle eſt gênée dans ſon action par l'état actuel des organes du corps, en ſorte qu'elle ne ſe dévelope que proportionellement à cet état. Nous voyons le même homme, tantôt plus, tantôt moins actif; la ſucceſſion de ſes idées paroit, tantôt plus, tantôt moins rapide. Nous ſavons enfin que, quand les organes du corps ſont entierement aſſoupis, comme dans le ſommeil profond, cette force ne produit aucun changement ſenſible, & qu'elle reſſemble alors aux forces mortes des corps, qui ne ſont que des efforts, ſans action. Par là il eſt évident qu'un être peut être doué de la force repréſentative, telle qu'elle eſt dans l'homme, ſans parvenir à la raiſon: puiſque le corps peut être tellement organiſé, que cette force ne produiſe aucun effet ſenſible.

La queſtion, comment la conſtitution du corps peut altérer l'action de l'ame, eſt une des plus embaraſſantes. Tout le monde ſait ce qu'en penſent les différentes Ecoles de Philoſophie. Sa ſolution paroit ſurpaſſer nos connoiſſances. Cela nous oblige de ſuppoſer ici que l'être eſt déjà doué du ſentiment intérieur; de ſorte que la queſtion dont la ſolution doit réſulter de nos recherches préſentes, eſt celle-ci. *Le ſentiment intérieur* (produit d'une façon inexplicable pour nous,

nous, par le concours de la force active de l'ame, & d'une certaine organiſation du corps,) *ſuppoſé, comment ſe forme la faculté de raiſonner?*

On voit d'abord, que le raiſonnement ſuppoſe les idées & les notions des choſes. C'eſt donc par la faculté d'avoir des idées & des notions, que nous commencerons notre analyſe. Pour que nous puiſſions raiſonner, il faut que l'eſprit ait des idées & des notions, & qu'elles ayent un certain degré de clarté. Le ſentiment intérieur, ſoutenu par la force active de l'ame, produit immédiatement la faculté d'avoir des idées. Avoir une idée préſente à l'eſprit, n'eſt autre choſe que, ſentir que dans l'inſtant préſent on eſt affecté d'une certaine façon déterminée. Si la façon d'être affecté change d'un inſtant à l'autre, & ſi nous nous appercevons de ces changemens, en diſtinguant l'un de l'autre, nos idées ſe ſuccedent. Or, pour diſtinguer ces changemens, il faut néceſſairement l'exercice libre de la force active. C'eſt elle qui nous engage à nous prêter aux impreſſions, à nous y arrêter un moment pour les diſtinguer de celles qui ont précedé. Nous pouvons donc dire de tout animal, dont l'organiſation eſt telle que, jointe à ſa force active, elle produit le ſentiment intérieur, que cet animal a néceſſairement des idées.

Nous pouvons diſtinguer dans les idées leur qualité matérielle de leur forme. L'une & l'autre doivent être d'une certaine façon pour que les idées puiſſent ſervir au raiſonnement. Car il y a quantité d'idées, ſur leſquelles il eſt impoſſible de raiſonner. C'eſt tantôt leur qualité matérielle, tantôt leur forme, qui les rend inutiles au raiſonnement. J'expliquerai cela plus clairement dans la ſuite.

La qualité materielle des idées eſt l'eſpece de perception, eu égard à la cauſe qui la produit; & leur forme eſt l'eſpece de perception, eu égard à la façon de la ſaiſir. Ainſi toutes les couleurs ont la même qualité matérielle, comme tous les ſons, toutes les figures. Mais une couleur differe de l'autre, un ſon de l'autre, une figure de l'autre, par la forme, c'eſt à dire, par plus ou moins de clarté, de force, par le plus ou le moins de la préciſion avec laquelle nous la ſaiſiſſons.

Maintenant je dis que la qualité matérielle des idées dépend uniquement de l'eſpece d'organiſation des différens ſens que la Nature a accordé à l'animal.

Je veux dire par là que toutes les idées que nous avons du monde matériel, celles de l'étendue, du mouvement, des formes, des couleurs, &c. ſeroient très différentes de ce qu'elles ſont actuellement, ſi nos ſens étoient autrement organiſés. Il eſt important pour mon but que je m'étende ſur cette remarque.

On voit d'abord que les ſens ne nous donnent pas les idées des corps mêmes qui affectent nos organes, mais de quelques unes de leurs qualités rélatives aux ſens. La vue, par exemple, ne nous fournit que les idées de l'étendue, des formes, des couleurs, & du mouvement; & ſi nous n'avions que ce ſeul ſens, nous n'aurions aucune idée de la force d'un corps, de la ſolidité, de la dureté, du chaud, & du froid, &c. D'où il eſt évident que, ſi les corps ont des qualités qui ne ſe rapportent à aucun de nos ſens, nous n'en avons aucune idée ſenſible. Arrêtons-nous ici, pour répandre plus de jour ſur cette remarque.

Nous ſavons, qu'il y a des animaux qui ſont privés de quelques uns des ſens que la Nature nous a accordés, & d'autres qui paroiſſent en avoir quelques uns qui nous manquent. Cette derniere obſervation ſemble prouver que les corps ont des qualités qui ne ſe rapportent à aucun de nos ſens, dont par conſéquent nous n'avons pas le moindre ſoupçon. En général, nous voyons par là, que comme nous avons quelques idées ſenſibles qui manquent à d'autres animaux, il y a des eſpèces de ceux-ci qui apperçoivent dans les corps des qualités dont nous n'avons aucune idée. Ceci ſe rapporte au nombre & à la variété des idées ſenſibles.

Quant à leur nature, il eſt évident que la conſtitution des organes nous entraine à nous former de chaque qualité ſenſible des corps un certain être, ou phantome, qui ſeroit très différent, ſi la même qualité frappoit un ſens autrement organiſé. La vue, par exemple,

jointe

jointe au toucher, inſinue dans l'eſprit l'idée de l'étendue, comme d'un être dont on peut concevoir l'exiſtence & la poſſibilité indépendamment des corps. Mais, ſi la vue nous manquoit, l'idée de l'étendue produite par le tact, ſeroit indubitablement très différente de ce qu'elle eſt actuellement. En ſuivant avec attention les réflexions qui naiſſent de ces remarques, nous ſentirons en général, que toutes les idées ſenſibles, ſans nous manquer abſolument, pourroient être très différentes de ce qu'elles ſont actuellement, & répondre ce nonobſtant, aux mêmes qualités & aux mêmes propriétés des corps.

Ramenons maintenant ces remarques à leur but. Nous ſavons que la confuſion qui regne dans quelques unes de nos idées ſenſibles nous permet fort peu de raiſonnemens ſur la nature des corps, de ſorte qu'en Phyſique presque tout ce que nous ſavons n'eſt qu'expérience. Cependant, il nous eſt permis de conjecturer, qu'une organiſation différente auroit pu nous faciliter le raiſonnement. Voici de plus près le fondement de cette conjecture. Rien n'eſt plus éloigné de la véritable nature des choſes, que nos idées ſur la lumiere & les couleurs: cependant nous concevons fort bien, que le ſens de la vue auroit pu être tellement organiſé, que nous euſſions ſenti que les couleurs réſultent de la vibration que les corps illuminés produiſſent dans un fluide extrémement ſubtil, & que nous euſſions diſtingué les couleurs par les vibrations propres à chacune. Or une telle vue auroit conſidérablement facilité nos raiſonnemens ſur la lumiere & les couleurs. Tous les autres ſens étant dans le même cas, nous pouvons aſſurer, que la raiſon, entant qu'elle eſt rélative au monde matériel, dépend entierement de l'eſpece d'organiſation propre à chaque ſens. Le ſens de la vue eſt tel, que nous avons pu former une ſcience très parfaite rélative aux figures; telle autre organiſation du corps nous auroit permis des ſciences auſſi parfaites, rélativement aux autres qualités des corps, telles que les couleurs, les ſons, le chaud & le froid, etc.

Les qualités formelles des idées ſemblent dépendre de la perfection de chaque organe dans ſon eſpece. Il eſt au moins évident

que ceux qui ont la vue bonne, reçoivent des objets visibles des impressions plus claires & plus nettes que ceux dont la vue a quelque défaut: & comme il en est de même des autres sens, il semble qu'on peut assurer en général que, les autres circonstances égales, ceux qui ont les sens les plus parfaits, ont les idées les plus claires & les plus nettes. Or les premieres idées que nous acquérons, sont les idées des choses sensibles. Si elles sont bien parfaites, nous distinguons mieux les objets les uns des autres; nous observons plus exactement leurs différences, nous en voyons de plus petites, nos perceptions sont en plus grand nombre; & nous nous accoutumons à voir plus clairement, & à distinguer plus exactement. Cela nous conduit naturellement, comme nous le verrons bientôt, à la réflexion, & forme insensiblement la précision & la solidité dans les choses même qui ne tombent pas sous les sens. C'est ainsi que des organes parfaits nous conduisent naturellement sur la route de la Raison; pendant que des sens émoussés y mettent des obstacles par des effets contraires.

Cependant, quoique la perfection des sens soit nécessaire pour parvenir à la Raison, & quoiqu'elle paroisse l'amener naturellement; l'expérience nous apprend, que cela seul ne suffit pas encore pour nous rendre raisonnables. Tous les animaux quadrupedes ont les mêmes sens que la Nature a accordé à l'espece humaine, & ils les ont ordinairement plus parfaits & plus fins que nous. Il faut donc quelque chose de plus pour parvenir à la Raison, que des sens exquis.

En effet, nous savons par ce que nous éprouvons en nous-mêmes, que nos sens peuvent être frappés par des objets placés fort avantageusement pour produire des sensations assez fortes & assez exactement déterminées, sans quelles produisent des perceptions bien claires. Dans les distractions, nous sentons à peine ce qui frappe nos sens; & ce qui se passe sous nos yeux, ne produit que des perceptions très foibles. Dans un pareil état, les sens les plus parfaits ne nous seroient pas d'un grand avantage. Or il est visible que ce n'est que l'attention qui nous manque alors. Cet acte de l'esprit est donc très necessaire pour que nos perceptions soyent bien frappantes.

L'atten-

L'attention paroit un acte ſi ſimple qu'il eſt peut être impoſſible de le définir autrement que par ſes effets. Or les effets les plus ſenſibles de l'attention ſont: qu'elle nous fait diſtinguer une idée, ou perception, de toute autre alors préſente à l'eſprit; qu'elle nous la rend en quelque façon plus voiſine que les autres, plus forte & plus intéreſſante; qu'elle excite l'activité de l'eſprit; & que cette activité eſt alors rélative à la ſeule perception ſur laquelle nous portons l'attention. Il y a deux cauſes qui la produiſent; l'une eſt la force ſupérieure avec laquelle les idées nous frappent, & l'autre leur *clarté*. (*) La premiere cauſe produit une attention forcée & ſtupide, mêlée d'étonnement; & l'autre une attention libre & réfléchie. Nous éprouvons l'attention forcée, lorsque quelque objet nous frappe ſi fortement que l'ame en eſt émue; comme dans la douleur, & dans la ſenſation d'un beſoin fort preſſant. Un telle ſenſation attire toute notre attention, & la fixe tellement à l'état préſent de l'ame, que ſon action paroit arrêtée, & changée en ſimple effort. Les perceptions ne peuvent ſe ſuccéder, parce que, dans une telle ſenſation, nous ne diſtinguons rien; ce qui nous affecte n'eſt qu'une ſeule maſſe indiviſible. Et ces perceptions fortes étant toujours accompagnées de plaiſir ou de peine, l'ame ſe livre toute entiere à ces ſentimens.

L'attention cauſée par la clarté des perceptions eſt fort différente de l'autre. Elle fixe l'action de l'ame ſur un objet nettement rendu, dont nous diſtinguons les différentes parties. Cela nous engage à les conſidérer l'une après l'autre, à remarquer leurs liaiſons, leurs proportions, leurs dépendances mutuelles. Nous ne ſommes, ni étonnés, ni émus; & l'eſprit conſerve la liberté de contempler l'objet.

Il eſt bien clair que l'attention produite par la premiere cauſe, loin d'être favorable au raiſonnement, le détruit plutôt. Car comment pourrions nous réfléchir ſur un objet qui, après nous avoir

(*) Ce mot de *clarté* ne répond pas exactement à ce que je veux dire. Je l'employe, parce que je ne connois aucun terme françois qui réponde à mon idée, que le mot allemand *Deutlichkeit* exprime parfaitement. Un objet a de la clarté dans le ſens où je prends ici ce mot, lorsque nous diſtinguons exactement ſes parties. Une figure bien prononcée a de la clarté; & un ſon dans lequel nous ne diſtinguons rien, n'a point de clarté.

ému, ne nous préſente rien que nous puiſſions décompoſer? Un ſon frappe fortement l'oreille. L'ame étonnée de cette ſenſation forte & ſubite, y porte ſon attention; mais qu'y diſtingue-t-elle? Comment peut-elle travailler ſur cette maſſe ſans forme, & même ſans parties? Tout ce qu'elle peut faire, lorsqu'elle eſt revenue du premier étonnement, c'eſt de ſe prêter à l'impreſſion de plaiſir, ou de gêne, que cette ſenſation a produite; mais cela ne lui donne aucune perception nouvelle. L'attention libre au contraire produit naturellement la réflexion. Car, après avoir ſaiſi l'objet en gros, nous pouvons l'analyſer, parce que nous voyons ſes parties. Nous nous prêtons ſucceſſivement aux perceptions partiales dont la perception de l'objet entier eſt compoſée; nous les comparons les unes aux autres, pour découvrir leurs rapports & leurs différences. Et comme nous ſommes ſans émotion, nous reconnoiſſons la marche de l'eſprit dans l'analyſe que nous faiſons de la perception totale; nous ſentons à chaque moment ce que nous faiſons, ce que nous avons fait le moment d'auparavant, & ce que nous allons faire le moment d'après. En un mot, nous manions cet objet de la même façon qu'on tourne & retourne un corps pour le conſidérer de tous côtés. Si l'imagination & la mémoire ſe joignent à cette attention, nous comparons les idées préſentes à d'autres qui y ont quelque rapport; & c'eſt par là que nous approfondiſſons les choſes. Arrêtons-nous ici, & tâchons de découvrir plus particulierement l'origine & la nature de l'attention libre. C'eſt ici l'endroit eſſentiel de notre recherche, vû que cette attention eſt le vrai fondement de la Raiſon.

On voit d'abord qu'elle ſuppoſe cette liberté d'eſprit, qui nous permet d'agir volontairement, & de nous porter ſur une de nos perceptions préſentes plutôt que ſur toute autre, de nous y arrêter, & de la quitter, comme nous le trouvons à propos. Or cette liberté de l'eſprit ſuppoſe deux conditions, ſans leſquelles elle ne peut avoir lieu. L'une eſt cet état de l'ame que *Wolff* nomme *état de perceptions claires*, & que je ſerois tenté d'appeller *état du réveil parfait*, parce qu'il me paroit directement oppoſé à l'état du profond ſommeil. L'autre con-

condition eſt un degré ſuffiſant de tranquillité dans l'ame, l'abſence de ce qui nous émeut & de tout ce qui force notre attention malgré nous. Il eſt néceſſaire que je m'étende un peu ſur l'une & l'autre de ces conditions.

Quant à la premiere, il eſt évident que, lorsque l'eſprit eſt dans un état ténébreux, comme quand nous nous ſentons aſſoupis, ou accablés de fatigue, nous ne donnons aucune attention à ce qui ſe paſſe, ſoit en nous-mêmes, ſoit autour de nous. L'eſprit ne paroit alors avoir aucune force; & quand même quelque objet nous frappe, nous abandonnons le cours de nos perceptions au hazard; ce ſont les phantaiſies les plus legeres qui le conduiſent. Tel eſt l'état de l'eſprit dans les rêves; il y a la legèreté d'un duvet, que le moindre ſouffle emporte ſans aucune réſiſtance. Et quoique dans cet état nous ayons quelquefois des perceptions aſſez claires, nous les ſaiſiſſons avec ſi peu de force que les plus petites & les plus legeres circonſtances nous les font quitter. Dans l'état du réveil parfait, la ſuite des idées tient à des liens forts & ſolides; le paſſage d'une idée à l'autre ſe fait moyennant une conformité réelle entre les deux idées voiſines, parce que l'eſprit rejette les liens imaginaires. Au contraire, dans le rêve, les liens les plus chimériques ouvrent le paſſage d'une idée à l'autre; & l'on n'y fait point de différence entre l'apparent & le réel: les ailes d'un moulin à vent, qui ont une reſſemblance fort éloignée à deux énormes bras, levés pour frapper, ſont pris pour des bras réels, & par une autre conſéquence également legere, le moulin même eſt un géant. On voit par là que, dans cet état, la ſuite des idées n'eſt pas ſans liaiſon, mais que les liens ſont frivoles, parce que c'eſt le hazard qui les forme, & qui nous entraine à les ſuivre.

Cet état a toujours lieu, lorsque la ſenſation de nous-mêmes eſt fort foible, ou lorsque nous ne ſentons que confuſément & foiblement ce que nous ſommes, & ce que nous faiſons. Car alors nous ne ſentons pas nos propres forces, & par conſéquent nous ne les dirigeons pas; nous n'avons, ni vues, ni deſſeins. Cela nous arrive dans la premiere enfance, dans les momens où nous commencons à dor-

dormir, dans le ſommeil même, & dans quelques fortes diſtractions. Dans tous ces cas, les organes les mieux diſpoſés n'agiſſent que foiblement, vû que les nerfs ſont comme émouſſés. Il arrive de là que, de l'action réunie de tous les ſens, il réſulte une ſenſation générale de notre état, qui n'a que fort peu de clarté. Dans toute la maſſe de nos perceptions, il n'y a qu'un ſeul point lumineux; & c'eſt préciſément ce qui nous empêche de comparer l'idée qui nous eſt la plus préſente à d'autres qui ſont presque imperceptibles.

Pour donner à ces obſervations la plus grande clarté poſſible, nous remarquerons qu'à chaque inſtant nous avons un très grand nombre de perceptions à la fois. Nous recevons continuellement des impreſſions de tous les ſens; tout ce que nous avons ſenti & penſé avant le moment préſent, reſte en nous, quoique d'une maniere inexplicable. De cette multitude des idées, ſe forme à chaque inſtant une maſſe compoſée de perceptions préſentes à la fois. Plus il y a de clarté répandue ſur la maſſe entiere, plus il eſt aiſé de comparer les perceptions partiales entr'elles, & de voir à combien d'autres tient celle qui nous occupe principalement dans l'inſtant préſent. Or nous ſavons que, dans le rêveil, il y a plus de clarté dans cette maſſe des perceptions, que dans le ſommeil. Dans les diſtractions, il y a beaucoup de clarté dans l'ame; mais elle eſt toute concentrée ſur un très petit nombre de perceptions. Cela nous fait comprendre comment, dans l'état du réveil parfait, l'eſprit jouit d'une plus grande liberté pour agir, que dans les autres états dont nous venons de parler.

Maintenant l'expérience nous apprend qu'il y a deux cauſes principales qui nous réveillent du ſommeil, & qui nous tirent des diſtractions. Des ſenſations fortes qui, en cauſant un ébranlement dans les nerfs, le communiquent au ſyſteme entier, & des idées frappantes qui excitent un nombre d'idées à la fois. La premiere de ces cauſes eſt trop connue pour nous arrêter. Nous nous contenterons de remarquer, que le réveil eſt d'autant plus prompt & plus parfait, que cet ébranlement eſt général. Une ſenſation ſeule ne ſuffit ſouvent pas pour nous réveiller parfaitement. Il arrive quelquefois qu'au

réveil

réveil nous entendons diſtinctement quelque bruit, qui attire notre attention, ſans que cela ſuffiſe pour nous tirer tout à fait du ſommeil. Mais, dès qu'un autre ſens, comme la vue, ou le toucher, aide à l'ouie, alors le réveil eſt prompt & parfait. Quant à l'autre de ces cauſes, nous en éprouvons l'effet dans ces rêves, qui nous conduiſent à des idées ſi frappantes qu'elles excitent quelque paſſion; comme la frayeur, la joye, ou l'étonnement: alors nous ſommes réveillés en ſurſaut, parce que le ſentiment ſe communique en quelque façon à l'ame entiere, par le grand nombre de perceptions excitées à la fois.

Voilà donc deux cauſes qui produiſent, ou qui ſoutiennent, l'état du réveil parfait: des organes ſenſibles, ſoutenus par une communication libre avec le ſyſteme entier des nerfs, & des idées frappantes qui tiennent à un grand nombre de perceptions qu'elles excitent en même tems. Cela nous fournit quelque conſéquences importantes pour le but de ce Mémoire. La premiere eſt; qu'une organiſation trop ſimple, qui n'admet que des ſenſations fort peu variées, & en fort petit nombre, tient l'animal dans une ſtupidité continuelle, qui reſſemble aſſez au ſommeil. Ceci eſt immédiatement confirmé par l'expérience. Ces animaux que la ſagacité de M. *Trembley* a rendu célebres, occupent la derniere place dans l'ordre des êtres ſenſibles, & ſemblent toucher au regne végétal. Auſſi leur organiſation eſt-elle des plus ſimples. L'animal entier n'eſt qu'un ſeul boyau, terminé par une bouche & quelques bras. Cela fait ſoupçonner que les ſenſations de cet animal ſe réduiſent à avoir faim, & à ſentir qu'il tient ſa proye. Or ces ſenſations ſeules ne ſuffiſent pas pour répandre beaucoup de clarté dans l'ame de cet animal. Voilà la cauſe de ſa ſtupidité. Il paroit en général, que les animaux dont l'organiſation approche le plus de celle de l'homme, ſont les plus intelligens; & que cette ombre de raiſon qui ſe fait voir dans les animaux qui ont les cinq ſens que la Nature a accordé à l'eſpece humaine, diminue à meſure que l'organiſation s'éloigne de celle de l'homme, qui paroit la plus parfaite.

La ſeconde conſéquence qui réſulte des obſervations précédentes, eſt que; bien que l'organiſation de l'animal ſoit parfaite, s'il n'y a dans l'ame qu'un très petit nombre d'idées acquiſes, elle reſte dans la ſtupidité. Car, ſi le nombre des idées eſt en général fort petit, ces idées frappantes dont nous avons parlé, ne peuvent pas avoir lieu. Cette conſéquence eſt encore confirmée par ce qu'on obſerve de l'accroiſſement ſucceſſif de la raiſon, dans l'enfance de l'homme.

Troiſieme conſéquence. Tout dérangement dans le ſyſteme des nerfs, qui empêche la communication libre entre ſes différentes parties, eſt cauſe que l'état des perceptions claires eſt moins fréquent, & qu'on y parvient plus difficilement. Car, quelque forte que ſoit une ſenſation dans un pareil dérangement, elle ne produira qu'une ſeule perception, qui, comme nous l'avons vû, ne ſuffit pas pour ramener le réveil parfait.

La quatrieme conſéquance enfin eſt; que l'état des perceptions claires ne peut avoir lieu, à moins qu'il n'y ait un degré ſuffiſant de vigueur & de ſenſibilité dans le ſyſteme des nerfs, afin que les ſenſations ſoyent aſſez fortes pour cauſer des impreſſions vives. Si le ſyſteme des nerfs eſt émouſſé, comme cela arrive ordinairement dans une grande vieilleſſe, l'ame retombe plus ou moins dans un état de ſtupidité. Voilà ce que j'ai pû découvrir ſur les cauſes qui produiſent dans l'ame cet état ſans lequel l'attention réfléchie ne peut avoir lieu.

Nous avons remarqué plus haut, que cette liberté de l'eſprit, néceſſaire à l'attention réfléchie, ſuppoſe un degré ſuffiſant de tranquillité d'ame, ou l'abſence de tout ce qui tend à nous émouvoir. Je puis me diſpenſer de prouver que les émotions & les paſſions fortes ſont contraires à la réflexion; chacun en étant ſuffiſament convaincu par ſa propre expérience. Mais on ne ſait pas également, qu'un objet qui intéreſſe le coeur, peut avoir le même effet ſur l'eſprit, ſans que nous le ſachions. Il eſt néceſſaire que je m'explique ſur cette obſervation, qui eſt aſſez importante.

J'ob-

J'obſerve donc qu'outre ces momens dans lesquels nous nous ſentons émus ou paſſionnés, il y en a d'autres dans lesquels nous ſommes diſtraits, & incapables d'aucune application, ſans que nous connoiſſions la cauſe de cette indiſpoſition; & je dis qu'elle vient d'une paſſion que nous ne ſentons qu'obſcurément. Ceux qui ſont dans l'habitude de s'obſerver eux-mêmes ſauront, qu'on peut être de bonne ou de mauvaiſe humeur ſans qu'on en puiſſe ſoupçonner les cauſes. Cependant il arrive quelquefois qu'après les avoir longtems cherchées, on parvient tout d'un coup à les découvrir, & à ſentir même qu'elles ont longtems influé ſur notre humeur, ſans que nous nous en fuſſions apperçu. Cela prouve que des perceptions obſcures peuvent produire des effets fort ſenſibles, & que l'ame peut s'occuper de quelque intérêt notable ſans en avoir une connoiſſance bien claire. Ce ſont ces intérêts cachés au fond de l'ame, qui nous font quelquefois agir ou parler brusquement, hors de liaiſon & mal à propos, qui nous font dire, ſans y penſer, des choſes que nous voulions abſolument cacher. C'eſt par la même cauſe que les foux qu'on croyoit revenus de leurs folies, y retombent ſubitement. On peut même par là concevoir l'origine de la folie. Elle vient ordinairement d'une grande paſſion qui s'empare de l'ame, lui laiſſant au commencement aſſez de préſence d'eſprit pour ſe connoitre, pour s'appercevoir clairement du ſujet qui l'accable, & pour n'en parler que volontairement. Peu à peu l'ame prend l'habitude de ne plus penſer qu'à cela; elle perd l'attention ſur elle-même & ſur ce qui l'environne au dehors: uniquement occupée de ſa paſſion, elle y rapporte tout. Inſenſiblement elle oublie l'occaſion qui a fait naitre le trouble qui l'agite; elle ne s'apperçoit plus qu'elle eſt dans un état violent, parce qu'il lui eſt devenu ordinaire; & c'eſt par là qu'elle perd la réflexion ſur cet état, & qu'elle ne prend plus les précautions néceſſaires pour ſe reconnoitre. Il arrive quelque choſe de fort analogue à cela dans les douleurs qui durent longtems. Tout le monde ſait qu'on s'y accoutume tellement, qu'on peut les oublier; mais cela n'empêche pas qu'on ne porte ſans y penſer la main ſur la partie ſouffrante, qu'on ne

faſſe des démarches qui réſultent de la ſenſation obſcure de la douleur. C'eſt ainſi qu'un aveugle marche avec certaines précautions, même dans ces momens où il ſemble avoir entierement oublié que la vue lui manque.

Ce que nous venons de remarquer ſur l'effet des émotions & des paſſions cachées, nous conduit à découvrir deux nouvelles cauſes qui s'oppoſent à la Raiſon. La premiere eſt une diſpoſition qui rend les paſſions trop fréquentes; & l'autre eſt un ſentiment perpétuel de quelque beſoin preſſant, ou de quelque paſſion qui agit ſourdement. L'une & l'autre méritent une conſidération particuliere.

La premiere de ces deux cauſes a lieu, quand l'animal a les nerfs trop ſenſibles. Il y a des hommes qui n'ont presque jamais des ſenſations médiocres: tout ce qui les frappe, les frappe fortement; ils ſe ſentent transportés par des choſes qui n'affectent que médiocrement les autres. Cela les rend prompts, étourdis, emportés, & incapables de donner une attention réfléchie aux ſujets qui les frappent. Les ſaillies prennent chez eux la place des idées ſolides, & l'enthouſiaſme leur tient lieu de raiſon. Si cela va jusqu'à un certain excès, on les met dans la claſſe des foux. En effet ils ne différent de ces malheureux qu'on exclut de la ſociété, qu'en ce que leurs folies ſont courtes & variées; au lieu que celles des autres ſont continuelles, & toujours les mêmes. En général, tout homme eſt fou, pendant qu'il eſt agité par une forte paſſion; il voit & il fait le contraire de ce qu'il devroit faire. Or cette promptitude à être ému dépend uniquement de la conſtitution du ſyſteme des nerfs.

Le ſentiment continuel de quelque beſoin eſt le cas où ſe trouvent ces malheureux qui ont la tête troublée par une forte paſſion, comme nous l'avons déjà remarqué. La plûpart des animaux paroiſſent encore dans un état aſſez analogue à celui-là. On ſait que les différentes eſpeces des bêtes ont un génie plus particulierement déterminé que celui de l'eſpece humaine. Il n'y a qu'un très petit nombre d'objets qui affectent les bêtes, au lieu que l'homme ſe prête à tout ce qui

qui frappe ſes ſens. Or les quadrupedes étant doués des mêmes ſens que nous, ſans être ſenſibles à un auſſi grand nombre d'objets rélatifs à ces ſens; il eſt probable, qu'au lieu de cette eſpece d'équilibre que nous remarquons entre nos différens ſens, chaque eſpece d'animaux eſt douée d'un ſens dominant, auquel tous les autres & le ſyſteme entier des nerfs ſont ſubordonnés; ce qui doit produire une ſenſation dominante, qui détermine toute l'activité de l'animal vers une ſeule eſpece d'objets. Cela nous fait concevoir pourquoi les bêtes n'ont pas cette attention étendue, qui nous rend ſenſibles à une grande variété de choſes. Ramenons maintenant toutes ces obſervations à un ſeul point de vue, pour en tirer cette concluſion générale: Que l'organiſation la plus avantageuſe rélativement à la Raiſon eſt celle par laquelle le ſyſteme des nerfs eſt tellement varié, que l'animal reçoit la plus grande variété d'impreſſions; qui donne à chaque partie de ce ſyſteme un juſte degré de ſenſibilité, mais tellement proportionné qu'aucune partie ne prédomine ſur les autres; qui, enfin, permette une communication libre d'une partie du ſyſteme avec toutes les autres.

Je ſuis entré dans ce grand détail ſur les cauſes & les obſtacles de la liberté de l'eſprit, parce que ces matieres m'ont paru importantes & trop peu approfondies. Au reſte, je me flatte que ceux qui voudront bien réfléchir ſur ce que je viens de dire, ſentiront pourquoi les bêtes, qui ont les mêmes ſens que nous, ne parviennent pas à l'attention réfléchie. Continuons maintenant notre analyſe. Si l'attention réfléchie ne peut avoir lieu ſans la liberté de l'eſprit, elle n'avance pas beaucoup la Raiſon ſans le ſecours des idées acquiſes, de l'imagination, & de la mémoire. Un exemple ſenſible ſervira de preuve & d'éclairciſſement à cette obſervation. Je ſuppoſe que pluſieurs perſonnes jettent la vue ſur un excellent tableau d'Hiſtoire. Ceux qui n'ont aucune connoiſſance ni de la Peinture, ni de l'Hiſtoire, peuvent être frappés par l'éclat & la variété des couleurs, & par les différens objets qui entrent dans la compoſition du tableau, ſans que cela jette beaucoup de lumiere dans leur eſprit. Ne ſachant rien, ni du

ſujet, ni de l'art, ils ſe laſſent bientôt de contempler ce tableau. D'autres qui ſavent l'Hiſtoire, reconnoiſſent d'abord le ſujet. Cela les engage naturellement à fixer leur attention ſur le tableau, pour découvrir le vrai moment de l'action qu'il répreſente, pour comparer la compoſition avec ce qu'ils en ſavent, pour voir ſi les caracteres & les attitudes conviennent à la vérité, &c. D'autres enfin, qui outre l'Hiſtoire ont une connoiſſance de l'art, des obſtacles à ſurmonter, des difficultés à vaincre, prennent garde à tout cela; leur attention eſt fixée par un plus grand nombre de liens, & dirigée par un plus grand nombre d'idées. La même choſe doit toujours arriver, quel que ſoit le ſujet de notre attention: plus il nous eſt inconnu, plus il eſt ſéparé de nos idées acquiſes; moins il nous occupe. D'où il eſt clair que l'attention réfléchie ſuppoſe des idées acquiſes.

On voit en même tems par là ce que l'imagination & la mémoire contribuent à la ſoutenir, parce que c'eſt par le moyen de ces deux facultés que les idées acquiſes nous reviennent dans l'eſprit, & que nous les reconnoiſſons. Il arrive par là qu'elles nous font ſentir la liaiſon entre l'objet préſent & les idées auxquelles il tient, qu'une idée préſente peut devenir intéreſſante, qu'elle peut exciter notre curioſité, & nous engager d'y fixer notre attention. De tout ceci il eſt évident, que l'imagination & la mémoire ſont des qualités très eſſentielles à l'être qui doit parvenir à la Raiſon. Auſſi voyons-nous que les perſonnes qui en ont fort peu, ſont ordinairement aſſez ſtupides.

Si nous voulions donc pouſſer l'analyſe de la Raiſon jusqu'aux premiers élémens, il faudroit que nous découvrions auſſi l'origine de ces deux facultés. Mais ici, comme dans la Phyſique, on ne parvient jamais jusqu'aux premieres élémens des choſes. Tout ce que nous pouvons dire ici ſur cette matiere, ſe réduit à cette ſeule remarque; que des organes exquis, dans lesquels les objets extérieurs s'impriment facilement, & avec une grande préciſion, ſont favorables tant à la mémoire qu'à l'imagination.

Je

Je viens à la fin au dernier ſupport de l'attention réfléchie, qui eſt la *parole*. Ce ſujet important mérite d'être traité à part dans toute ſon étendue: cependant je ne ferai qu'indiquer ce qu'il y a de plus eſſentiel. Chaque mot eſt, comme tout le monde le ſait, le ſigne d'une idée; de ſorte que, dès qu'on entend, ou qu'on ſe rappelle, un mot d'une ſignification connue, on ſe rappelle en même tems l'idée à laquelle il répond. La parole eſt donc en général un des moyens de ſe rappeller des idées qu'on a eues.

Parmi le nombre des nos idées, il y en a une partie qui ſont ſenſibles, c'eſt à dire, qui répondent à des ſenſations que nous avons éprouvées: d'autres ſont purement intellectuelles; il n'y répond aucune choſe ſenſible, & on ne les ſaiſit qu'en comparant pluſieurs objets entr'eux, & en obſervant ce qu'ils ont de commun. Il eſt très facile de ſe rappeller les idées ſenſibles, ſans qu'on les fixe par des ſignes. Nous nous rappellons ſans difficulté tous les objets viſibles qui nous ſont familierement connus. Les idées abſtraites, au contraire, ſemblent n'exiſter dans l'eſprit que moyennant leurs ſignes. Si nous n'avions aucun ſigne pour marquer, par exemple, le nombre *dix*, la notion de ce nombre ne nous viendroit jamais dans l'eſprit que quand nous nous repréſenterions dix choſes ſemblables, & qu'en même tems nous fixerions notre attention ſur leur multitude, & que nous réfléchirions ſur la diminution ſucceſſive qui réſulteroit, ſi l'on ôtoit de la maſſe l'une de ces choſes après l'autre. On voit par là que les idées abſtraites exiſteroient auſſi peu dans l'eſprit qu'elles exiſtent hors de nous, ſi nous n'avions pas des ſignes pour les fixer. Ces ſignes étant des objets ſenſibles, des figures ou des ſons, qui frappent nos organes, nous nous les rappellons avec facilité; & c'eſt par là que nous donnons une eſpece d'exiſtence aux notions abſtraites.

Cette remarque nous fait comprendre que, ſans l'uſage de la parole, ou des ſignes en général, l'eſprit ſeroit bien vuide, vû qu'il n'y auroit que les images des choſes dont nous avons éprouvé quelque ſenſation. Mais, par le moyen des langues, ſurtout ſi elles ſont riches,

riches, nous nous mettons en poſſeſſion d'un nombre infini de notions. Si nous ajoutons à cela ce que nous avons dit plus haut ſur la néceſſité des idées acquiſes, nous ſommes portés à croire que de tous les moyens de répandre la lumiere dans l'ame, de ſoutenir l'attention réfléchie, & de nous avancer vers la Raiſon, la parole eſt le plus eſſentiel. Cette remarque eſt confirmée par quantité de faits ſi généralement connus, que je puis me diſpenſer de les alléguer ici.

Il me ſemble donc que le plus grand obſtacle qui empêche les bêtes de parvenir à la raiſon, eſt le manque de la parole. Nous ne connoiſſons pas aſſez la ſtructure du corps animal pour comprendre exactement comment la parole ſe forme dans la bouche de l'homme, & ce qui empêche les autres animaux de jouir du même avantage. Cependant nous pouvons aſſurer, que ce n'eſt pas manque de génie ou de force d'eſprit, que les animaux ſont privés de cet avantage précieux, qui pourroit les rendre raiſonnables. Il y a aſſez de faits très connus, qui prouvent que les bêtes, au moins les quadrupedes & les oiſeaux, ſont capables d'attacher quelques notions à des ſignes arbitraires; ce qui fait l'eſſentiel des langues. Les organes de l'ouie des quadrupedes étant fort ſemblables à ceux de l'homme, il eſt probable que le principal obſtacle vienne de l'incapacité des inſtrumens de la parole, la langue, les levres, les muſcles du goſier & du viſage. Quoiqu'il en ſoit, on comprendra que le défaut de la parole, ajoûté aux cauſes qui empêchent l'attention réfléchie, explique aſſez clairement pourquoi les bêtes ne parviennent pas à l'uſage de la raiſon, quels que ſoient d'ailleurs leur génie & leur ſagacité.

Jusqu'ici je n'ai examiné que quatre des facultés dont le concours forme la Raiſon; & je me ſuis trouvé dans la néceſſité d'entrer dans des détails ennuyeux: ce qui me reſte à faire, eſt moins difficile. La cinquieme faculté que nous allons conſidérer, eſt le jugement, ou cet acte de l'eſprit par lequel nous nous aſſurons que telle notion abſtraite convient ou peut convenir, ou bien, qu'elle ne convient pas ou ne peut convenir, à tel ſujet ou à un tel ordre de ſujets. Il ſuppoſe donc

donc des idées abſtraites & des notions générales. Quant aux idées abſtraites, nous les formons, lorsque dans une ſenſation, ou perception compoſée, nous diſtinguons tellement une ſeule partie, qu'oubliant qu'elle appartient à une ſenſation comme partie, ou à un ſujet comme propriété ou accident, nous la conſidérons à part. En voyant, par exemple, un corps ſphérique, cette ſenſation eſt compoſée; elle renferme la figure, la grandeur, la couleur &c. du corps. Si je fixe tellement mon attention ſur la figure, que les autres parties de la ſenſation me deviennent imperceptibles, j'acquiers l'idée abſtraite de la ſphéricité, que je puis manier, & ſur laquelle je puis raiſonner, ſans avoir le moindre égard au corps qui me l'a fournie. Cet acte par lequel nous formons des idées abſtraites, nait de l'habitude de diſtinguer ce qu'il y a de différent dans une ſenſation, ou perception quelconque. Pour mieux comprendre d'où elle tire ſon origine, nous conſidérerons un cas particulier. Je tiens une pierre dans la main. Cela excite dans moi une ſenſation aſſez compoſée, dans laquelle entre l'effet de ſa peſanteur, du froid ou du chaud, de la dureté de la ſurface polie ou raboteuſe, &c. Il eſt queſtion de ſavoir ce qui m'engage à décompoſer les différentes parties de cette ſenſation, afin de former des idées abſtraites de la peſanteur, de la dureté, du froid, ou de regarder ces qualités comme des êtres différens de la pierre même. Je crois qu'on peut hardiment aſſurer, que la premiere fois que nous éprouvons ces différentes ſenſations mêlées enſemble, nous ne nous aviſerons pas de les décompoſer. Nous regarderons certainement cette ſenſation ſi compoſée, comme tout d'une piece, ſi je puis m'exprimer ainſi. Cela eſt confirmé par quantité d'exemples qui prouvent, que nous ne jugeons jamais des choſes qui nous ſont abſolument nouvelles. Il arrive bien ſouvent que des perſonnes d'un eſprit très cultivé reſtent tout court ſans rien juger, quand elles voyent de pareils objets. Il faut leur laiſſer le tems de les manier, pour diſtinguer ce qu'il y a de différent. Un homme qui ne s'eſt jamais aviſé de réfléchir ſur la beauté d'un bâtiment, verra longtems un chef-d'oeuvre dans ce genre, avant que de s'appercevoir quels ſont les différens ſujets

qu'il faut enviſager, pour porter un jugement ſur leur beauté & leur perfection. Le plus habile raiſonneur, qui n'auroit jamais exercé ſon jugement ſur le goût en fait de deſſein & de ſculpture, regardera les chefs-d'oeuvre d'un *Phidias*, ſans s'appercevoir en quoi ils différent des ouvrages les plus ordinaires; il ſera même ſurpris que les connoiſſeurs y trouvent tant de ſujets d'admiration.

Il paroit que ce n'eſt qu'après avoir éprouvé ſouvent de pareilles ſenſations, avec des circonſtances variées, que nous apprenons à démêler ce qu'il y a de différent. La variété des ſens que le même objet peut affecter, nous engage naturellement à cette opération. Si nous voyons la pierre dont il s'agit dans notre exemple, nous n'y découvrons que l'étendue, la figure, & la couleur: ſi nous la touchons, nous la trouvons ſolide, polie ou raboteuſe; ſi nous la prenons dans la main, nous la trouvons peſante. Voilà comment nous apprenons à diſtinguer ce qu'il y a de différent dans cette pierre.

Il eſt évident par ce que je viens de remarquer, que ce n'eſt qu'après beaucoup d'expériences qu'on parvient à acquérir des idées abſtraites; & encore n'eſt-ce que moyennant une attention toute particuliere. Car plus on peut fixer ſon attention ſur une partie de la perception, mieux on perd les autres de vue, pour ſéparer ou détacher celle-ci. Il m'arrive ſouvent, (& je crois que d'autres l'auront éprouvé de même,) qu'en fixant l'attention ſur le ſon d'un mot, je perds abſolument l'idée de ſa ſignification, quoique d'ailleurs très connue. Cependant ce n'eſt pas juſtement par cette voye lente que nous acquérons les idées abſtraites. Leurs ſignes ſe trouvant déjà dans les langues, nous profitons des abſtractions que d'autres ont faites, en apprenant les mots par leſquels ils les ont déſignées. Quand on nous dit: *Voilà une grande pierre & bien peſante*, on nous indique déjà les idées abſtraites de la grandeur & de peſanteur. C'eſt par là que des perſonnes, qui peut-être d'elles-mêmes ne ſeroient jamais parvenues à former des idées abſtraites, les reçoivent, au moins confuſément, par l'uſage de la parole.

Les

Les notions générales des eſpeces, des genres, & des claſſes, ne peuvent s'acquérir qu'après une aſſez longue expérience. Pour les former, il faut avoir vû nombre d'objets qui ſe reſſemblent en partie, & qui ſe diſtinguent tellement les uns des autres, qu'on ne peut pas les confondre. En fixant l'attention ſur ce que ces objets ont de commun, on oublie leurs différences; & c'eſt par là qu'on acquiert la notion d'un genre. Cela ſe fait donc par le concours des mêmes facultés que nous avons trouvé néceſſaires pour la formation des idées abſtraites en général. Mais les notions génériques ſont ordinairement les plus difficiles à acquérir, vu qu'il faut ſe repréſenter quelquefois un grand nombre d'objets à la fois, pour en ſéparer tout ce qu'ils ont de commun: il faut par conſéquent poſſéder dans un degré éminent les facultés qui y concourent.

Il ſemble qu'on peut conclure de ce que nous venons de dire ſur les idées abſtraites & ſur les notions générales, que les bêtes ne ſont pas capables de les acquérir, & que c'eſt ici l'endroit où l'eſpece humaine ſe ſépare du reſte des animaux, & où la Raiſon commence.

En effet, dès qu'on a des idées abſtraites, on ne peut plus s'empêcher de juger. Le jugement affirmatif n'eſt autre choſe que l'opération par laquelle nous rejoignons à un ſujet la notion qu'on en avoit détachée par le moyen de l'abſtraction; le jugement négatif eſt le ſentiment, ou la déclaration, que telle notion ne peut pas être jointe à tel ſujet. L'un & l'autre ſe fait par une opération contraire à celle qui produit les idées abſtraites. Dès qu'on eſt parvenu à l'habitude de former des idées abſtraites, on ne pourra plus s'empêcher de juger.

Remarquons ici qu'il eſt poſſible de ſentir ce qu'une perception renferme de différent, ſans que l'on profite de cette perception pour former des idées abſtraites. De là peut naitre dans les bêtes une eſpece de jugement, que *Leibniz* nomme *attente des cas ſemblables*, laquelle a très ſouvent lieu dans l'homme. Quand nous avons vû un objet un grand nombre de fois avec les mêmes circonſtances, elles ſe joignent ou s'uniſſent tellement à la perception de cet objet, que, toutes les

fois que celui-ci reparoit, nous nous attendons à revoir en même tems les mêmes circonſtances. Ceci eſt une eſpece de jugement, auquel on eſt d'autant plus ſujet, que l'on poſſede moins l'habitude des abſtractions.

Après avoir expliqué l'origine du jugement, il nous reſte encore deux queſtions à réſoudre ſur cette matiere. 1°. Que faut-il pour que le jugement ſoit vrai? Et 2°. D'où nait la conviction? Quant à la premiere de ces deux queſtions, je parlerai premierement des jugemens ſur des matieres de fait & d'expérience. Il me ſemble qu'il y a trois cauſes d'erreur dans ces ſortes de jugemens. La premiere eſt quelque défaut dans les organes des ſens, qui produit une ſenſation fauſſe comme quand on voit les objets doubles. Une conſtitution parfaite des ſens peut nous garantir des erreurs de cette eſpece. La ſeconde cauſe d'erreur eſt la précipitation, qui confond l'effet avec la cauſe. Deux objets différens peuvent produire la même ſenſation. Un cercle vu d'une certaine façon produit ſur la rétine de l'oeil la même image qu'une ellipſe. Or, en transportant notre jugement de la ſenſation même ſur l'objet qui la produit, il ſera ſouvent faux. Nous nous garantiſſons de cette erreur, ſi nous changeons le point de vue, ou ſi nous employons le ſecours de quelqu'autre ſens, pour juger du même objet; comme quand nous touchons un objet qui, quoique peint, nous avoit paru en relief. En général, plus le nombre des ſens par les quels nous pouvons prendre connoiſſance d'un objet, eſt grand, & plus il nous préſente de côtés par leſquels nous pouvons l'enviſager; plus nos jugemens deviennent ſûrs. La troiſieme cauſe d'erreur dans les jugemens ſur les choſes ſenſibles, eſt une imagination trop vive, qui confond les fantaiſies avec des ſenſations réelles; ou des ſenſations trop foibles qui ne ſe diſtinguent pas aſſez des fantaiſies. L'un & l'autre nous ſéduit à prendre des imaginations pour des réalités. Ce qui nous garantit de ces erreurs, eſt d'un côté, un eſprit tranquille, l'équilibre dans l'ame; & de l'autre, une vigueur convenable dans les organes pour produire des ſenſations aſſez fortes.

Ce

Ce que nous venons de dire ſur la vérieté & la fauſſeté des jugemens en matiere de ſenſation, peut-être appliqué aux jugemens ſur les objets purement intellectuels. Car il y a ici trois ſources d'erreurs, analogues à celles dont nous venons parler. Des notions fauſſes, la précipitation dans le jugement, & les illuſions. Les diſpoſitions qui nous rendent ſuſceptibles de notions diſtinctes, capables d'une attention réfléchie, & celles qui produiſent un état bien lumineux dans l'ame, tendent toutes à nous garantir de ces différentes erreurs. Et comme nous avons déjà ſuffiſamment analyſé toutes ces diſpoſitions, nous pouvons nous diſpenſer ici d'entrer dans un plus grand détail. Paſſons donc à la ſeconde queſtion.

La conviction eſt un ſentiment clair & poſitif, qu'il nous eſt impoſſible de concevoir les choſes autrement que nous les concevons. Elle ſuppoſe donc que nous diſtinguions exactement les deux notions qui entrent dans le jugement, que nous ſentions en même tems très intimement ce que nous faiſons, que nous faſſions quelque effort pour concevoir le contraire, & que nous éprouvions très diſtinctement l'impoſſibilité de réuſſir. Il faut donc pour cela, outre les notions diſtinctes, la plus grande clarté poſſible dans l'ame, & la plus parfaite liberté de l'eſprit dans la direction de ſes forces.

Cette analyſe du jugement fait voir que la faculté de juger réſulte néceſſairement des diſpotions dont nous avons parlé plus haut; & cela nous aſſure que jusqu'à préſent notre analyſe eſt complette. Il nous reſte encore à conſidérer l'acte de raiſonner. Cela ne nous arrêtera pas longtems, parce qu'il y a beaucoup d'analogie entre l'acte du jugement & celui du raiſonnement. Dans le jugement, on compare deux idées en s'aſſurant qu'elles ſe conviennent pour entrer dans un même ſujet, ou qu'elles ſe répugnent & ſont incompatibles. Dans le raiſonnement, on compare deux propoſitions, & on s'aſſure qu'il y a une telle liaiſon entr'elles, qu'il en réſulte néceſſairement une troiſieme, qui tient aux deux autres; ou bien qu'il eſt impoſſible de les lier pour en faire une troiſieme. Je puis donc me diſpenſer d'entrer dans

un plus grand détail ſur la faculté de raiſonner. Pour peu qu'on y réfléchiſſe, on verra que le raiſonnement réſulte des mêmes diſpoſitions qui concourent dans le jugement; mais que ce dernier acte les ſuppoſe toutes dans un degré plus éminent, parce qu'il eſt plus compoſé. Ce que j'ai remarqué jusqu'ici, peut donc ſuffire pour nous faire comprendre quelles ſont les diſpoſitions qui nous rendent capables de raiſonner.

Après avoir ainſi analyſé la faculté de raiſonner, nous avons encore à examiner la Raiſon dans le ſens *de Leibniz*. (*) Comme on peut avoir toutes les diſpoſitions néceſſaires pour être grand Muſicien, ſans qu'on le ſoit en effet, on peut de même poſſéder la faculté de raiſonner, ſans avoir un grand fond de raiſon. Remarquons donc, qu'un être a plus ou moins de raiſon, quand il voit plus ou moins l'enchaînement des vérités univerſelles. L'être qui voit toutes ces vérités dans leur enchaînement, poſſede ſeul la Raiſon dans toute ſon étendue; celui qui n'en voit qu'une partie, la poſſede plus on moins, ſelon l'étendue de ſes connoiſſances. Il nous reſte donc encore à examiner ce qui regarde l'étendue de la Raiſon.

Il y a des hommes qui poſſedent la faculté de raiſonner dans un degré éminent, quoique bornés à une très petite étendue; ils déraiſonnent dèsqu'il s'agit des choſes les plus ordinaires placées hors de leur ſphère. Le fait mérite d'être approfondi; & il y a dans ce que j'ai dit plus haut ſur l'origine du jugement, dequoi l'éclaircir.. Le but de ce Mémoire m'oblige à me borner uniquement à l'examen de cette queſtion générale: *La faculté de raiſonner étant ſuppoſée, d'où dépend la plus grande étendue de la Raiſon?*

Il eſt d'abord clair que l'étendue de la Raiſon dépend de celle du goût. Un homme qui n'a du goût que pour une ſeule branche des connoiſſances, peut en poſſéder de très étendues dans ſon genre, & fort bornées dans d'autres. Pour n'être pas trop long ici, je renvoye

à

(*) Voyez ce que j'ai remarqué au commencement de ce Mémoire ſur le double ſens du mot *Raiſon*.

à une autre fois la queſtion ſur l'étendue du goût, me contentant pour le préſent d'examiner d'où dépend l'étendue de la raiſon dans un genre donné. Et pour détacher encore de la queſtion tout ce qui l'embarraſſeroit ſans néceſſité, nous ſuppoſerons deux hommes également habiles dans l'art de raiſonner, ayant la même expérience, & s'étant exercé également longtems; & nous tâcherons de découvrir les avantages que l'un peut avoir ſur l'autre, dans la poſſeſſion de la ſcience.

Pour rendre bien ſenſible l'état de la queſtion, je me ſervirai d'une comparaiſon qui fera ſentir ce que je ne pourrois exprimer que fort imparfaitement. La Raiſon reſſemble aux biens rélatifs aux beſoins de la vie. On peut poſſéder ces biens de deux façons; on peut les tenir raſſemblés autour de ſoi, en ſorte qu'à meſure qu'on a beſoin d'une choſe, on la trouve ſous la main, toute prête à être employée; ou bien, on les poſſede ſans les arranger, laiſſant chaque choſe comme on la trouve, ſe contentant de ſavoir qu'en cas de beſoin on eſt ſûr de la trouver en la cherchant; ou, ſans les poſſéder actuellement, on a les facultés de ſe les procurer en cas de beſoin. Dans le premier cas, on eſt parfaitement à ſon aiſe, vû qu'à chaque moment on eſt ſûr d'avoir tout ce qu'il faut, ſans que les affaires ſouffrent le moindre délai. Dans l'autre, au contraire, il faut à chaque moment arrêter les affaires pour chercher ce qu'il faut pour continuer: l'occaſion de faire quelque choſe peut paſſer, avant qu'on ait raſſemblé les moyens; tout va plus lentement, avec plus d'embarras, & ſouvent on n'eſt pas en état de faire ce que l'on veut, parce que l'occaſion paſſe avant que l'on ſoit prêt. Le premier de ces deux cas eſt celui d'un homme qui, après avoir découvert un nombre de vérités, les ſait arranger, retenir, & ſe les rappeller à point nommé, pour en faire uſage. On le trouve toujours raiſonnable dans ce qu'il dit & ce qu'il fait; jamais embarraſſé à tirer parti de ſes connoiſſances, toujours prêt à les faire valoir. Il les poſſede tellement qu'un coup d'oeil jetté ſur la maſſe totale de ce qu'il s'eſt approprié, le met en état d'y découvrir ce qu'il lui faut. L'autre cas eſt celui d'un homme qui auroit trouvé les

mêmes

mêmes vérités, ſans avoir pû les ranger. On le trouvera ſouvent embaraſſé à ſe décider, s'il eſt preſſé; il jugera ſouvent mal, parce que dans la confuſion de ſes connoiſſances, il ne trouve pas d'abord ce qu'il lui faut pour bien juger.

On peut donc dire qu'une homme poſſede parfaitement la portion de la Raiſon que ſes facultés & ſon expérience lui ont fait acquérir, s'il remplit ces deux conditions: 1°. de ſe rappeller avec facilité les vérités qu'il a une fois reconnues; & 2°. de les arranger dans un ordre convenable à leur dépendance & à leur ſubordination.

La facilité de ſe rappeller les vérités qu'on a une fois découvertes, ou connues par les découvertes des autres, dépend dans le fond de l'imagination & de la mémoire. Mais, ces deux facultés étant ſuppoſées les mêmes dans deux hommes, il eſt encore fort poſſible que l'un ſe rappelle plus facilement que l'autre les vérités qui lui ſont connues. Comme on ne ſe rappelle jamais diſtinctement aucune idée abſtraite, à moins qu'on ne l'ait, pour ainſi dire, fixée par quelque ſigne ſenſible; on ne ſe rappelle pas non plus les propoſitions ſans les phraſes qui les expriment ſenſiblement. Or nous ſavons que les expreſſions énergiques facilitent beaucoup la mémoire; par conſéquent, plus on peut donner d'énergie aux propoſitions, plus on facilite leur ſouvenir. Des expreſſions concentrées, lumineuſes, bien prononcées, & ſur tout celles qu'on renferme dans des images, ne s'oublient presque plus. Qui eſt-ce qui, apres avoir lû attentivement l'Eſprit des Loix du célebre *Monteſquieu*, pourra oublier la grande vérité renfermée dans cette image: *que le Monarque deſpotique coupe l'arbre pour en cueillir les fruits?* Si l'on pouvoit donc réduire toutes les propoſitions à des images ſenſibles & frappantes, on ſe rappelleroit avec beaucoup de facilité toutes celles qui nous ont paſſé par l'eſprit. C'eſt par une ſemblable méthode que les Géometres poſſedent leur ſcience dans la plus grande perfection, moyennant les figures & les formules algébriques, qui ſont autant de ſignes, qui renferment des proportions ſouvent fort compliquées.

Main-

Maintenant il eſt évident que, pour convertir une propoſition dans une image qui la repréſente, il faut beaucoup d'eſprit & une imagination heureuſe. Nous pouvons donc dire, que, toutes les autres circonſtances égales, l'homme qui a le plus d'eſprit, & qui penſe dans une langue fort riche en images, aura plus de facilité qu'un autre de poſſéder parfaitement ſes connoiſſances. Il eſt d'une grande importance pour l'avancement de la Raiſon, que les langues ſoyent bien cultivées, & que les gens qui ont le plus d'eſprit, s'appliquent aux ſciences, pour répandre les vérités ſous les formes les plus frappantes. Si d'un autre côté l'art caractériſtique étoit perfectionné au point que ce qui ſe refuſe aux images, pût être réduit à des formules ſemblables aux formules algébriques; la poſſeſſion des vérités en ſeroit extrêmement facilitée. Remarquons enfin en général, que, quand on eſt parvenu à découvrir, ou à connoitre une verité, il faut s'y arrêter, & tâcher de la réduire à la plus parfaite expreſſion, ſi l'on veut être ſûr de la retenir.

Il ne nous reſte plus qu'un ſeul point à conſidérer. C'eſt l'arrangement général des vérités que l'on poſſede, produit par le vrai eſprit de ſyſteme, qui decouvre leurs liaiſons & leurs dépendances. Le ſyſteme parfait eſt un *Tout* dont les parties ſont arrangées de façon qu'il en réſulte une forme parfaite & agréable. Les corps organiſés formés par la Nature, ſurtout la forme toute divine de l'eſpece humaine, en fourniſſent les exemples. Celui qui poſſede l'eſprit de ſyſteme, fait arranger les vérités en un ſeul corps d'une forme parfaite. Mais quels ſont les talens, & quelles ſont les facultés de l'ame, qui nous rendent capable de cet eſprit de ſyſteme? Ces queſtions méritent d'être traitées dans toute leur étendue. Mais, ayant déjà été trop long dans ce diſcours, je me contente d'indiquer les choſes. Comme on forme des notions générales en obſervant ce que pluſieurs objets ont de commun, il faut, pour former un ſyſteme, raſſembler toutes les propoſitions particulieres qui y entrent, concevoir ce qu'elles ont de commun, & ce que chaque claſſe a de particulier. C'eſt par là qu'on découvre les principes généraux, & qu'on détermine l'ordre dans lequel les vérités doivent être arrangées.

Cela demande l'attention la plus étendue, l'état de l'ame le plus lumineux, & la plus grande ſagacité. Et comme les matieres qu'on doit arranger, ſont en trop grand nombre pour les concevoir à la fois, il faut être capable de former des notions directrices, & des idées fécondes, moyennant lesquelles on découvre avec facilité l'ordre & la ſuite de celles qui en dépendent. Il faut ſe former des images très compoſées & arrangées avec goût. On voit par là que, pour avoir l'eſprit de ſyſteme, il eſt néceſſaire qu'on poſſede dans un degré fort éminent toutes les facultés dont nous avons parlé jusqu'à préſent.

Je m'arrête ici, laiſſant à ceux qui trouveront ces matieres intéreſſantes, de pouſſer plus loin ces recherches. Ce que j'en ai dit, peut fournir un grand nombre de conſéquences très importantes, qui ſerviront à découvrir les différens moyens de cultiver la Raiſon. Je n'ajoûterai donc qu'une ſeule remarque ſur l'ame des bêtes. Nous y trouvons tant de conformité avec l'ame raiſonnable de l'eſpece humaine, que je ſuis tenté de croire que toute la différence qu'il y a entre ces deux eſpeces d'ames ne vient que de l'organiſation du corps. Je ne ſuis pas éloigné de hazarder la conjecture que les bêtes paſſeront ſucceſſivement par des états, où elles auront des corps mieux organiſés, & qu'enfin elles parviendront à la Raiſon.

DE

DE LA NOTION DE L'INFINI:

DISCOURS

MELÉ DE RÉFLEXIONS, AMENÉES PAR LE SUJET MEME, SUR LES CAS OU L'USAGE DES DÉFINITIONS SE TROUVE EN DÉFAUT, ET SUR UN ALPHABET DES PENSÉES HUMAINES SEUL CAPABLE D'Y SUPPLÉER.

PAR M. DE PRÉMONTVAL.

Un des premiers pas, Meſſieurs, qu'on doive faire en Philoſophie, ſelon moi, c'eſt de ſe rendre bien familiere *la Notion de* L'INFINI. D'autres s'imaginent, au contraire, que c'eſt là le dernier effort, où l'Eſprit philoſophique, le plus exercé, puiſſe atteindre: mais il me ſemble que l'expérience eſt contre-eux, ou que l'on doit convenir qu'il faut renoncer abſolument à philoſopher. Car, s'il eſt de fait qu'il n'eſt pas poſſible d'entamer la moindre Queſtion, que l'idée de l'Infini ne s'y rencontre à chaque pas, & dès les premiers Axiomes, comme nous le verrons bientôt, quel parti reſte-t-il à prendre? Faudra-t-il laiſſer en arriere une idée, qui, faute d'être éclaircie à tems, ne peut qu'être un ſujet perpétuel de mal-entendus & de mépriſes; d'abord, parce que nous mêlerons ſans ceſſe à nos diſcours une idée qui ne ſera pas nette; enſuite, parce que nous ne nous mettrons à l'éclaircir, que chargés de préjugés & d'erreurs qui l'éclipſeront ſans retour?

Si donc il eſt donné, Meſſieurs, à l'Eſprit humain de philoſopher; s'il lui eſt permis de promener ſes recherches ſur les Objets qui

nous environnent, l'Infini eſt l'un des premiers objets qui exigent ſon attention. Je ne crois pas même qu'il y en ait aucun qui le précede, puisqu'il n'en eſt aucun où la Notion de l'Infini n'entre & n'influe pour quelque choſe. Avouons que c'en ſeroit fait de nos connoiſſances, ſi cette Notion étoit auſſi abſtruſe qu'elle eſt élémentaire en tous ſens, & par l'antériorité néceſſaire que j'y découvre eu égard à l'ordre de la Tractation, & par le degré de facilité qui j'y trouve dans la Tractation même. Comment ſe peut-il faire qu'une Queſtion, dont je vois que s'effrayent ſi fort tant de perſonnes en qui je reconnois plus d'eſprit & de lumieres que je n'en ai, & ſur quoi tant d'autres non moins habiles ont pris manifeſtement à gauche; comment, dis-je, oſerai-je avouer que cette Queſtion m'a toujours paru une des plus ſimples de la Philoſophie? Y auroit-il de ma faute? Seroit-ce préſomption pure, ou illuſion? Ou bien aurois-je eu le bonheur de rencontrer d'abord un point de vûe facile à ſuivre? En ce cas le bonheur ſeroit grand; on ne ſauroit s'imaginer, combien un regard fixe ſur l'Infini donne d'avantages dans la plûpart des Queſtions de Métaphyſique. C'eſt ce que je ſoumets, de bon coeur, au jugement des perſonnes-mêmes dont je me propoſe de combattre les Opinions.

Vous avez vu, Meſſieurs, dans ma *Théologie de l'Etre*, (*) que je penſe ſur l'Actualité & ſur les différens Ordres de l'Infini, préciſément ce que penſe la foule des Mathématiciens; mais je vous déclare que ce n'eſt point en Mathématicien que je le penſe. J'ai toujours cru, & l'ai dit ſouvent, que c'étoit des mains de la Métaphyſique, que les Mathématiques elles-mêmes, malgré l'indépendance qu'elles affectent, devoient recevoir leurs Principes, & toutes leurs Notions fondamentales. Il n'en eſt point, dont cela ſoit plus vrai que de la Notion ſi eſſentielle de l'Infini. Le Mathématicien qui ne ſeroit que Mathématicien, bien loin d'y voir clair, n'eſt capable que de tout confondre. Ses abſtractions perpétuelles, baſes de calculs à perte de vue, le conduiſent à des abſurdités ſi palpables, ou tout au moins à des concluſions ſi étranges, lorsqu'on les veut prendre au pied de la lettre

(*) Mémoires de 1755. & de 1757.

lettre, (à des anéantiſſemens d'Etres, à des réaliſations de Néants, &c.) que je m'étonne qu'elles n'ayent mille fois décrié une Science très eſtimable. Elles n'y euſſent pas manqué, ſi l'on n'eût pris le parti ſingulier, & vraiment inattendu, de conſidérer ces choſes, à-peu-près, ſur le pied qu'on regarde les Myſteres dans la Religion. Le reſpect pour des Vérités importantes, pour des uſages & des pratiques extrêmement utiles, a fait en général baiſſer les yeux devant les incompréhenſibilités qui s'y trouvent jointes. Il n'y a eu qu'un petit nombre de Profanes, dont l'audace oſant franchir ces ſortes de ménagemens, ait frappé des mêmes coups, & les Principes, & les Myſteres. Si je penſe, ſur le ſujet de l'Infini, ce que penſent la plûpart des Mathématiciens, on verra ſans peine à mes preuves, que ce ne ſont rien moins que des calculs peu lumineux, & des abſtractions peu ſûres, qui m'y ont amené.

Toute la difficulté conſiſte à établir une definition recevable, tant du *Fini* que de *l'Infini:* car, s'il y a de l'embarras, il eſt exactement le même de part & d'autre; & je ne trouve point, ou que l'Idée du Fini ſoit plus claire, plus aiſée à exprimer, que celle de l'Infini; ou que l'idée de l'Infini ſoit moins maniable, moins traitable, que celle du Fini. Elles ſont toutes deux, ou également traitables, ou également intraitables. Dites-moi, ſans ambiguité, ce que c'eſt que le Fini: je vous dirai ce que c'eſt que l'Infini ſans héſiter; & réciproquement. Mais celui que l'idée de l'Infini étonne, je doute fort que l'idée du Fini-même ſoit bien nette dans ſon eſprit.

„Allons! vite! me crie-t-on déjà; vite! vos Définitions! Qu'en„tendez-vous par *Fini?* Qu'entendez-vous par *Infini?*„ Je ſais, Meſſieurs, que la routine eſt de commencer par là. Ma méthode, à moi, eſt différente: c'eſt par là que je finirai, ſi même j'y viens, & ſi je ne trouve pas plutôt le moyen de m'en paſſer. J'ai mes raiſons. Je n'ai garde d'adopter les Définitions des Philoſophes du parti contraire au mien; elles tranchent en leur faveur. Je n'ai pas le front non plus de préſenter celles qui ſont ajuſtées à mon ſentiment, puisque je reconnois qu'on les recuſeroit avec autant de droit que je recuſe celles des autres. Il n'y a cependant point de milieu: je n'en ſache aucunes encore, qui

ne ſuppoſent abſolument ce qui eſt en queſtion, & même d'une façon groſſiere. Seroit-ce procéder en bonne Logique, que de fonder toute une Théorie ſur une Diſtinction qui en ſeroit la ruine, ou ſur une Définition conteſtée? Quoique rien ne ſoit plus commun que ce dernier cas, ce n'eſt point un exemple que je veuille ſuivre.

Un Philoſophe envelope avec plus ou moins d'adreſſe, quelquefois d'une façon à faire pitié; (n'importe:) il envelope, vous dis-je, ſon Opinion chérie dans les Définitions qu'il propoſe dès l'entrée; puis il triomphe au bout d'une longue ſuite de Déductions, & vrai Joueur de Gobelets, il parvient enfin, après maints tours de paſſe-paſſe, à trouver au fond du ſac ce qu'il y a mis. La merveille eſt grande: mais il ne faut que lui en oppoſer autant; & comme l'on n'y manque pas, de là vient que rien ne ſe termine, rien au monde, en fait de diſputes philoſophiques. Quelqu'un ſe ſera mis dans la tête qu'un Cheval eſt une eſpece de Chameau: il le prouve; & comment cela? Rien de plus facile. DÉFINITION. *Le Chameau eſt un Animal robuſte qui porte des fardeaux.* Fort bien! je vois d'ici où vous allez. Sauvez-nous de grace le bout de chemin qui reſte à faire. Oui, mon Ami, vous avez raiſon; le Cheval eſt un Chameau. Mais écoutez; il ne l'eſt plus. DÉFINITION. *Le Chameau eſt un Animal qui a ſur le dos une groſſe boſſe.* Dites; où eſt la boſſe de votre Chameau? Ou bien, l'Ame, demandera t-on, eſt-elle ſpirituelle, où matérielle! Nous voilà bien en peine: une Définition en fera l'affaire. Voulez-vous qu'elle ſoit matérielle? Tenez. *L'Ame eſt une Machine qui penſe. Or toute Machine eſt matérielle. Donc...* La voulez-vous ſpirituelle? Tenez encore. *L'Ame eſt un Indiviſible qui penſe. Or un Indiviſible qui penſe eſt un Eſprit, &c.*

Pour décider toute ſorte de Queſtions à ſon avantage, il n'y a pas, Meſſieurs, de plus ſûr moyen. Ainſi donc, qu'eſt ce que *l'Infini?...* Réponſes catégoriques! *C'eſt ce qui eſt ſi grand qu'il n'y a rien de plus grand;* ou, *c'eſt ce qui ne peut être augmenté, ce à quoi l'on ne peut rien ajouter.* Un Nombre infini actuel, ſeroit un Nombre ou une Multitude d'unités, *à quoi l'on ne pourroit plus ajouter une ſeule unité quelconque.* Ho! il ne faut pas s'évertuer beaucoup, pour conclurre de là *qu'il n'y*

a point d'Infinis de différens Ordres ; point d'Infinis plus grands les uns que les autres. Non, il ne faut pas d'efforts bien pénibles. Cependant, comme c'eſt un très nombreux parti, tant de Mathématiciens que de Philoſophes, qu'il s'agit de combattre en regle, on ſent qu'il y faut mettre quelques façons de plus. On retarde ſa marche; on differe la Concluſion, pour maſquer tant ſoit peu la choſe. Enfin, en battant la campagne, on fait ſi bien qu'il ne paroiſſe pas qu'on n'ait riſiblement avancé que ce qui étoit en queſtion; ou plutôt, parce qu'on eſt dupe de cette ſubtile Dialectique, ou s'imagine que les autres le ſeront auſſi. Mais l'Adverſaire s'en rit fort haut. Et qu'y a-t-il en effet de plus riſible que ce procédé? Une foule de très habiles gens, les *Clarkes*, les *Lockes*, les *Newtons* en tête, ſoutiennent *qu'il y a des Infinis réels plus grands les uns que les autres.* Ils s'abuſent, ſi vous voulez, & l'on doit les relever de leur erreur. La Logique en perſonne s'avance exprès pour cela, & poſe: DÉFINITION. *L'Infini eſt ce qui n'a pas de plus grand que ſoi.* Cela vous terraſſe en un inſtant. Ou, moins magiſtrale, mais fine & ruſée que c'eſt un prodige, elle vous gliſſe cette adroite Définition; *l'Infini eſt ce à quoi l'on ne peut rien ajouter.* Puis une tirade de Déductions verbeuſes, un fatras ſyllogiſtique, d'où vous voyez ſortir avec ſurpriſe, (auſſi qui s'en ſeroit méfié?) *qu'il n'y a pas d'Infinis plus grands les uns que les autres.* En bonne foi, n'eſt-ce pas ſe moquer de ſes Adverſaires, & ne leur pas ſuppoſer l'ombre du ſens commun, que de croire les réduire à l'aide de pareilles Définitions? Il faudroit qu'ils euſſent perdu l'eſprit pour les admettre, dans leurs Principes; & s'ils ne les admettent pas, qu'a-t-on gagné?

De leur côté, les Infinitaires ne procedent pas d'une façon plus légitime. Ils ajuſtent de même une Définition à leur doctrine. *L'Infini, c'eſt ce qui eſt plus grand qu'aucune Quantité finie;* non pas, prenez garde, *que quelque Quantité que ce ſoit* en général, mais *que quelque Quantité finie*, ſe laiſſant par là une porte de derriere, une reſſource pour des Infinis d'ordre inférieur; Infinis néanmoins, véritables Infinis en ce qu'ils ſont *plus grands qu'aucune Quantité finie.* Reſte à dire ce que c'eſt que *Quantité finie*, & la choſe eſt plus difficile à énoncer qu'on ne croiroit.

Quel-

Quelques-uns s'enferrent dans des Définitions qui ne leur ſont point avantageuſes: d'autres, plus circonſpects, répondent que cela eſt ſi ſimple qu'aucune Définition ne peut l'expliquer; & il ſe pourroit, Meſſieurs, qu'ils n'euſſent pas tort.

Leurs Antagoniſtes ſe moquent de cette réſerve; & les Wolfiens entr'autres, hardis Définiſſeurs de *Rien* & de *Quelque choſe*, trouvent fort étrange que le mot de *Fini* demeure ſans Définition. Ils vous en offrent à choix, dont, ſelon les regles de leur commode Dialectique, il n'y en a pas une qui ne leur donne gain de cauſe dès l'abord, en ſuppoſant ce que l'on conteſte. Ecoutons: cela gît en fait.

Qu'eſt-ce que le *Fini?*

Quelques-uns vous diront, *que c'eſt ce à quoi l'on peut ajouter; ce qui n'eſt pas le plus grand qui ſoit poſſible.* Mais ils ont affaire à gens qui leur montrent, ou qui prétendent leur montrer, des Quantités qui ne ſont pas les plus grandes poſſibles, des Quantités à quoi l'on peut ajouter ſans ceſſe, & qui certainement ne ſont pas finies. Nous en verrons des exemples par la ſuite. Au moins faut-il avouer que le Définiſſeur a ſuppoſé ce qui en queſtion.

D'autres vous diront, *que le Fini eſt ce qui eſt formé par une répétition réitérée de l'Unité: 1 plus 1 égale 2; 2 plus 1 égale 3; 3 plus 1 égale 4;* &c. Mais ils ont affaire à gens qui ſoutiennent qu'il y a *répétition finie* & *répétition infinie;* que le Fini eſt formé par une réitération finie de l'Unité, & l'Infini par une réitération infinie, en ſorte qu'en général la répétiton réitérée ne caractériſe pas plus, ſelon eux, le Fini que l'Infini. La Définition ſuppoſe donc encore miſérablement ce qui eſt en queſtion; elle ne peut être admiſe de part & d'autre. Or ce ſont d'admirables Logiens, que ceux qui n'en continuent pas moins à raiſonner à perte de vue ſur une Définition qu'on n'admet point.

Le Chef enfin, l'illuſtre *Wolff*, avec le plus grand nombre de ſes Diſciples, vous dira *que le Fini eſt ce qui a des limites, des bornes.* Autre ſuppoſition toute pure de la queſtion, puiſqu'ils ont affaire à des gens qui parlent familierement d'Infinis qui ont des bornes & des limites, mais des bornes, mais des limites à des diſtances infinies. Et ce ne ſont point

point gens obſcurs; c'eſt une multitude de Mathématiciens & de Philoſophes du mérite le plus diſtingué, qui parlent ce langage, le prennent à la rigueur, & croyent l'entendre. Le grand *Newton* l'a parlé toute ſa vie ſans le moindre ſcrupule. Notre ſublime *Leibniz*, après avoir varié quelque tems, y eſt revenu dans ſes dernieres années. Quelle foule après eux ne puis-je pas nommer? Tant de profonds génies peuvent avoir eu une opinion fauſſe: mais il valent bien la peine qu'on les réfute autrement que par une Définition arbitraire, arrêt trop deſpotique en vérité.

Voilà donc différens Sujets de controverſe qui ſe rencontrent dans la Queſtion de l'Infini.

„Comme il y a des termes, des bornes, des limites, à des di„ſtances finies, y en auroit-il à des diſtances infinies; ou y a-t-il des „diſtances qui puiſſent être dites infinies?

„Comme il y a des répétitions d'actes en nombre de fois fini, une „fois, deux fois, trois fois, &c. y en auroit-il en nombre de fois infini?

„Comme il y a des Finis plus grands les uns que les autres „doubles, triples, quadruples, &c. y a-t-il des Infinis qui ayent en„tr'eux ces mêmes rapports, &c.?„

Les Infinitaires aſſurent que oui, & les Anti-infinitaires ſoutiennent que non: mais, quoi qu'il en ſoit, les uns ni les autres ne rameneront perſonne à leur avis, en ne feſant qu'oppoſer une ſimple Définition qui ſoit le ſujet même de la diſpute. C'eſt le Cheval *Chameau* ou *Non-Chameau*, ſelon qu'il plait de le définir.

Ignore-t-on que, lorſque les Définitions ſont elles-mêmes des Propoſitions controverſées, elles ceſſent d'être d'aucun uſage? De là vient, (ce qui eſt effectivement déplorable,) que la méthode de définir n'eſt pas à beaucoup près auſſi utile qu'on ſe l'imagine, & que même la méthode de définir tout eſt très vicieuſe. L'utilité des Définitions en Mathématiques, pour le dire en paſſant, en a cauſé un étrange abus dans la Métaphyſique. Cependant la différence eſt grande. L'objet des Mathématiques eſt ſi viſible & ſi palpable, qu'il ne peut être matiere à controverſe. Je vois, je touche une figure qui a trois côtés: on ne diſpute pas plus que cela s'appelle un *Triangle*, qu'on ne diſpute qu'un long ſie-

ge de bois s'appelle un *Banc*. Pourtant faut-il apprendre à ceux qui ne le ſavent pas, ce que l'on entend par un *Triangle*, ou par un *Banc*; ce qui n'eſt jamais l'affaire que de quelques mots & d'un coup d'oeil. En Métaphyſique il n'en va pas de même; principalement à l'entrée, & lorſqu'on eſt encore fort près de l'origine des choſes, ou du moins de l'origine des connoiſſances. Tout roule alors ſur un nombre de perceptions primitives, très fines & très déliées, dont il n'eſt pas toujours facile que les hommes ſe rendent les uns aux autres un compte exact. Il n'eſt pas étonnant qu'on en diſpute, & que la plûpart du tems on ne s'entende point, ou que l'on ne ſache pas ſi l'on s'entend. D'un autre côté, il n'eſt pas moins néceſſaire qu'on faſſe effort pour s'entendre. Que dans cette vue, pour s'eſſayer & ſe tâter réciproquement, on ſe demande, ſi l'on veut, des Définitions: rien de mieux. Mais qu'on les donne ſoi-même, ces Définitions, & qu'on les donne pour des Principes, dont on puiſſe contraindre les autres à ſe ſervir, afin de les amener enſuite, pieds & poings liés, juſte où l'on ſouhaite; cela choque autant les regles de la bienſéance que celles du bon-ſens.

Une Vériré, Meſſieurs, bien importante, mais que je crains fort que nos habiles Dialecticiens ne goûtent jamais, c'eſt que, comme il eſt un art, très heureux & très uſité, ſoit dans les converſations, ſoit dans les écrits les mieux raiſonnés en tous genres, de ſuppléer à l'argumentation de l'Ecole & à la marche ſyllogiſtique; il eſt auſſi un art de ſuppléer à ce qu'on appelle proprement *Définitions logiques*, dans les cas au moins où l'emploi de ces Définitions ſe trouve en défaut; cas très fréquens, dont je reconnois deux ou trois eſpeces. La premiere eſt lorſque l'idée d'un mot eſt ſi ſimple qu'elle ne ſe peut point analyſer en de plus ſimples, & que cependant l'abus du langage a rendu ce mot équivoque, en lui donnant diverſes ſignifications, même parmi les Philoſophes. Ce mot, dans le ſens qui le fixe à l'idée ſimple, ne pourra pas être défini; mais, entant qu'il a pluſieurs ſignifications, il aura beſoin de Définition, ou de quelque choſe qui y ſupplée. Le ſecond cas, qui eſt de beaucoup le plus commun, eſt lorſqu'on ne peut dire ce qu'on entend par un mot, ſans énoncer une Opininion qui ſoit préciſément ce dont

on

on diſpute. Dès-lors, définiſſez tant qu'il vous plaira; vous nous apprenez ce que vous penſez, ce que vous ſoutenez; mais vous n'en êtes pas plus avancé par rapport au but de la Tractation. Vous vous trompez étrangement, ſi vous vous imaginez avoir poſé une baſe ſur laquelle vous puiſſiez bâtir; un principe fécond d'où vous puiſſiez déduire quoi que ce ſoit. C'eſt pourtant ce que l'on ſe propoſe avec la Méthode de définir; & ce qu'on obtient, quand les Définitions ſont de nature à être avouées de ceux à qui l'on parle, ainſi qu'elles le ſont toujours en Mathématiques. Quelquefois ces deux cas ſe combinent, & il s'en forme un troiſieme dont je donne pour exemple notre ſujet même, le *Fini* & l'*Infini*. Extrême ſimplicité dans l'idée; équivoque de mot, provenue du langage abuſif de quelques Sectes de Philoſophes; impoſſibilité d'une Définition préliminaire qui leve l'équivoque ſans ſuppoſer ce qui eſt en queſtion.

L'unique expédient qui reſte en pareil cas, c'eſt cet art de ſuppléer aux Définitions. Or en quoi conſiſte-t-il? Je vais, Meſſieurs, vous en montrer l'uſage, & en faire devant vous une heureuſe application à l'important ſujet qui nous occupe: mais ne m'en demandez point de regles ni de préceptes. Cet art, non plus que ceux qui tiennent le moins du monde au génie, n'eſt point aſſervi aux formalités de la routine; comme nous ne voyons point que l'art de converſer & de raiſonner humainement, & non pédantesquement, y ſoit en aucune ſorte aſſujetti. Un bon eſprit ſent & démêle en chaque rencontre, par une eſpece d'inſtinct, le tour qu'il doit prendre pour arriver au vrai, & pour y conduire les autres. Il marche: la ſûreté de ſa marche entraine avec rapidité ceux qui ſont faits pour le ſuivre; & c'eſt au fond d'eux-mêmes qu'il les conduit. Là, il leur découvre leurs propres penſées qu'ils ne connoiſſoient point; leurs penſées les plus naturelles & les plus vrayes, que des penſées aquiſes & moins vrayes tenoient comme étouffées.... Eſſayons; voyons s'il y auroit moyen de s'ouvrir quelques unes de ces routes, avec un peu de ſuccès.

Convaincu que c'eſt parmi nos idées primitives que nous devons chercher celles du *Fini* & de l'*Infini*, je remonte à tout ce qu'il y a de plus

ſimple. *Etre ; exiſter ; commencer ; continuer ; durer ; durer encore ; durer toujours ; ne pas durer toujours ; finir ; ne point finir ; ne finir jamais.* Y a-t-il un ſeul de ces termes, pris même dans la rigueur du ſens, qui puiſſe s'expliquer par d'autres? Tels ſeroient ſans contredit les premiers Elémens de cet *Alphabet des Penſées humaines*, dont j'ai déjà eu l'honneur de vous parler, Meſſieurs, il y a trois ans, à l'occaſion de l'*Aliquid* de M. *Wolff*. (*) Il n'eſt pas néceſſaire pour notre ſujet que le Catalogue ſoit pouſſé plus loin ; ces Elémens ſuffiſent. Arrêtons-nous y un inſtant, & demandons-nous quel eſt l'homme tant ſoit peu capable de raiſonner, (je n'en veux pas tant,) l'homme capable d'entendre une Définition, qui, faute de Définitions, héſite ſur la ſignification d'aucun de ces termes, ſurtout diſpoſés dans l'ordre où je les préſente? *Etre ; exiſter ; commencer ; continuer ; durer ; durer encore ; durer toujours ; ne pas durer toujours ; finir ; ne point finir ; ne finir jamais.* Cette ſuite nuancée, ſans autre explication, ne fixe-t-elle pas le ſens à ne pouvoir s'y méprendre?

Mais on chicane : la fureur des Définitions ſe jette à la traverſe : on m'objecte que *finir* c'eſt *ceſſer d'être* : voilà donc une Définition ; le mot n'eſt pas ſi ſimple qu'on ne puiſſe l'expliquer par d'autres.... L'expliquer, non ; mais l'énoncer, c'eſt autre choſe. *Ceſſer* n'eſt pas un mot plus clair, plus lumineux, que *finir* ; & même s'il eût été queſtion de ce mot *ceſſer*, au lieu de celui de *finir*, il eſt à parier que tel qui s'applaudit de l'Objection, eût cru faire merveille, de ſoutenir que *ceſſer* c'eſt *prendre fin*, c'eſt *finir*. Routine, encore un coup ! miſérable routine de Dictionnaires ! A l'article *Jour* ce mot s'explique par celui d'*Heure*. Le Jour *eſt une durée de vingt-quatre Heures*. A l'article *Heure* celui-ci s'explique par le mot *Jour*. L'Heure eſt *la vingt-quatrieme partie du Jour*. L'exemple eſt très fameux. Plus d'un Philoſophe le cite pour faire toucher au doigt le vice qu'on appelle *Cercle* en fait de Définitions ; & tous tombent dans ce Cercle, les plus méthodiques comme les autres, à chaque pas. C'eſt qu'il eſt impoſſible de n'y pas tomber, dès qu'on entreprend de tout définir. Voila pourquoi les Dictionnaires ſont pleins de ces ſortes de Définitions : mais ce n'eſt point un défaut dans un Dictionnaire, parcequ'on n'y ſuit point

(*) Mémoires de 1754. Remarque ſur cette Définition de M. Wolff : *Aliquid eſt cui aliqua Notio reſponder.*

point l'ordre de la génération des idées, & qu'on ne l'y peut ſuivre. Comme il ne s'y agit, pour ainſi dire, que de l'écorce des mots, ces Définitions *grammaticales*, & *non logiques*, ſont ſuffiſantes. Dans les matieres de Raiſonnement cela eſt inſoutenable : rien cependant de plus commun. Si l'on traite un ſujet, allons, ne fut-ce que pour la forme, on vous définit le Mot qui l'énonce : mais, ſi demain l'on en traite un autre, il ne faut pas jurer qu'un des Mots de notre Définition, un de ces Mots qui ne ſont aujourd'hui que ſubalternes, devenu principal, ne ſoit à ſon tour expliqué par le Mot qu'il expliquoit la veille ; & perſonne n'en eſt choqué.

En vérité c'eſt une honte, Meſſieurs, qu'il faille tant appuyer là deſſus ; mais vous ſavez tous pourquoi. Rendons cependant juſtice aux Philoſophes que j'ai en vue ; avouons qu'ils ont parfaitement compris à quel point l'Eſprit humain ſe paye de phraſes, & qu'ils l'ont ſervi ſelon ſon goût. Préſentez à l'eſprit de l'homme l'idée la plus familiere ; il croit pour la ſaiſir mieux avoir beſoin d'une phraſe. S'agit-il du mot *Choſe* ? Qu'entend-il, s'il n'entend pas ce mot-là ? Et en quels mots lui en compterez-vous la monnoye ? Il ne laiſſera pas d'être bien aiſe que vous lui diſiez que Choſe, *c'eſt ce qui eſt, ce qui eſt un Etre.* S'agit-il du mot *Etre* ? Il ſera ſatisfait ſi vous lui dites qu'Etre, *c'eſt ce qui eſt quelque Choſe.* Tantôt il verra avec plaiſir que vous lui expliquiez *quelque Choſe* par *Rien.* Quelque Choſe, *c'eſt ce qui n'eſt pas un pur Rien.* Une autre fois vous pourrez lui expliquer *Rien* par *quelque Choſe.* Rien, *c'eſt ce qui n'eſt aucune Choſe, ce qui n'eſt pas quelque Choſe.* Mais vous l'extaſierez ſi, dans une enfilade de Propoſitions bien didactiques, en un Paragraphe exprès, accompagné de ſon titre & de ſa ſcholie, précédé de ſes lemmes, & ſuivi de ſes corollaires, le tout étiqueté, numéroté, vous avez l'aſſurance de lui apprendre que *Quelque Choſe eſt ce à quoi répond une Repréſentation de quelque Choſe ;* ce qui un peu plus analyſé ſe réduit à *Quelque Choſe qui eſt quelque Choſe à quoi répond quelque Choſe qui repréſente quelque Choſe qui eſt quelque Choſe.* * Il eſt tourné de façon, ce pauvre Eſprit humain, qu'il s'imagine toujours qu'une ſuite de mots, une phraſe, lui eſt plus intelligible qu'un Mot ; & de là ce grand crédit des Définitions. Du reſte il n'eſt pas difficile à contenter : peu curieux de comprendre, il ne veut que voir faire les façons qu'il

* Mémoires de 1754.

juge néceſſaires pour le faire comprendre. En parlant on l'éclaire quelquefois; il ſe croit plus de lumieres quand on a parlé.

Que je ſuis déraiſonnable, pour moi, Meſſieurs, de parler tant & ſi longtems pour le déſabuſer de ſa chimere! Car ce n'eſt pas là l'uſage qu'il aime de la parole.... Obtiendrai-je, avec tout cela, de nos Philoſophes, qu'ils m'avouent que l'on conçoit très bien ſans Définitions ce que ſignifient ces mots: *Durer; durer toujours; ne pas durer toujours; finir; ne pas finir; ne finir jamais?* Entendre ce que ſignifie un mot, ce n'eſt point dire qu'on ait la perception la plus adéquate de ſon idée. Ce n'eſt point du *comment* de la choſe; c'eſt *du fait & de la réalité*, qu'il s'agit. Il n'eſt pas queſtion, ſi l'on comprend comment quelque choſe *exiſte*, comment quelque choſe *dure* ou *ne dure pas toujours*, comment quelque choſe *finit* ou *ne finit jamais*. Tout conſiſte à comprendre qu'il eſt réel & de fait, que quelque choſe *exiſte*; que quelque choſe *dure*; que quelque choſe *ne dure pas toujours*; que quelque choſe *finit*; & que quelque choſe *ne finit jamais*. JAMAIS & TOUJOURS! Deux mots qui renferment l'un & l'autre le premier germe de la *Notion de l'Infini*, & qui ne laiſſent pas d'être ſi clairs qu'ils précedent dans notre eſprit tous les Axiomes, & toutes les Définitions de l'Ontologie & de la Logique. Il n'y a qui que ce ſoit au monde, qui dès qu'il réfléchit, ne ſente qu'il y a *toujours* quelque Etre exiſtant, ſoit un ſeul, ſoit pluſieurs; & que *jamais* il n'arrive que rien n'exiſte. Point d'enfant doué d'un peu d'intelligence, qui ne conçoive que deux & deux feront *toujours* quatre, & ne feront *jamais* cinq. L'idée de *jamais* & de *toujours*, qui n'eſt autre que celle de l'*Infini en durée*, eſt donc une des plus ſimples & des premieres qui ſoyent en nous.

Ici l'on m'objecte, contre l'Expérience de ſix mille ans & le Sens intime de la conſcience, *qu'il n'eſt pas poſſible de voir clair en plein midi, avant que d'avoir ſoumis chaque rayon de la Lumiere à l'analyſe du grand Newton, dans un Cours d'Optique.* Autant vaut, Meſſieurs. On prétend, qu'avant que d'avoir ſaiſi la Doctrine Wolfienne, ou Leibnitienne, ſur le *Tems*, la *Durée*, la *Succeſſion*, &c. par une étude profonde de l'Ontologie, on ne peut avoir d'idées claires de ce qui ſignifient *Jamais* & *Toujours*, ni à plus forte raiſon de ce que ſignifie *ne finir jamais*, *durer toujours*. Voici la preu-

preuve. „Le mot *Tems* eſt un de ceux, dit-on, dont les hommes, & les „Philoſophes-mêmes, ont les idées les plus confuſes & les plus fauſſes: il „n'a pas falu moins que le génie de *Leibnitz*, & l'admirable dialectique de „*Wolff*, pour le fixer à un ſens vrai, lequel n'eſt reconnu que par les Adep- „tes. Qui dit *toujours*, dit *en tout tems*; qui dit *jamais*, dit *en aucun tems*, „L'idée de *Tems* ſe retrouve encore dans *durer* & dans *finir*. Comment „tenir pour claires des Expreſſions identiques à un terme ſi obſcur?„ Et moi; je demande; comment tenir, pour obſcur un terme identique à des expreſſions ſi claires? Auſſi, indépendamment de toutes les fauſſes idées que je ne nie pas que les hommes y joignent, je tiens le mot *Tems* pour très clair, & ſi clair qu'il ne ſauroit être défini. Preuve ſans réplique. De grace! eſt-ce quelque choſe de clair ou d'obſcur qu'un Axiome, & que le premier de tous les Axiomes, le grand Axiome; *Une Choſe ne peut pas être & n'être pas, en même tems?* Cet Axiome eſt-il clair par lui même, & parce que tous les termes en ſont très clairs, auſſi bien que leur connexion? Ou n'eſt-il clair qu'après la définition de chacun des termes? Mais comment les définir? L'intrépide exactitude de *Wolff* qui le tente, n'y vient qu'après avoir fait mille fois uſage de l'Axiome, dans le gros volume de ſa Logique, & dans une grande partie de l'Ontologie, qui n'eſt pas non plus de courte haleine. Enfin, ce n'eſt que bien avant dans l'Ontologie, & après maint & maint uſage de l'Axiome, que notre Philoſophe parvient à nous expliquer ce que c'eſt que *choſe*, ce que c'eſt qu'*être*, ce que c'eſt que *même*, & ce que c'eſt que *même tems*. Quoi! faut-il croire, non qu'un Mortel ordinaire, (cela s'en va ſans dire,) mais qu'un Adepte de la Philoſophie Wolffienne, ne conçoit bien *qu'une Choſe ne peut pas être & n'être pas en même tems*, qu'au bout de deux gros Volumes, ou peu s'en faut? Ou, conçoit-on ce grand Principe, ſans concevoir clairement, nettement, diſtinctement, les termes qui l'expriment? Cela ſeroit aſſez plaiſant.

Pour déterminer tous les termes clairs par eux-mêmes, voici donc une Méthode bien facile.... Au fond la choſe n'a pas beſoin de Méthode. Un bon eſprit, je l'avoue, ſent de reſte ſi un terme eſt clair, ou s'il ne l'eſt pas. Que la Recette ſoit pour ceux qui ne ſauroient ſe paſſer de quelque eſpece de Méthode.... Prenez ce premier Axiome; *une Choſe ne peut pas être & n'être*

n'être pas en même tems. Tournez & retournez-le en différentes phraſes équivalentes ; par exemple, *il n'eſt pas poſſible qu'une Choſe ſoit & ne ſoit pas tout enſemble ;* ou *il eſt impoſſible qu'une Choſe ſoit & ne ſoit pas à la fois ;* &c. Ajoutez-y ſes Conſéquences les plus générales & le plus immédiates. *Tout ce qui eſt, eſt toujours tandis qu'il eſt. Rien n'eſt jamais avant qu'il ſoit, & n'eſt encore quand il n'eſt plus. Quoi que ce ſoit ne peut être & n'être pas, ſi ce n'eſt en divers tems. Avoir été d'une maniere, & n'avoir pas été de cette maniere, ſont pour le moins deux inſtans l'un après l'autre.* &c. Faites enſuite le dépouillement de tous ces termes pour en compoſer une liſte, en y joignant leurs oppoſés, leurs contraires, leurs annexes, & les ſynonymes tant des uns que des autres, autant qu'il s'en préſente ; *être, exiſter, choſe, peut, poſſible, impoſſible, tems, même, divers, encore, avant, après, tandis, toujours, jamais, commencer, continuer, durer, finir,* &c. Si cela eſt bien fait, vous tiendrez le véritable *Alphabet des Penſées humaines ;* un Recueil exact des *Termes primitifs*, qu'il eſt abſurde d'entreprendre de définir, & dont le nombre eſt beaucoup plus grand qu'on ne s'imagine. J'ai crû jadis qu'on les pourroit réduire à une trentaine ; mais c'eſt trop peu. Toute la difficulté ſeroit après cela de nuancer la liſte, & d'y mettre un ordre naturel, de ſorte que la diſpoſition des termes n'y fût pas laiſſée au hazard, comme celle des Lettres d'un Alphabet. Les termes ſynonymes devroient être diſpoſés ſur une même ligne, comme n'étant que différentes formes du même caractere, ou différens caracteres auxquels ne répond qu'une même idée. On pourroit auſſi, vis-à-vis de chaque terme, ſur d'autres colonnes, mettre ſon oppoſé ou ſon contraire ; & tout cela pourroit n'être compté que pour un ſeul Elément ; puiſque qui conçoit *durer*, par exemple, conçoit également *finir*, & qui conçoit *toujours*, conçoit *jamais*, &c. De deux ou trois Elémens ſimples réunis, tels que *exiſter encore, durer toujours, ne finir jamais*, &c. ; ſe forme ce qu'on peut appeller les *Syllabes de la Penſée*, dont le nombre eſt très grand. Ces Syllabes intellectuelles ne ſont pas plus ſuſceptibles d'Explications ou de Définitions que les Caracteres ou Termes ſimples ; il ſuffit de les *épeler*. Lorſqu'à une *Syllabe* ou à un *Mot*, ou à une *Phraſe* entiere de nos Penſées, l'uſage a ſubſtitué un Caractere unique, cela répond à ces

Abbré-

Abbréviations dont certaines Ecritures, et la Grecque entr'autres, fourmillent ; par exemple, *poindre* qui ſe dit proprement d'une Lumiere qui commence à paroître ; *jaillir* qui ſe dit d'un Liquide qui s'élance par une ouverture étroite ; *homme*, *animal*, *plante*, *ame*, *eſprit*, & une infinité d'autres. Ce ſont ces Elémens, ſimples à la vue, mais complexes en ſoi, qui ſont le gros des Langues. Or ce n'eſt que de ces Elémens complexes dont il eſt poſſible d'exprimer la valeur par de bonnes Définitions. Souvent la choſe n'eſt pas néceſſaire : ſouvent auſſi l'on feroit très mal d'y manquer, & l'on peut s'en diſpenſer, quand on a le moindre lieu de croire que cette valeur n'eſt pas bien connue de ceux à qui l'on parle.

Au reſte quand je dis, Meſſieurs, que *tems*, *même*, *divers* ; & *même tems* & *divers tems* ; *durer* & *finir* ; *toujours* & *jamais* ; enfin *durer toujours* & *ne finir jamais*, qui ſont ici notre objet, parce qu'ils nous menent immédiatement à la *Durée infinie*, ou à l'*Infini en durée*, & de là à toutes ſortes d'*Infinis* : quand je prétens donc, que ce ſont des idées élémentaires & primitives, dont on ne ſauroit demander raiſonnablement de Définitions, je ne nie pas qu'on ne puiſſe faire de chacune de ces idées le ſujet d'une multitude de Propoſitions, vrayes ou fauſſes ; mais je nie qu'aucune de ces Propoſitions, vrayes ou fauſſes, ſoyent ce qu'on doit appeller des Définitions. Toute Propoſition qui énonce ce qu'eſt une Choſe, & par conſéquent ce que ſignifie un Mot, (l'un, ſelon moi, ne va pas ſans l'autre,) n'eſt pas pour cela une Définition. *Le Cercle eſt un Polygone d'une infinité de côtés*, ou *le Cercle eſt une Ellipſe dont les foyers coïncident* ; ces Propoſitions diſent très véritablement ce qu'eſt un Cercle, & par conſéquent ce que ſignifie le mot *Cercle*. Oui, le mot *Cercle* ſignifie *un Polygone d'une infinité de côtés*, parce que le Cercle en effet eſt cela ; & il ſignifie auſſi *une Ellipſe dont les foyers coïncident*, parce que le Cercle eſt encore cela. Tâchez de me dire une Choſe, ſans me dire ce que ſignifie ſon Nom ; & tâchez de me dire, mais bien, ce que ſignifie ſon Nom, ſans me dire ce qu'eſt la choſe-même. Ainſi la Diſtinction vulgaire de *Définitions de Choſes* & de *Définitions de Noms* ne feroit rien ici. Je la tiens pour très chimérique, cette Diſtinction ; 1°. au ſens le plus vulgaire, parce qu'encore un coup je défie de m'expliquer bien ce que ſignifie un Mot, ſans me donner

une idée nette & déterminée de la choſe déſignée par ce Mot, & je défie de me donner une idée nette & déterminée d'une Choſe (d'une Choſe, s'il vous plaît, que vous me nommez,) ſans m'expliquer, dès-lors, au mieux ce que ſignifie ſon Nom. 2°. Quant à la Diſtinction imaginée par *Leibnitz*, & ſuivie par *Wolff*, de Définitions qui expliquent, & de Définitions qui n'expliquent pas la Poſſibilité de la Choſe, ce qu'il leur a plû d'appeller *Définitions de Choſes* & *Définitions de Noms*; je remarque d'abord, que le cas, où une Propoſition unique, & très courte, peut rendre ſenſible à l'eſprit la Poſſibilité d'une Choſe, eſt en vérité ſi rare, que cela ne vaut pas la peine d'en faire une eſpece particuliere. Enſuite, je dis que ce cas & ſon contraire conſtituent tout au plus des Définitions plus ou moins parfaites, mais qu'il n'y a pas la moindre raiſon de qualifier l'une de Définition de *Choſe*, & l'autre de Définition de *Nom*, chacune étant *de Choſe & de Nom* tout à la fois, chacune expliquant tout à la fois ce que ſignifie le Nom & ce qu'eſt la Choſe. La Légiſlation de *Wolff*, & celle même de *Leibnitz*, n'eſt pas aſſez généralement reconnue, pour faire recevoir une Dénomination ſi arbitraire par pur decret. Enfin, quoi qu'il en ſoit, ces Définitions dont nos Méthodiſtes font tant de fracas, & qui ſont ſans doute ſi eſſentielles à la vraye Méthode, quand on ſait bien les employer; que ſont-elles, Meſſieurs? Rien autre choſe que la premiere & la plus ſimple réponſe qui ſe puiſſe faire à la Queſtion; *Qu'entendez-vous par ce terme là?* ou *Quelle eſt l'idée que vous déſignez par ce terme?* Cela eſt tout un, vous dis-je. Si la Queſtion eſt légitime, la Réponſe pourra l'être; mais il n'y aura que cette premiere Réponſe qui ſoit *Définition*. Toutes les autres Propoſitions qui ſeront formées de celle-là, quoiqu'elles expliquent encore le mieux du monde, & ce que ſignifie le terme, & ce que l'idée même eſt en ſoi, ne ſont plus des Définitions; ce ſont des Aſſertions, qui de conſéquences en conſéquences ſe peuvent multiplier tant qu'on voudra. Mais ſi la Queſtion n'eſt pas légitime; ſi le terme & l'idée ſont primitifs, élémentaires, clairs par eux-mêmes; préliminaires à tous les Axiomes; antérieurs à toutes les Définitions; s'il n'eſt pas poſſible de ſuivre le moindre procédé didactique ſans les ſuppoſer mille fois; quelle réponſe y pourriez-vous faire? Cette clarté intrinſeque du terme & de ſon idée fait elle-même la réponſe,

& Digitized by Google

& tient lieu de Définition. Quelques Propoſitions enſuite que vous formiez, qui diſent ce qui convient à l'idée & ce qui n'y convient pas, ce que ſignifie le terme ou ce qu'il ne ſignifie pas; tout cela ſera parallele à ces Aſſertions tirées de Définitions antécédentes: mais on ſe gardera bien de donner rien de tout cela pour *Définitions*, ſi l'on redoute la burlesque tournure de l'*Aliquid*, de ce *Quelque choſe* qui eſt *quelque choſe à quoi répond quelque choſe qui repréſente quelque choſe qui eſt quelque choſe.* Il faut être, Meſſieurs, bien incorrigible, ſi l'on n'eſt pas corrigé par cet exemple. Ceci poſé, je reviens préſentement à mon ſujet.

C'eſt donc dans l'idée primitive de *Jamais* & de *Toujours*, que je cherche l'idée de l'*Infini*; idée primitive elle-même. Le mot, le terme *Infini* peut-être l'eſt un peu moins, mais certes l'idée l'eſt bien autant. Dès que j'ai conçu *Jamais* & *Toujours*; dès qu'un rayon d'intelligence, qui a devancé tous les procédés didactiques, m'a fait comprendre que quelque choſe *dure toujours*, que quelque choſe *ne finit jamais*, (ſoit Dieu, ſoit le Monde;) qu'a-t-il falu qu'entendre appeller cela *Durée infinie*, pour attacher aux mots de *Fini* & d'*Infini* des idées très claires, antérieures à quelques Définitions que ce puiſſe être? Maintenant changez la phraſe: dites, ſi vous voulez, dites que la Durée finie *eſt la Durée de ce qui finit*, & la Durée infinie *eſt la Durée de ce qui dure toujours*, & la Durée finie *la Durée de ce qui ne dure pas toujours*: ou, formez à l'aide des mots *être* ou *exiſter*, *commencer* ou *finir*, *continuer* ou *ceſſer*, avec *jamais* & *toujours*, telles phraſes qu'il vous plaira; vous préſenterez des Synonymes, & non des Définitions. Cette permutation de termes équivalents, ou identiques, n'eſt cependant pas ſans utilité. Elle ſeroit abſurde, ſi on la donnoit comme Définition; mais elle ne l'eſt point, lorſqu'on n'a pour but que de ſe *tâter*, ainſi que j'ai dit, & de ſe convaincre les uns & les autres, qu'on attache aux Mots les mêmes idées. Ici nous y trouvons de plus cet avantage: L'*Infini en durée* eſt viſiblement la même choſe que le *Toujours*; & le *Fini en durée* la même choſe que le *Non-Toujours*. Nous apprenons donc à n'être point la dupe de la forme négative du mot INFINI, comme s'il répondoit à quelque choſe de moins

réel. C'eſt au contraire bien lui qui eſt le *poſitif* réel, & c'eſt le Fini qui eſt le *négatif*. Suivons ce fil.

On s'imagine, Meſſieurs, que nous n'avons qu'une idée négative de l'*Infini*, & l'on ſe fonde ſur la forme négative du Mot. Il ſemble que qui dit l'*Infini*, dit ſeulement *ce qui n'eſt pas le Fini*; ce qui n'eſt aucune des *Quantités finies* que nous voyons & manions, & qui nous ſont ſi familieres. Combien ne trouve-t-on pas paradoxe la penſée des Diſciples du Pere *Malebranche*, qui croyent, avec leur Maitre, que l'Infini en tous genres, en durée, en nombre, &c. nous eſt connu *plus clairement & plus directement* que le Fini, & même *antérieurement* au Fini? Mais, outre le Pere *Malebranche* & ſes Diſciples, *Leibniz*, notre grand *Leibniz*, a eu toute ſa vie cette penſée. Lui qui a tant varié dans les détails & dans l'application de la Doctrine de l'Infini, tantôt croyant le Monde *un Infini actuel* en nombre, en étendue, & peut-être même en durée; tantôt ſoutenant *qu'il n'y a aucune ſorte d'Infini actuel*, compoſé de parties, ſoit de durée, ſoit d'étendue, ni par conſéquent en nombre: *Leibniz*, dis-je, n'a pas laiſſé toute ſa vie de reconnoître une idée *abſolue* de l'Infini; idée, ſelon lui *poſitive & antérieure à celle du Fini qui n'en eſt qu'une limitation.* Il le dit expreſſément, entr'autres dans ſes *Réflexions ſur l'Eſſai de l'Entendement humain de* M. Locke, fort longtems avant ſa mort; & je le trouve encore dans cette penſée l'année de ſa mort. Défendant le P. *Malebranche* ſur pluſieurs points dans une *Lettre à M.* Rémond *au ſujet de la Réfutation du P.* du Tertre, il approuve le ſentiment des Cartéſiens, ou Malebranchiſtes, *qui conſiderent avec raiſon*, dit-il, *l'Infini comme antérieur au Fini qui n'eſt qu'une limitation.*

MÉMOI-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE BELLES-LETTRES.

* *
*

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE DE BELLES-LETTRES.

* * *

Digitized by Google

DISSERTATION

SUR

JODUTA,

IDOLE DE LA SAXE ET DE LA MARCHE,

PAR M. KUSTER. (*)

Traduit du Latin.

Le nom de l'Idole à laquelle on a rendu autrefois un culte religieux dans la Saxe & dans la Marche, & dont nous avons deſſein de faire l'objet de quelques recherches, s'écrit en différentes manieres. Ceux qui en ont fait mention, l'ont appellée tantôt *Cedutum*, ou Zedutte, tantôt Zeduck, tantôt *Joduta*, & Gedeute. Les mêmes Auteurs alléguent chacun des raiſons de ces dénominations & des leurs dérivaiſons: nous rapporterons ici ſuccintement ces diverſes opinions, & nous y joindrons la nôtre.

Ceux qui écrivent *Cedutum*, ou *Zedutte*, ont corrompu ce mot, comme cela eſt arrivé à pluſieurs autres noms, qui, ayant été mal entendus, ont ſouffert une prononciation qui ne s'accorde pas avec leur origine. Au lieu donc de Jodutte, ou *Joduta*, qu'il faloit dire, le peuple a fait de là Zedutte, en tordant véritablement ce nom. Pour faire mieux com-

(*) On eſt obligé de reſſerrer ici l'étendue de la Claſſe de Belles-Lettres; tant parce que quelques Académiciens n'ont pas fourni, ſans doute par de bonnes raiſons, les Mémoires qui auroient pu & du entrer dans ce Volume, que parce que le Libraire preſſe d'en finir l'impreſſion, & qu'on publiera encore dans le cours de cette année un autre Volume où cette Claſſe occupera un eſpace d'autant plus grand.

comprendre comment la choſe eſt arrivée, il ne faut pas paſſer ſous ſilence, que le mot Jodutt, ou *Jodutha*, vient de la Langue Italienne, & ſignifie la même choſe que les mots Latins *me adjuvante*. Il y en a pourtant qui dérivent *Joduth* de l'Hebreu, *Jodeim*, *les Devins*, ceux qui ſavent l'avenir, prétendant que les Saxons ont fait uſage de cette pratique, avant que d'être éclairés du flambeau de la Révélation. Et même, dans les Verſions de la Bible en Suédois, en Danois, & en bas Saxon, l'expreſſion de *Jeremie*, que *Luther* a rendue par; ſie ſchreyen Zetter über dir, eſt cenſée répondre à l'invocation de *Jodutta*. Je n'examinerai pas ici, ſi l'on peut rapporter ce terme à l'ancien uſage, ſuivant lequel les Nations barbares, quand il ſurvenoit quelque danger imprévu, ou qu'elles étoient ſaiſies de quelque terreur panique, crioient aux armes avec véhémence & comme tout d'une voix. On ſçait que les Germains pouſſoient des hurlemens dans ces occaſions; & *Tacite* nous parle des chants affreux dont ils rempliſſoient l'air en allant au combat. C'eſt peut-être d'après cette idée que *Weiſs* a donné une nouvelle explication du nom de *Jodutt*, en le rendant par *gout*, qui veut dire, *ſors pour prendre les armes & repouſſer l'ennemi*; mais ce ſont là de ſimples jeux de mots, auxquels je ne daigne pas m'arrêter.

Ceux qui adoptent le mot de Zeduck, veulent le dériver des citations qui ſont en uſage dans la Juriſprudence; par où l'on inſinue aſſez clairement que le ſtatue, ou l'Idole en queſtion, avoit une eſpece de Tribunal, devant lequel on citoit ceux qui s'étoient rendus coupables de certains crimes, & l'on inſtruiſoit leur procès.

Quant à l'étymologie qui remonte au mot Zeter, elle n'eſt pas moins manifeſte: & l'on y voit la formule connue & uſitée encore aujourdhui dans la ſentence de banniſſement, qui eſt accompagnée de la clameur dite *Zeter* & *Mordio*.

Enfin il eſt tout auſſi aiſé de voir ſur quoi ſe fondent ceux qui penſent que *Joduthu* eſt la même choſe que Gedeute, mot qui revient à celui que notre Langue moderne exprime par Bedeute, ou Bedeutung, &

& qui ſignifie *Monument*. Ils croyent que le mot Gebut a pu être déduit naturellement de là, & employé pour déſigner quelque Statue, ou Idole, qu'on avoit érigée comme un mémorial. Les exemples en étoient fréquens dans l'Antiquité; & nos Saintes Ecritures en fourniſſent pluſieurs, parmi leſquels il ſuffira d'indiquer le célébre Monument, dit *Eben-etzer*.

Je paſſe à la figure de cette Idole, à l'occaſion dans laquelle elle fut érigée, & au culte qu'on lui rendoit. Ceux-même qui ne ſont pas d'accord ſur l'étymologie de ſon nom, conviennent que *Jodutha* doit ſon origine à ce *Lothaire* de Saxe, qui remporta une inſigne victoire ſur l'Empereur *Henri V*. Pour peu qu'on ait quelque teinture de l'Hiſtoire, on ſçait que l'Empereur reçut dans cette journée le coup le plus funeſte. La bataille ſe donna l'an 1115 près de *Gerbſtadt*; *Henri* y perdit quarante cinq mille hommes, & en même tems toute l'autorité qu'il avoit en Saxe. Depuis ce tems-là il ne put ſe relever, le Pape & l'Archevêque de Magdebourg ayant fulminé contre lui une excommunication ſolemnelle, tandis que de ſon côté l'Archevêque de Mayence le perſécutoit avec un acharnement implacable. Les campagnes de *Manſfeld* furent le théatre de cet évenement, près du bois qu'on nomme en Allemand le *Welphs-holtz*. *Lothaire le Saxon*, nommé auſſi quelquefois *Luder*, y triompha; & pour perpétuer la mémoire de ſon triomphe, fit ériger la ſtatue en queſtion, ſous la figure d'un homme en habillement de guerre, tenant un ceſte de la main droite, & ayant au bras gouche un bouclier, ſur lequel étoient les armes de Saxe, ſavoir un cheval blanc ſur un écu rouge. C'eſt d'*Albert Krantzius* que nous tenons ce fait. Si l'on peut hazarder ici une conjecture, *Lothaire*, qui ſavoit parfaitement jusqu'où alloit l'inimitié entre l'Empereur & le Pape, poſa ce Monument, afin que la poſtérité ſe ſouvînt, que des Payens, (car on réputoit tels ceux que les foudres de l'excommunication Papale frappoient,) avoient combattu dans cette occaſion contre des Chrêtiens, que par un juſte jugement de Dieu ils avoient été défaits, & que ce n'étoit uniquement que parce que les Saxons s'étoient appuyés ſur le ſecours d'enhaut,

que cette journée avoit été ſi heureuſe pour eux: d'où vint à la ſtatue le nom de *Joduta*, ou *divine aſſiſtance.* Voyons à préſent quel culte religieux lui fut rendu.

Les Saxons, auſſi-bien que les peuples qui habitoient autrefois notre Marche, mirent *Jodutha* au nombre de leurs Divinités. Les Germains avoient alors un grand nombre de ces Divinités ſubalternes, dont le docte *Schedius* a donné l'énumération. Je n'ignore pas que *Theodore de Haſe*, ce Théologien & Philoſophe diſtingué de *Breme*, dans ſes *Paralipomenes* ſur la ſavante Diſſertation dans laquelle *Gerhard de Maſtricht* a examiné ce qui concerne *Jodutha*, prétend que cette ſtatue doit être effacée du catalogue des Idoles; mais les raiſons ſur leſquelles il s'appuye, ſont plus ingénieuſes que ſolides. Pour oppoſer autorité à autorité, j'en appelle à *Severin*, qui, dans ſes notes ſur *Adam de Breme*, a placé cette ſtatue au rang des Idoles, auxquelles nos Ancêtres, encore infectés des ſuperſtitions Payennes, ont rendu un culte: à quoi je pourrois joindre bien d'autres témoignages. Quel doute pourroit-il ſurtout reſter à cet égard, ſi nous prouvons le cas qu'on a fait anciennement de cette Idole, & de la Montagne ſur laquelle elle étoit placée; & ſi nous indiquons des ſermens, ou imprécations, dans leſquelles le nom de *Jodutha* étoit employé? Dans la Comté de *Manſfeld*, où nous avons déjà dit que s'étoit donnée cette ſanglante bataille, le peuple ignorant & groſſier adoroit véritablement cette Statue. Ce fut l'Empereur *Rodolphe* qui abolit cette ſuperſtition, & qui fit conſtruire une Chapelle où l'on plaça cette Inſcription.

Anno milleno centeno ter quoque quino
Silvam Welponis perfudit gutta cruoris.
Sunt fere necati XL mille quinque,
Ipſo nempe die Dionyſii martyris almi.

Les Monumens hiſtoriques nous apprennent que cette Chapelle fut en grande réputation chez les Catholiques Romains, & qu'on y faiſoit de fréquens pélérinages, apparemment en mémoire des Chrêtiens qui avoient été tués dans la bataille, & pour les honorer. Les Meſſes & les

les Indulgences faiſoient dans cet endroit un trafic des plus abondans; & comme on avoit placé le ſimulacre de *Jodutha* dans cette Chapelle, le pauvre peuple la vénéroit, & on lui avoit perſuadé entr'autres choſes qu'elle guériſſoit du mal de dents, lorsqu'on en détachoit un petit morceau de bois, & qu'on le portoit à ſa bouche. Il y a plus. *Reinerus Reineccius*, Savant diſtingué, prétend qu'il y a eu un Saint *Jodutha*, & qu'on lui rendoit un culte dans certain territoire nommé *Delbruch*; à l'occaſion de quoi l'on avoit fait ces deux Vers Allemands;

S. Jodutte war ein heiliger Mann.
Wenn der Feind kam ging er voran.

Il eſt auſſi fait mention en divers endroits d'une Montagne ſur le bord du Weſer, qui tiroit ſon nom de *Juditha*. Il y a encore un Proverbe uſité en Weſtphalie: *je te battrai tant que tu invoques* Juditha. Je crois qu'on peut tirer de là un indice du Saint en queſtion, tout comme on en tire un de *Crodon*, Divinité ſubalterne des Germains, en faiſant attention à la formule d'exécration uſitée encore aujourdhui, du Croden-tufel. Je puis ajouter qu'on fait mention d'un bois conſacré au culte de *Jodutha*; & qu'on ſait aſſez que chez nos Ancêtres les bois ſurtout, & auſſi le bord des fleuves, étoient les lieux où les Divinités recevoient les hommages de leurs adorateurs. Il y a une Ville aſſez conſidérable dans la Marche Moyenne ſur l'Oder, *Writzen*, dont les habitans ont eu beaucoup de dévotion pour *Jodutha*. Près de cette Ville, eſt la Montagne de *Luſeberg*, dite peut-être ainſi pour *Louiſeberg*, de l'autre côté de laquelle, vers *Schultzendorff*, il y avoit un Monument de *Jodutha*, comme je l'ai appris par un fragment des Annales de *Writzen*, dreſſées par *Paſchaſe Albrecht*, Conſul de cette Ville, mort il y a environ quarante ans, qui dit avoir encore vû les débris de la baſe ſur laquelle avoit été érigée la ſtatue de *Jodutha*. Pendant les tems de guerre on avoit porté cette Statue dans un canton marécageux, où ſont quelques métairies tout proche de la Ville, (cela s'appelle le *Bruch*,) afin qu'elle y fut plus en ſûreté, ſuivant le rapport du même Annaliſte. Il ajoute que, devant la porte de la Vil-

le qui touche à l'Hôpital, ſur le chemin qui conduit à Berlin, la ſtatue de pierre de *Jodutha* étoit placée ſous une arcade, auſſi de pierre, à trois cens pas de la porte, & que les paſſans s'arrêtoient pour l'adorer, & pour implorer ſon ſecours, à cauſe des mauvais chemins dans lesquels ils alloient s'engager. On demandoit ſurtout au Saint qu'il prit les chevaux ſous ſa protection, afin que les Charretiers par leur brutalité, ou en voulant trop les preſſer, ne leur fiſſent point de mal. Et une preuve que la route étoit en effet bien mauvaiſe, c'eſt qu'il ſe trouvoit toujours là des poſtillons tout prêts, qui pour une petite rétribution atteloient leurs chevaux devant les voitures trop chargées, au village de *Lüderſdorff*, où la Montagne devient trop difficile. Les habitans du canton marécageux dont nous avons déja parlé, prioient auſſi *Jodutha* de protéger leur bêtail, & de favoriſer leur pêche. Cette ſtatue a été engloutie dans les eaux, où *Adam Spengler*, Inſpecteur de *Writzen* dans le ſiecle paſſé, voulut qu'on la jettât, ſoutenant avec beaucoup de chaleur qu'elle étoit incompatible avec le culte du vrai Dieu. On ne ſauroit être bien aſſuré, ſi cette idolâtrie eſt pleinement abolie; mais ce qu'il y a de certain, c'eſt que des imprécations uſitées encore aujourdhui en ſont de triſtes veſtiges. Les gens de ces quartiers-là diſent fréquemment; Zeter (ou Zechen) über den Jadut; Zecher über den betrübener; ce qui s'employe, tantôt comme un ſigne d'admiration, tantôt comme une exécration.

Il s'enſuit de là qu'on ne doit pas regarder comme une fable ce qu'on rapporte d'un ſimulacre de *Jodutha* détruit à *Marbourg*, par *Fridéric*, Evêque de *Halberſtadt*; d'autres diſent par *Werner*, Evêque de *Merſebourg*, fondateur d'un Monaſtère de S. Pierre, qui exiſte encore aujourdhui dans le fauxbourg de cette ville qui porte le nom d'Altenbourg.

Je vais terminer ces recherches par trois remarques. 1. Ce que je viens de rapporter de *Writzen*, a lieu auſſi dans un territoire marécageux près de Breme, où la même formule d'imprécation etoit uſitée vers la fin du ſiecle paſſé. J'en ai pour garant l'Auteur

teur d'un Journal Littéraire qui paroiſſoit il y a quelques années, M. *Pratje*, Théologien de *Stade*, qui rapporte la choſe en autant de termes dans ſon Traité ſur le territoire nommé *Vieland*, ſoit à cauſe du bêtail, ou des marais qui s'y trouvent. 2. *George Rothe*, autrefois Recteur d'abord à *Fürſtenwalde*, & enſuite à *Stade*, homme ſavant & connu par ſes Ecrits, dans ſa Chronique de *Stade*, met *Jodutha* au nombre des Divinités qui ont été l'objet du culte, non des Payens, mais des Chrêtiens de ces ſiecles d'ignorance; & il explique auſſi ce mot par *ſainte aſſiſtance*. Il ajoute que c'eſt d'après la ſtatue de *Jodutha* qu'on a imaginé celle de la Bienheureuſe Vierge, tenant entre ſes bras le petit Jeſus, telle qu'on la voit ſur les monnoyes de Hongrie, & qui eſt auſſi la Patrone de ce Royaume. Pour confirmer cette aſſertion, il en appelle à un Temple que Charlemagne fit conſtruire en Weſtphalie, près du Mont *Oſnegg*, l'an 783. & auquel il donna le nom de *Sant-Hülpe*, comme on prononce en Weſtphalie, ou *ſainte aſſiſtance*. *Rothe* allégue encore divers argumens propres à appuyer ſon opinion, & qui prouvent en même tems qu'on ne conſacroit alors jamais de Temple à Dieu, ou au Sauveur, mais que c'étoit toujours à quelque Saint qu'ils étoient dédiés, & ſurtout à la Vierge. *Lodtmann*, dans ſon bel Ouvrage ſur les Monumens d'*Oſnabruck*, s'étend ſur le trophée de *Charlemagne* après la bataille donnée près de *Thietmelle* & du village de *Drabben*. Il ajoute que, dans un Temple du Holſtein, on trouve un Calice, où le Sauveur eſt attaché à la Croix ayant à ſes deux côtés ſa Mère & ſon Diſciple *Jean*, avec cette inſcription; *Sainte Holpe, priez pournous*. On voit auſſi encore dans le même endroit une Image de bois que les gens du lieu nomment *Sainte Hülpe*, & qui, en l'examinant bien, paroit au jugement du même *Rothe* être une Vierge. Enfin, on raconte que dans la muraille on a creuſé un trou, auquel on donne le nom de *Sint-Hulpen Kluns*, c'eſt à dire, *fente de la ſainte aſſiſtance*: & cet Auteur croit qu'il y avoit auſſi dedans une Image de la Vierge. Il dérive encore de là le nom de la *Confrairie de S. Hülpe*, appellée auſſi *Confrairie du ſecours Divin*. En général, il y a autour de *Detmold*, de *Diepholt*, & de *Göttingue*, quan-

tité de lieux dont les noms dérivent de celui de *ſainte aſſiſtance*. Il n'a pas été difficile à *Rothe* de découvrir par la même voye l'origine du Cloître ſitué près d'*Eiſleben*, qui eſt à préſent la Prevôté d'*Helſte*. Il eſtime que ce Cloître conſacré à la Vierge, avoit été d'abord nommé *Helpede*, & qu'on a fait de là les noms d'*Helſte*, & *Helſte*. 3. Ajouterai-je en deux mots qu'on a voulu faire remonter à la même ſource le nom de ce *Stulpe*, fils du Roi de Sicile, qui ſouffrit le martyre ſous l'Empereur *Antonin*, comme ſi c'étoit par contraction pour *S. Hulpe?* Mais cela eſt trop ridicule pour y faire la moindre attention. (*)

(*) Depuis la compoſition de ce Mémoire, j'ai lu l'ingénieux Ouvrage que le ſavant Mr. *Godofroi Schütze* a publié ſous le titre d'*Apologie des anciens Germains*, & j'y ai vu qu'il croit devoir ôter entierement *Jodutha* du nombre des Divinités. Cela m'a rappellé l'idée de l'Ecrit de *Giſbert Voët*, qui traite *des Dieux, ou des Saints chimériques*.

DIS-

DISCOURS
POUR
L'ANNIVERSAIRE DE LA NAISSANCE DU ROI. (*)

MESSIEURS,

En célébrant, comme les devoirs les plus ſacrés nous y engagent, l'heureux jour qui ouvre à notre grand Monarque la carrière d'une nouvelle année de cette glorieuſe vie que l'Arbitre ſuprême des Deſtinées prolonge pour notre félicité commune; ce ſont moins des années que nous célébrons, que des Epoques dont le ſouvenir durera autant que le Monde.

Tranſportons-nous d'avance dans quelcun des ſiecles qui doivent ſuccéder à celui-ci; eſſayons de parler le langage de la Poſtérité. Comme il eſt toujours ſincere, cette ſuppoſition fera diſparoître de ce Diſcours le ton de Panégyrique, qui eſt ſuſpect, dans les occaſions mêmes où il eſt le mieux fondé. Que l'Hiſtorien le plus véridique, qu'un émule de l'immortel Préſident *de Thou*, entreprenne de raconter à nos Neveux les grands événemens qui ſont comme entaſſés dans le Regne de FREDERIC! Voici, ce me ſemble, en racourci ce qu'il pourra & ce qu'il devra dire.

„L'auguſte Maiſon de Brandebourg, devenue Royale au com„mencement du XVIII Siecle, avoit augmenté par l'éclat de cette ſu„preme Dignité celui qu'elle tiroit de ſon illuſtre origine, & tout ré„cemment des vertus & des exploits de cet Electeur, décoré à ſi juſte „titre du ſurnom de GRAND. Cependant elle étoit encore bien „éloignée, non ſeulement de poſſéder, mais même de pouvoir préſa„ger, le rang qu'Elle tiendroit, avant le milieu du même Siecle, par„mi

(*) Prononcé par le Sécretaire perpétuel dans l'Aſſemblée publique du 26 Janvier 1758.

„mi les principales Puiſſances de l'Europe; bien moins encore, la „poſſibilité de ſoutenir la Guerre la plus rude contre preſque toutes „ces Puiſſances réunies, & de la ſoutenir avec les ſuccès les plus écla„tans. On auroit mis au rang des plus étranges chimères l'idée que „des forces, telles qu'étoient celles d'un Roi de Pruſſe en 1712. lors„que FREDERIC II. naquit, devinſſent celles que ce même „FREDERIC a oppoſées en 1757 aux deux tiers de l'Europe. Et „ces forces une fois exiſtantes auroient encore été très diſproportion„nées aux effets qu'elles ont produit, ſi elles n'avoient été dirigées, & „comme animées, par le Chef ſous lequel on les a vû ſe développer & „ſignaler.

„Le Régne de FREDERIC GUILLAUME prépara celui „de ſon ſucceſſeur, & ſervit à poſer les fondemens inébranlables de cet „édifice de la grandeur Pruſſienne, qui a été ſi rapidement conduit au „plus haut faîte d'élevation. Les Finances & les Troupes, ces deux „nerfs ſi puiſſans de tous les Corps politiques, acquirent une conſiſtan„ce à laquelle d'autres Etats arrivent à peine pendant des ſiecles en„tiers. Et il ſembloit que ce ſage Monarque eut reçu charge d'en„haut d'amener les choſes préciſément au point où il les conduiſit, „pour les remettre à point nommé à ſon Fils, au moment où la ſcene „des grands événemens devoit s'ouvrir, & l'inviter à y joüer un des „premiers rôles.

„Le Chef de l'Empire d'Allemagne ayant ſuivi de près le Roi de „Pruſſe dans la nuit du tombeau, FREDERIC revendiqua de juſtes „droits ſur la Siléſie, & les ayant ſoutenus à main armée, il acquit la „ſouveraineté de cette importante Province, que la Paix de 1742 lui „aſſura. Les années 1744 & 1745 virent cette Paix détruite & ré„tablie. Des victoires continuelles apprirent aux Ennemis de „FREDERIC, qu'il faloit, ou ceſſer de l'attaquer, ou n'y penſer „que lorſqu'on pourroit l'accabler. C'eſt à prendre ce dernier parti „qu'ils conſacrerent dix années d'intrigues ſecretes, qui produiſirent „enfin cette réunion, dont on ne ſe promettoit pas moins que l'écraſe-

„ment

„ment du Thrône Pruſſien. Celui qui l'occupoit, inſtruit de ces ap-
„prêts formidables, voulut les diſſiper, en prévenant leur premier ef-
„fort. Il entra en Saxe au mois de Septembre 1756. & ayant mis cet
„Electorat hors d'état de lui nuire, il pénétra en Boheme, où ſes pre-
„miers pas furent marqués par la Victoire de *Lowoſitz*.

„L'année ſuivante le conduiſit aux pieds des murs de Prague, où
„les plus puiſſans obſtacles ne firent que rehauſſer la gloire des Pruſ-
„ſiens, à qui rien ne ſembla déſormais impoſſible. Mais, bientôt après,
„le torrent de tant de ſuccès non-interrompus parut avoir rencontré
„une digue; les Ennemis du Roi crurent que leur tems étoit venu, &
„qu'ils moiſſonneroient à leur tour les Lauriers que la Victoire n'a-
„voit encore accordés qu'à ce Prince. Leurs eſpérances redoublerent
„quand ils virent fondre ſur lui de tous les coins de l'Horizon des Armées
„que la Terre pouvoit à peine porter. Ils ne douterent plus que l'an-
„née 1757 ne mit le comble à leurs voeux, en anéantiſſant juſqu'aux
„moindres veſtiges de ce pouvoir tant redouté. Mais leur attente fut
„trompée de la maniere la plus imprévue & la moins croyable.
„L'Armée Françoiſe fut défaite, ou pour mieux dire, s'évanouït à
„*Rosbach*, le 5 de Novembre; & le même jour du mois ſuivant, aux
„portes de *Breslau*, l'Armée Autrichienne, malgré une réſiſtance des
„plus opiniâtres, ne put éviter un ſort pareil. La Siléſie qu'elle avoit
„inondée, rentra ſous l'obéiſſance du Roi avant la fin de l'année; &
„toute l'Europe attentive à ces prodiges put à peine ſe perſuader ce
„que la Renommée lui racontoit des Victoires de FRÉDERIC."

Ici finit l'Hiſtorien. Je voudrois bien, MESSIEURS, à préſent pouvoir joindre à ſon récit un feuïllet du Livre des Deſtinées. Je voudrois bien avoir les yeux aſſez perçans pour lire, non dans l'avenir le plus reculé, mais ſeulement dans le cours de l'année que nous venons de commencer, & vous annoncer ce qu'elle enfantera. Mais non, je me retracte; ce ſouhait ſeroit non ſeulement téméraire, puiſqu'il ne s'accorde pas avec les vues de la Providence, mais j'oſe ajouter qu'il eſt inutile, puisque, ſuivant une expreſſion favorite du grand

Leibniz, qui ne ſera pas déplacée en parlant à une Compagnie qui lui doit tant, le paſſé & le préſent ſont aſſez *gros* de l'avenir, pour nous permettre de l'appercevoir auſſi diſtinctement que s'il exiſtoit déjà. Si des Armées nombreuſes & floriſſantes n'ont pu réſiſter à de petits Corps commendés par FREDERIC, que feront ces mêmes Armées détruites & ruïnées contre ce Héros à la tête de ſes Légions victorieuſes? Si, en deux mois de tems, lorsque les apparences étoient le plus contraires, l'allégreſſe & les acclamations ont ſuccédé aux allarmes & à l'effroi, que ne doit-on pas attendre d'une Campagne qui s'ouvrira ſous de ſi favorables auſpices?

Mais s'ouvrira-t-elle? Ah! ſi nos ſoupirs, après avoir flêchi le Dieu des Batailles, pouvoient monter juſqu'au Thrône du Dieu de Paix! Ah! ſi les portes de ce Sanctuaire des Sciences ne ſe r'ouvroient, que pour annoncer le repos rendu à notre chere Patrie, & la fin de tant de calamités ſous le poids desquelles une foule de contrées gémiſſent! Eſpérons cette faveur inſigne de la bonté celeſte, dont nous avons éprouvé tant d'effets; eſpérons-la des victoires éclatantes, des triomphes accumulés, que nous venons de célébrer; eſpérons-la de l'héroïſme réel de notre auguſte Protecteur, qui ne croira ſes ſuccès complets & couronnés, que lorſqu'il nous verra tranquilles & heureux.

DIS-

DISCOURS

SUR

LE VÉRITABLE PRINCIPE DE LA GRANDEUR D'AME. (*)

Les mots de *grand* & de *grandeur* plaiſent beaucoup à l'oreille de l'homme; ils réjouiſſent ſon imagination: & pour peu qu'il voye jour à s'en faire l'application, rien n'égale la dextérité de l'amour propre, qui ſait s'approprier les choſes les plus éloignées & les moins ſuſceptibles de ſemblables applications. L'homme reſſemble toute ſa vie aux enfans; la puérilité l'accompagnee jusqu'au tombeau. Il s'eſtime plus beau, plus grand, plus parfait, à meſure que ſes *entours*, expreſſion encore nouvelle, mais qui paroit s'accréditer, s'embelliſſent, s'aggrandiſſent, ſe perfectionnent. La Philoſophie a tant de fois détruit tous ces preſtiges, elle a ſi pleinement dépouillé les mortels de toutes leurs grandeurs empruntées, de toutes leurs perfections poſtiches, que je croirois perdre le tems en répétant ici ce qu'elle a dit de plus fort ſur ce ſujet. Mais ne diſſimulons rien: ce tems ſeroit encore perdu dans un autre ſens; c'eſt que les hommes n'en feront, ni plus, ni moins: ils ne changeront, ni de ſentimens, ni de conduite: une grande force, un grand amas de richeſſes, une grande autorité, leur paroitront toujours les grandeurs les plus deſirables, les plus réelles, & peut-être les ſeules qui conviennent à l'homme,

Si, ne pouvant méconnoître le principe intérieur qui les fait penſer, les facultés dont il eſt doué, les opérations qu'il peut exécuter, il leur arrive d'y mettre le ſiége de la grandeur, ils prennent encore le change; & accordant toute leur admiration à ces qualités brillantes,

(*) Prononcé par le Sécretaire perpétuel dans l'Aſſemblée publique du 1 de Juin 1758.

mais legères, dont l'assemblage forme ce qu'on appelle l'Esprit, ils assignent les premiers rangs dans l'espece humaine à ces hommes qui, de siècle en siècle, ont surpassé les autres par l'étendue de leurs connoissances, & par la pénétration de leur génie. Ces qualités sont réelles, je l'avoue, & valent infiniment mieux que les dons corporels, & les présens de la Fortune. Il est beau de voir des hommes qui, las de ramper sur cette terre avec leurs semblables, prennent un généreux essor, s'élevent à des régions supérieures, creusent les abimes les plus profonds, & rapportent de leurs expéditions des découvertes qui étonnent & instruisent. Mais, d'un côté, le nombre de ces Génies inventeurs, & presque créateurs, se réduit à fort peu de chose; & de l'autre, la plûpart des inventions qui ont fait le plus de bruit, exactement appréciées, n'étendent guères la sphère de nos connoissances réelles. Nous savons bien plus de choses que les Anciens; mais nous ne savons pas mieux celles qu'il nous importeroit véritablement de sçavoir. Après cela, la célébrité n'est pas toujours le partage de ceux qui la méritent; ou ce n'est qu'une justice tardive rendue par la postérité à des gens qui n'ont souffert que mépris & injustice de la part de leur siècle. Et réciproquement, bien des gens à grands talens qui se plaignent qu'on leur refuse la qualité de Grands-Hommes, qu'ils ne cessent de s'arroger, ont tort de se plaindre, lorsqu'ils se montrent plus petits encor par le coeur, par les sentimens, & par la conduite, qu'ils ne paroitroient grands, si l'on se bornoit à les envisager par leurs côtés avantageux.

Laissons donc là l'Esprit, comme une terre inconsistante, un sable mouvant, sur lequel l'édifice d'une grandeur réelle ne sçauroit reposer. Parmi toutes les expressions composées, rélatives à l'homme, dans lesquelles le mot de grandeur entre, il n'y en a de réelle que celle de grandeur d'ame; mais avec tout cela il faut encore la dégager de bien des obscurités, des inexactitudes, qui en accompagnent l'usage. Rien n'est plus beau qu'une grande ame; j'en conviens, & je reconnois en même tems que ce n'est point une idée chimérique, qu'il en existe effectivement de telles, & que c'est à elles, bien plus qu'aux

qu'aux grands eſprits, qu'il appartient de faire la gloire des ſiècles qui ont le bonheur de les poſſéder. Mais, pour ne pas tomber de nouveau dans les mépriſes que nous avons obſervées jusqu'ici par rapport aux acceptions légitimes d'un terme auſſi commun qu'équivoque, remontons à la ſource, cherchons le principe de la grandeur d'ame.

Si l'on recueilloit les ſuffrages du genre humain, la grande pluralité des voix iroit, ſi je ne me trompe, à la placer dans l'intrépidité. De tout tems les hommes, naturellement foibles & puſillanimes, ont été diſpoſés à reſpecter ceux d'entr'eux qui, montrant une ame égale dans toutes les ſituations, portant ſurtout un front ſerain au milieu des dangers les plus redoutables, ne laiſſent jamais paroître la moindre émotion machinale, le moindre déſordre dans leurs idées, la moindre inquiétude ſur l'iſſue des événemens; mais qui, prenant leur parti, au fort de la tempête comme au ſein du calme, ont achevé avec ſuccès les entrepriſes les plus périlleuſes: ou même, quand les obſtacles ont été ſupérieurs à leurs efforts, ont ſacrifié généreuſement leur vie. De là l'origine des Héros & de l'Héroïſme. L'impreſſion cauſée par les caracteres intrépides a été ſi forte qu'on a identifié l'intrépidité avec la grandeur d'ame. J'avoue qu'elles ont une extrême affinité, & qu'on ne ſauroit poſſéder l'eſſence de l'une ſans avoir celle de l'autre. Mais, ſi l'on y regarde de plus près, l'intrépidité n'eſt qu'un état paſſager & accidentel, où la grande ame ne ſe trouve que dans des cas aſſez rares: c'eſt un effet particulier de ſa grandeur; c'eſt une conſéquence qu'elle tire de ſes principes; mais qui dit intrépide, n'exprime, ni toutes les diſpoſitions qui conviennent à une grande ame, ni ſurtout ce que nous cherchons principalement, le principe commun & conſtant de ces diſpoſitions.

Ceux qui connoiſſent mieux les véritables intérêts de l'humanité, ſeroient plus tentés de placer la grandeur d'ame dans la bienveillance univerſelle, c'eſt à dire, dans cette bienveillance réelle, qui eſt encore mieux nommée bienfaiſance. En effet, cette précieuſe qualité, moins éblouiſſante, moins ſaillante, pour ainſi dire, que l'intrépidité,

eſt bien plus réelle. Quand j'accorderois aux enthouſiaſtes de l'Héroïſme qu'il n'y a de grands hommes que les Héros, ils ſeroient obligés de m'accorder à leur tour que les Héros bienfaiſans ſont les ſeuls dignes de ce nom. Mais pourquoi faut-il être à la tête d'nn Etat, ou d'une Armée, pour avoir une grande ame, & pour agir avec grandeur d'ame? Il y a de ſimples Soldats qui ſont des Héros par l'intrépidité; il y a des Citoyens obſcurs qui ſont de grandes ames par la bienfaiſance. Je crois néanmoins voir plus de grandeur, & même de cette grandeur qui ſuppoſe de la force, du courage, dans le bienfaiſant que dans l'intrépide. Celui-ci, on le ſçait, eſt pour l'ordinaire redevable à la conſtitution vigoureuſe de ſes organes, des efforts qu'il ſoutient ſans plier; & quand il ſe trouve au fort d'une mêlée, ſon état devient encore plus machinal, il eſt plutôt entrainé que guidé par ce principe martial qui le domine: ou, ſi l'ame préſide aux mouvemens du corps, elle découvre en même tems les dangers, & les craint à proportion de leur importance. Quand les vrais Héros ſont véridiques, ils font ces aveux, qui les honorent plus que le relief qu'ils voudroient tirer d'une intrépidité méchanique & aveugle. On ſait la réponſe triviale en apparence, mais très judicieuſe en effet, que Charles-quint fit à un Officier qui ſe vantoit fortement de n'avoir jamais eu peur. La bienfaiſance demande un courage, une ſupériorité, une grandeur d'ame, qui ont de beaucoup plus fortes épreuves à ſoutenir. C'eſt dans le ſilence, le recueillement, l'obſcurité, qu'un homme bienfaiſant s'occupe, non comme l'intrépide Guerrier, à détruire ſes ſemblables, mais travaille à adoucir leur ſort, à ſoulager leurs miſères, à les éclairer, à les conduire, à les préſerver des pièges dans leſquels ils pourroient tomber, ou à les en tirer, lorsqu'ils n'ont pas pu ou ſçu les éviter. Quels encouragemens le ſoutiennent dans cette carriere, qui, remarquez-le bien, n'eſt pas un ſimple jour de bataille, une ſeule campagne, le cours de quelques années de guerre, mais qui dure autant que ſa vie? Ces encouragemens, s'il ne les tire pas de ſon courage réel, de ſa grandeur d'ame innée, n'exiſtent point; il n'y a, ni honneurs, ni avancemens, ni acclamations, ni triomphes, pour le

bien-

bienfaiſant. Il eſt ignoré, il eſt méconnu; que dis-je, il eſt preſque toujours payé d'ingratitude par ceux qui ont été les objets de ſa bénéficence. Je ne vois point de plus belle ame, de plus grande ame, que celle qui, prenant de nouvelles forces à meſure qu'on lui oppoſe de nouveaux obſtacles dans l'exercice de cette ſalutaire diſpoſition, va toujours ſemant à droite & à gauche, quoiqu'avec prudence & diſcernement, tout ce qu'elle croit propre à rendre ceux avec qui elle vit, meilleurs & plus heureux.

Mais, comme je veux tenir la balance égale, & que malgré la prédilection que j'ai pour la bienfaiſance, je n'aimerois pas à la préſenter ſous un point de vue illuſoire, j'avoue qu'il peut y entrer auſſi, & qu'il y entre ſouvent, du machinal. L'intrépide l'eſt par roideur, & cette roideur tient quelquefois d'aſſez près à la férocité. Le bienfaiſant l'eſt par douceur, & cette douceur n'eſt pas éloignée de la foibleſſe. Le premier reſſemble aux eaux d'un torrent qui briſent & entraînent toutes les digues; le ſecond à celles d'un fleuve qui ſuit ſa pente, & qui, trouvant des campagnes trop baſſes, les inonde. La Société tire d'inſignes avantages de ces deux claſſes d'hommes, lors même que le principe de leur grandeur d'ame n'eſt pas bien dévelopé, & qu'il faut l'aller démêler au travers des diſpoſitions du tempérament. Les premiers ſont ſes boulevards & ſes libérateurs; les ſeconds ſes nourriciers & ſes conſervateurs: elle peut leur décerner des ſtatues & des couronnes: elle doit s'eſtimer heureuſe à proportion du nombre de ſemblables Citoyens qu'elle poſſede, & ne rien négliger pour l'augmenter.

Cependant ces idées ne rempliſſent point encore l'attente que vous a donnée le titre de ce Diſcours; elles ne mettent point évidemment ſous vos yeux le véritable principe, la ſource réelle, de la grandeur d'ame. Quelques degrés d'intenſité ou de relâchement dans les muſcles, dans les fibres, dans les nerfs, d'abondance ou de diſette, de rapidité ou de lenteur, dans le cours des eſprits animaux, ne ſauroient faire de grandes ames. Les ames véritablement diſtinguées & privilégiées doivent tenir leurs prérogatives de qualités qui appartiennent eſſen-

eſſentiellement à l'ame, quoiqu'enſuite leur exercice ſoit ſoumis au corps, & qu'il puiſſe réſulter de cette dépendance quelques variétés de détail. L'ame n'a proprement qu'une faculté, c'eſt celle de voir, ou de ſe repréſenter: toutes ſes opérations, que l'on déſigne enſuite par différens noms, comme ſi c'étoient autant de facultés differentes, rentrent & ſe réſolvent dans cette faculté primitive. J'en conclus que l'ame n'eſt grande, qu'elle n'eſt bonne, qu'elle n'eſt eſtimable, qu'autant qu'elle voit bien, avec netteté, avec préciſion, les objets, ſous leurs véritables faces, & ſuivant les différentes rélations qu'ils ont entr'eux. Les petites ames voyent les choſes confuſément; les mauvaiſes ames les voyent de travers, renverſées. Une ame baſſe eſt ébloui du faſte d'un Grand; elle croit qu'il n'y a point d'autre grandeur. Une ame noire voit les biens de la fortune avant la vertu, & les moyens de s'enrichir & de s'aggrandir avant ceux de conſerver ſon honneur & ſa conſcience. Une ame baſſe croit qu'il y a de la gloire à intimider, à faire trembler, & même à faire ſouffrir ceux qui n'ont pas la force de réſiſter; une ame noire profite de cette force pour opprimer, vexer, piller, uſurper. La grande ame remet tous ces objets à leur place & dans leur ſituation naturelle. Le faſte d'un Grand, s'il n'eſt qu'attaché par l'uſage à ſa condition, lui paroit une choſe indifférente; s'il va au delà, une ſottiſe, une fatuité: les voyes injuſtes d'arriver à la fortune, l'utile de *Hobbes*, les trahiſons de *Machiavel*, les exploits des *Alexandres* & des *Céſars*, ſont à ſes yeux autant d'indignités & de ſcélérateſſes. Faire du bien & ne rien craindre en le faiſant, voilà les ſeules choſes qui lui paroiſſent eſtimables, louables, ſatisfaiſantes; voilà les deux arcboutans ſur leſquels repoſe toute ſa grandeur. Ne conviendra-t-on pas avec moi, que tout cela eſt une affaire de vue, d'intuition; que la folie des hommes n'eſt que pur aveuglement; & que toutes les ames ſeroient grandes, ſi elles voyoient en quoi conſiſte la grandeur, & où il faut la chercher?

Eſt-ce donc dans cette vue diſtincte d'une ame éclairée que nous placerons la ſource de la grandeur d'ame? Je crains que cette ſource, malgré ſa réalité, ne paroiſſe trop éloignée; que ce principe, quoique juſte

juſte & meſant droit aux conſéquences que j'en tire, n'ait quelque choſe de trop abſtrait. Je crains même qu'on ne m'objecte que bien des gens ont une théorie ſaine, & une pratique qui n'y répond pas; qu'on peut avoir des idées grandes, ſublimes, magnifiques, & n'avoir pas une grande ame; en un mot que, généralement parlant, les hommes ſont très peu conſéquens. Je pourrois répondre que je n'avois promis que d'établir un principe, & que, ſi l'on ne peut m'en conteſter la juſteſſe, j'ai dégagé ma promeſſe; que ceux qui démentent leurs lumieres, rentrent alors dans la claſſe du vulgaire, & voyent mal, parce que quelque paſſion vicieuſe offuſque leur jugement; enfin, que c'eſt toujours une très grande avance que de pouvoir raiſonner juſte quand on le voudra, quand on ſe rappellera des principes dont on a eu occaſion d'acquérir la connoiſſance.

Mais j'avoue que, pour dériver plus ſûrement la grandeur d'ame de la diſtinction de nos idées, il faut que cette diſtinction ait produit préalablement un effet qui devroit & pourroit en réſulter toujours; quoiqu'il n'ait pourtant lieu que dans le plus petit nombre des hommes, & même des hommes éclairés. Cet effet eſt le déſintéreſſement: & voilà, pour ainſi dire, le mot de l'Enigme. Soyez intrépide, ſoyez bienfaiſant, ſoyez même éclairé; je ferai de ces qualités un très grand cas, mais je ſuſpendrai mon jugement ſur la grandeur de votre ame, & je ne vous accorderai un droit décidé à cette éminente vertu, qu'après avoir eu la conviction de votre déſintéreſſement. Le moindre ſoupçon d'intérêt perſonel ternit l'Héroïſme, avilit la bienfaiſance, deshonore les lumieres. Dès que je vois qu'un homme que je croyois animé de la plus généreuſe ardeur pour la défenſe de la Patrie, plein de l'affection la plus ſincere pour ceux qu'il comble de bienfaits, parfaitement inſtruit du prix réel de tous les objets; dès que je vois, dis-je, que cet homme rapporte tout ſecretement à lui-même, qu'il travaille ſourdement pour ſon propre avantage: du faîte de l'élévation où je l'avois placé, il rentre à mes yeux dans la pouſſiere, dans la fange; je l'avois

crû une Divinité, c'eſt une vile Idole que je briſe, tranſporté de dépit, pour la fouler aux pieds.

Concluons donc: la grande ame a pour attributs l'intrépidité, la bienfaiſance, les lumieres; mais elle a pour baſe le désintéreſſement. Otez la baſe; tout le reſte croule. Un homme avec les qualités que nous venons d'indiquer, croîtra en raiſon de ſon désintéreſſement; décroîtra en raiſon de ſon égoïſme.

J'aurois encore un mot à dire; mais ſerai-je entendu? Il me ſemble pourtant que je m'entens bien moi-même, & il y a longtems qu'occupé de l'idée que je me contenterai de faire entrevoir, je travaille à la réaliſer pour mon propre uſage, par rapport à ma façon de penſer & d'agir. Un homme qui voudroit pouſſer la grandeur d'ame auſſi loin qu'elle peut aller, devroit ne ſe conſidérer jamais en lui-même, & iſolé, mais toujours comme faiſant partie de cet Univers, & dans ſes rélations avec ce grand Tout. Il devroit dire; Je vaux tant, parce que je ſuis à une telle place, doué de telles qualités, contribuant par tels & tels endroits à l'avantage de la Société, propre à lui rendre encore à l'avenir tel ou tel ſervice, & ſurtout rempli des intentions les plus droites & les plus pures. Vous voyez que je ménage à l'amour propre tous les droits auxquels il peut raiſonnablement prétendre; car c'eſt une très mauvaiſe maniere de porter les hommes à remplir leurs devoirs, que de leur parler d'un désintéreſſement abſolu, & de prétendre qu'ils doivent ſe compter pour rien. Non, chacun vaut ſon prix; pourvû qu'il vaille quelque choſe, c'eſt à dire, pourvu qu'il ait l'ame bonne, & l'envie de bien faire. Mais, ſi chacun ne s'eſtimoit que ſon prix, il en réſulteroit le désintéreſſement que nous cherchons, celui qui fait les grandes ames. Toutes les baſſeſſes, toutes les injuſtices, viennent de prétentions exagérées; & ces prétentions viennent de ce que nous croyons valoir plus que nous ne valons. Or voici le tarif; nous valons ce que la Société retire de nous, ou du moins ce qu'elle en pourroit retirer, ſi elle nous fourniſſoit les moyens de développer nos talens, & de ſuivre nos bonnes intentions. Partez de

là,

là, & vous ne ferez jamais rien qui ne ſoit digne d'une grande ame. Etes-vous compris dans quelque accident qui détruit la fortune de pluſieurs particuliers? On ne vous verra pas lâchement attaché aux débris de la vôtre, l'arroſer de vos larmes, tandis qu'à peine vous remarquez les pertes beaucoup plus conſidérables que d'autres ont faites, & ſurtout celles que la Société fait par là. Une cataſtrophe publique, par exemple, qui vous ruine, ruine en même tems un Riche bienfaiſant, qui faiſoit ſubſiſter quantité de familles par ſes libéralités. La Société ſouffre vint fois plus de cette perte que de celle qui vous eſt propre: ſentez-la donc auſſi vint fois plus vivement. Un de vos enfans que vous chériſſiez beaucoup, meurt; & en même tems un Magiſtrat, un Général, un Eccléſiaſtique, qui avoient la plus grande influence ſur le bonheur de la Société. Pleurez ces hommes utiles, & ne pleurez point votre enfant, ou ne le pleurez qu'autant qu'il valoit par rapport à des objets ſi ſupérieurs. Enfin, pour aller au vif, dans le cas de colliſion entre vous-même, & des perſonnes dont vous ne pouvez méconnoître la prééminence réelle, ne balancez point à montrer un déſintéreſſement fondé ſur l'intérêt que vous prenez au bien du Tout. Ce n'étoit point une action outrée que celle des Lacédémoniens aux Thermopyles, & de ces familles Romaines qui ſe ſont immortaliſées en ſe dévouant pour leur Patrie; c'eſt un des traits les plus touchans de l'Hiſtoire de France que la généroſité de ces Citoyens de Calais, prêts à livrer leurs têtes aux fureurs d'un Monarque Anglois, qui ne vouloit épargner leur Ville qu'à ce prix. On a vû ſouvent dans les combats de généreux Soldats, de fideles Officiers, parer de leurs propres corps celui du Prince qu'ils ſervoient, & tomber à ſes pieds, frappés du coup mortel dont ils l'avoient préſervé. Les plus grandes choſes ſe feroient communément & avec la plus grande facilité, ſi chacun s'eſtimant préciſément ce qu'il vaut, ſe conſervoit ou s'expoſoit d'après la connoiſſance qu'il auroit des raiſons de faire l'une ou l'autre de ces choſes. Mais les hommes ordinaires mettroient le feu à l'Univers entier, & le réduiroient en un monceau de cendres, s'ils

n'avoient point d'autre moyen de conſerver leur inutile & mépriſable individu.

Rien de plus précieux à l'Etat, Meſſieurs, que ſon Chef; mais un Chef tel que celui ſous qui nous avons le bonheur de vivre depuis dix-huit ans révolus, un Roi, tel que FREDERIC, mis, ſi je puis ainſi parler dans un des baſſins de la balance, & tous ſes ſujets dans l'autre, ne fait-il pas au moins équilibre, ne vaut-il pas autant que tout l'Etat, ne mérite t-il pas que tout l'Etat ſoit diſpoſé, s'il le falloit, à s'immoler, à ſe ſacrifier pour lui? Quelle en eſt la grande raiſon? C'eſt qu'il s'expoſe, c'eſt qu'il s'immole journellement pour nous, pour notre défenſe, pour notre repos, pour notre liberté. Ayant porté ſur le Thrône les plus grandes lumieres qu'aucun Prince ait jamais poſſédées, occupé pendant les années de la Paix à ſignaler ſa bienfaiſance, ſoutenant aujourdhui la plus terrible guerre dont l'Hiſtoire ait fourni d'exemple, avec une intrépidité qui opére de continuels prodiges: tout annonce en lui le Héros, Père & Vengeur de ſes peuples. Mais ne nous bornons pas à ce titre devenu trop commun: voyons, reconnoiſſons, admirons en lui la grande ame; & jugeons de cette grandeur par le déſintéreſſement avec lequel il ſemble ne compter ſon repos & ſa vie pour rien, dès que nous ne pouvons être en ſûreté qu'à l'ombre de ſon Egide: ſurtout par celui avec lequel on l'a vu & on le verra encore, ah! puiſſe être bientôt! ne chercher d'autre fruit de ſes victoires, que le retour & l'affermiſſement d'une Paix heureuſe & inaltérable.

ELOGE

ELOGE
DE
M. LE GÉNÉRAL DE BRÉDOW.
PAR M. LE COMTE DE REDERN.

L'Eloge de M. le Général de *Brédow* étoit dû plutôt à l'Académie: on a crû devoir attendre; le Roi avoit fait lui-même l'Eloge de la plupart des Généraux, qui étoient de l'Académie. Celui qui les avoit formés, ſous les yeux duquel ils avoient agi & combattu, les connoiſſoit mieux, & étoit plus en état de leur rendre juſtice que perſonne.

On croit devoir le donner aujourdhui, quand le Roi occupé des choſes les plus grandes, & les plus importantes, n'a pas le loiſir d'y penſer.

Asmus Ehrentreich de Bredow, Lieutenant-Général, Colonel d'un Régiment d'Infanterie, Chavalier de l'Ordre de l'Aigle Noir, Gouverneur de Colberg, Droſt de Hamm, & de Schluſſelbourg, Chanoine du Chapitre de Brandebourg, & Seigneur de Worien & d'autres lieux; naquit l'année 1695 d'*Aſmus Ehrentreich de Brédow*, Conſeilleur Provincial du Cercle du Haveland où ſa mémoire eſt encore chère, & de *Catherine Marie de Brieſt*, fille de Mr. *de Brieſt*, avec lequel le Grand Electeur concerta cette belle Campagne, de ſurprendre les Suédois à Rathenau, & de les chaſſer enſuite de toute la Marche Electorale. Je ne m'étends pas ſur l'ancienneté de ſa famille

(*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 5 Juin 1760. C'eſt à la date de la mort de M. *de Bredow* qu'on a eu égard, en plaçant ici cet Eloge.

mille: elle ne fait pas l'éloge d'un homme après ſa mort; c'eſt un aiguillon pour l'exciter à la Vertu pendant ſa vie. Le mérite, les talents, & les vertus de ſes Ancêtres, forment un Tribunal ſévere, qui lui demande continuellement compte de ſes actions, & exige de lui de les ſurpaſſer. Nous ſavons, que notre ancienne Nobleſſe a été tranſplantée & établie en partie dans notre Païs; ſous les Empereurs *Charle-Magne*, *Henri* l'Oiſeleur, *Otton* le Grand, & l'Electeur *Albert* l'Ours; ou Originaire dans le Païs même, qu'elle deſcend des reſtes des Francs, Longobardés, Bourguignons, Sueves, Semnones, Redarns, & d'autres Peuples, entre l'Elbe, l'Oder, & la Viſtule, qui pouſſés & ſuivis par les Vandales, Venedes, Goths, & Sarmates, ſe portoient comme les flots de la Mer, du Nord au Sud, vers l'Empire Romain, ſe répandirent dans toute l'Allemagne, firent oublier le nom de pluſieurs Peuples qui habitoient ſes différentes Provinces, & paſſerent enſuite le Rhin au cinquieme Siecle pour ſe répandre dans les Gaules, en Italie, en Eſpagne, & en Afrique.

Les différentes branches de la même famille, établies dans les différentes parties de l'Allemagne, en ſont la preuve, & prouvent en même tems l'ancienneté de leur origine.

Mr. *de Brédow* avoit des exemples de vertus & de talents, des perſonnes qui avoient mérité de la Patrie dans toutes les différentes places de l'Etat, dans ſa famille: il les ſuivit.

Il fit ſes premieres études au College noble de Brandebourg, & les acheva enſuite à l'Univerſité de Halle. Après avoir fini ſes humanités par une étude approfondie des langues latine & grecque, & par la lecture des meilleurs Auteurs de l'Antiquité, il s'attacha principalement à l'étude des Sciences qui ſont l'objet de l'Homme d'Etat; de la Politique, de la Morale, du Droit Public, & Civil, de l'Hiſtoire ancienne & moderne, & principalement de celle de l'Empire, & de ſa Patrie. Son but étoit de lui être utile. Il s'apperçut de bonne heure, qu'avec une bonne éducation on peut l'être de plus d'une maniere; que le devoir d'un homme, que ſa naiſſance a placé dans

un

un ordre ſupérieur de la ſociété, eſt de ſurpaſſer les autres en connoiſſances & en lumieres pour remplir ſa deſtination; & que le ſiecle dans lequel il vivoit, lui impoſoit une grande tâche. L'eſprit & le caractere des hommes qui ſe vouent au ſervice de leur Patrie, tient à leur ſiecle; & leur vie fait une partie de l'hiſtoire de leur tems, dont il faut emprunter même les principaux traits, pour développer leur caractere, & nous le mettre dans tout ſon jour.

L'Europe libre, ignorante, barbare, & toute militaire, ne connoiſſant que le Noble & le Serf, l'un pour commander; & l'autre pour ſervir, avoit changé de face. L'indépendance de Villes riches, & commerçantes, avoit élevé le moyen état; les Sciences, les Arts, une ſaine Philoſophie, s'étoient établis partout; la ſuperſtition & la barbarie de l'Ecole avoient disparu: & la découverte des autres Parties de notre Globe avoit changé, en l'éclairant & l'enrichiſſant des tréſors de tous les climats, ſa Politique & ſes moeurs.

On avoit non ſeulement compris, que la deſtination de l'homme n'étoit pas de s'entr'égorger, & que le but de la ſociété n'étoit pas l'eſclavage ou l'oppreſſion du grand nombre; mais les peuples, qui auparavant ne ſe connurent presque pas, ou n'eurent peu ou point de communication, avoient formé, principalement depuis la Paix de Weſtphalie, un corps de toute l'Europe, dans lequel on tâcha d'entretenir une harmonie, de ſerrer un lien général, pour prévenir les ſuites funeſtes de l'ambition, de l'injuſtice, & de la violence.

Aux irruptions, brigandages, & transmigrations des Nations entieres, & à la fureur des Croiſades, avoit ſuccédé l'orgueil des Princes, enflés de leurs forces, & des richeſſes que les deux Indes avoient répandues en Europe.

Ils s'en ſervirent, après avoir déſarmé les peuples, armés auparavant pour le maintien de leur liberté, ou contre l'ennemi de dehors, pour l'entretien d'un Soldat perpétuel, dont ils firent l'inſtrument de leurs paſſions. Ils ne virent dans la ſoumiſſion de leurs ſujets que celle de leurs voiſins & de l'Europe entiere.

Char-

Charles-quint & Philippe ſecond, qui ſe vantoient que le Soleil ne ſe couchoit pas dans leurs vaſtes Etats, Ferdinand I. & Louis XIV. ne renoncerent à ces chimeres funeſtes, qu'après avoir déſolé l'Europe, & épuiſé leurs tréſors & leurs peuples.

Leur ambition n'eut d'autre effet que celui d'avoir armé contr'eux toutes les autres Puiſſances, & introduit la fureur de faire la guerre avec des Armées innombrables & diſproportionnées, qui accabloient, & épuiſoient déjà pendant la paix les peuples, incapables de les entretenir, & de les recruter.

La ſupériorité que donne la force, a de tout tems frappé les hommes; preuve peut-être la plus forte de leur méchanceté. Les Légiſlateurs & les Peuples ont tenté ſouvent de l'établir pour principe, pour premier reſſort du Gouvernement. Toutes les différentes formes en ont paru ſuſceptibles; & Sparte, & Rome, qui ont paru avec un éclat, & une ſupériorité ſoutenue, pendant pluſieurs Siecles, ont fait illuſion aux Modernes. Mais Lycurgue allia à la force la ſageſſe, & toutes les vertus; il prévint l'abus de la force: tout Lacédémonien étoit ſoldat, mais il raſſembloit toutes les vertus en même tems. Sparte fut l'Idole, & l'Arbitre de la Grece, tant qu'elle fut juſte, & vertueuſe; elle régna moins par la force, que par ſes vertus: elle tomba lorsquelle devint ambitieuſe et injuſte.

Rome fut de même; elle ſoumit le monde alors connu, parce qu'elle avoit plus de ſageſſe, & de vertus, que le reſte des hommes. Elle ne parut ſoumettre les peuples, que pour les aſſocier à ſes vertus, pour les rendre heureux, & les delivrer de l'oppreſſion, & de la tyrannie. Elle devint la victime de ſes vices, & des peuples barbares, quand elle ceſſa d'être juſte & vertueuſe.

Je ne parle pas de ces apparitions paſſageres, ou plutôt de ces convulſions violentes des peuples, lorsque livrés au délire de l'ambition, ils paroiſſent vouloir détruire tous les autres peuples. C'eſt comme des accès violens de fievre, qui donnent une force extraordinaire

naire au malade, & le laiſſent enſuite dans un accablement total, ſuivi ſouvent de la mort. Louis XIV. prit pour deviſe: *Un contre Tous.* L'épuiſement de la Frace le détrompa: il fut heureux; l'orgueil & la diviſion de ſes ennemis le ſauverent d'une Paix honteuſe.

On a voulu trouver une grande différence entre la Politique, la conduite des Peuples, & la Morale, la conduite des Particuliers. Il m'a toujours paru qu'il y en a beaucoup moins qu'on ne croit. Ce ne ſont que les grands talents, & les grandes vertus, une conduite ſuivie des grandes vues, & le choix heureux des moyens, dans une analyſe juſte de l'avenir, qui puiſſent élever les uns & les autres.

Le Roy *Fréderic Guillaume* trouva l'Europe dans cette ſituation, qui parut impoſer la néceſſité à tous les peuples, de ſe tenir continuellement ſous les armes. Il parvint au Thrône dans le tems que *Louis XIV* & *Charles XII* avoient armé toutes les Puiſſances contre eux. Il avoit fait comme Prince Royal une Campagne dans les Païs-Bas, pour s'inſtruire avec les *Eugenes*, & les *Marlborougs;* & à ſon avénement au Throne, il tourna toutes ſes vues & dirigea toutes les parties du Gouvernement vers le Militaire, & la gloire des armes.

Il fit revivre la Politique d'un Gouvernement abſolument militaire, dont l'Hiſtoire, principalement l'ancienne, fournit quelques exemples frappans, par les efforts dont nous trouvons que de petits Etats ont été capables, & par les Armées nombreuſes qu'ils ont pû mettre ſur pied. Il bannit le luxe de ſes Etats; fit des hommes qu'il employa des Soldats; tira de presque route l'Europe, les hommes les plus grands, & les plus forts, capables de porter les armes; encouragea l'agriculture, & les Arts utiles; mit un ordre rigoureux dans l'adminiſtration de ſes Finances; amaſſa des tréſors conſidérables, & remplit ſes Arſenaux de tout l'attirail néceſſaire pour la guerre.

Dès la guerre de trente ans, depuis que le Brandebourg avoit pris ſous le Grand Electeur, une aſſiette fixe, les Troupes Pruſſiennes avoient toujours paru avec l'éclat de la victoire.

Les Suédois enflés de la gloire de leurs *Guſtaves*, les Polonois & les Turcs en Hongrie, rendirent témoignage, par leurs défaites, à leur valeur.

Le Roi *Frédéric I* ſecourut l'Europe contre l'ambition de *Louis XIV*; il marcha d'abord lui-même avec la plus grande partie de ſes forces, & envoya enſuite des Corps conſidérables, ſous le commandement du Prince de *Deſſau*, que l'Auteur immortel de l'Hiſtoire de Brandebourg caracteriſe par les talens & la valeur de *Marius*; ils eurent la plus grande part aux victoires mémorables de *Hochſtedt*, de *Turin*, & aux Campagnes glorieuſes des Alliés dans les Païs-Bas.

Le Roi *Frédéric Guillaume*, en parvenant au Thrône, fit regarder l'état militaire, par ſon exemple, & les prérogatives qu'il y attacha, comme le ſeul digne d'occuper ſes Sujets, & ſoumit des Troupes déjà aguerries, à la diſcipline la plus auſtere, qui, ſoutenue toujours de même, pendant un regne de trente ans, forma le caractere de toute la Nation. Il eut élévé les Pruſſiens à toutes les vertus de Sparte, ſi l'éducation avoit orné ſon caractere ſimple & mâle des vertus & des lumieres philoſophiques de *Lycurgue*. Mais, malgré ce goût, ou plutôt cet entouſiaſme pour le Militaire, il ne fit la guerre que forcé par *Charles XII*. & dans la guerre dont la Pologne penſa embraſer toute l'Europe, il ſe contenta d'envoyer un Corps de dix mille hommes ſous le Maréchal *de Redern*, au ſecours de l'Empire, & accorda un azyle au Roi *Stanislas*, élû deux fois Roi de Pologne, mais dont la deſtinée n'étoit pas de remplir ce Thrône. Il laiſſa comme *Philippe* à *Alexandre* l'exécution de grands deſſeins, & une armée merveilleuſement diſciplinée, qui a fait revivre l'héroïſme des Grecs & des Romains, & étonné l'Europe par des prodiges de valeur, & des ſuccès ſoutenus, dans deux guerres ſanglantes, que la Pruſſe a eu avec la Maiſon d'Autriche, & dans la cruelle guerre, qu'elle ſoutient à regret aujourdhui contre les plus grandes Puiſſances de l'Europe.

L'art de la guerre, malheureuſement pour l'eſpece humaine, a été cultivé avec ſoin dans toute l'Europe, & porté au plus haut dégré de

de perfection. Vous êtes auſſi ſavans, Peuples de l'Europe, dans toutes les parties de la Science Militaire; mais, ſans les avantages d'un poſte inattaquable, d'une Artillerie nombreuſe, & de la ſupériorité du nombre, le jour de bataille, une rare valeur, l'ordre, la diſcipline, la promtitude, & la célérité des évolutions, vous fait regarder le Soldat Pruſſien, comme l'ennemi le plus redoutable, & presque invincible.

M. *de Brédow*, preparé à tous les emplois, avoit fini ſes études dans le tems que le Roi *Fréderic Guillaume* étoit parvenu au Thrône: il entra dans le ſervice militaire; ſon caractere ſimple, & auſtere, l'y porta peut-être naturellement: & une taille haute, & avantageuſe, ne lui laiſſa pas d'autre deſtination. C'étoit l'état de tous les Pruſſiens; mais le motif, le ſeul qui pût le déterminer, c'étoit la guerre qui parut inévitable avec la Suede, qui lui offrit l'occaſion de ſatisfaire ſon envie de rendre ſervice à ſa Patrie.

Il fut placée l'année 1714 comme Enſeigne dans le Régiment du Comte *de Wartensleben;* & l'année ſuivante au Printems, il marcha à *Stettin* où le Roi aſſembla une Armée d'environ trente mille hommes. L'infléxibilité, ou plutôt la haine implacable de *Charles XII.* n'avoit pas ſeulement fait échouer la Médiation de la France, & toutes les Négociations qu'on avoit tentées pour entretenir la Paix dans le Nord de l'Allemagne; mais, pouſſé à bout par les démarches les plus violentes, la modération du Roi qui, plein d'égards pour ſes malheurs, & ſes grandes qualités, avoit fait tout au monde pour conſerver la Poméranie à la Suede.

Stralſund ayant la communication ouverte par mer avec la Suede, entouré d'un retranchement couvert d'un marais, défendu par une garniſon conſidérable, animé par la préſence de *Charles XII.* & ſoutenu par un autre Corps de Troupes, qui occupoit l'Isle de *Rugen*, parut imprenable; & M. *de Croiſſi*, l'Ambaſſadeur de France, en ſortant entierement du caractere de Médiateur, le repréſenta tel par une lettre datée de *Stralſund* du 22 May 1715, qu'il écrivit au Roi pour le détourner d'en faire le Siege, qu'il qualifia d'entrepriſe inſoutenable.

La valeur des Troupes Pruſſiennes la ſoutint; elles prirent, ſous la conduite de M. *de Köppen*, l'Aide de Camp Général du Roi, le retranchement en traverſant le marais, & un bras de mer dont il étoit environné; deſcendirent dans l'Iſle de *Rugen*, ſous le commandement du Prince de *Deſſau*, battirent *Charles XII* qui les attaqua le lendemain de la deſcente, forcerent tout le Corps de Troupes qui occupoit l'Iſle de ſe rendre priſonnier de guerre, & emporterent peu après les ouvrages extérieurs de *Stralſund*, que *Charles XII* avoit défendus & repris à la tête de la Garniſon, habillé en ſimple Soldat.

Toute ſa valeur ne put alors ſauver la Place; quand tout étoit prêt pour l'aſſaut général, il ne lui reſta d'autre parti à prendre que de hazarder ſur un petit eſquif le paſſage en Suede, à travers la flotte Danoiſe, & par une Mer dangereuſe, pour éviter de ſe rendre avec la Place, ou de ſacrifier inutilement ſa vie & celle de la Garniſon. Le lendemain de ſon départ, *Stralſund* ſe rendit après un ſiege de cinq mois & demi, ſoutenu par la ſaiſon la plus rude juſqu'à la fin de Decembre.

M. *de Brédow* s'acquitta de ſes devoirs avec tant de diſtinction, que le Roi l'ôta vers la fin du Siege de ſon Régiment, & le plaça dans ſes Gardes, compoſées des hommes les plus grands de ſon Païs & de toutes les Nations de l'Europe.

Il devint Lieutenant en 1716, & Capitaine en 1723. L'année 1733, le Roi le fit Major, & l'envoya aux Cours de *Bareuth*, d'*Anſpach*, de *Würtenberg*, de *Bamberg*, & de *Würtzbourg*.

M. *de Brédow*, malgré l'application aſſidue au ſervice, ſous les yeux d'un Maitre tel que le Roi, avoit conſervé ſon goût pour les Sciences, qu'il cultiva, ſans le faire paroitre, par la lecture des meilleurs livres.

Le Roi avoit un éloignement pour les Lettres en général, & une vraye averſion pour les Sciences, qu'il regarda comme inutiles, & qu'il qualifia de viſions, & de pédanterie; mais M. *de Brédow* lui arracha l'aveu,

l'aveu, que les connoiſſances & l'étude n'étoient pas incompatibles avec l'Etat militaire. Il ſçut non ſeulement eſtimer en lui la capacité qui le rendit propre aux affaires; mais, l'ayant admis à ſa ſociété particuliere, il étoit impoſſible que M. *de Brédow* ne donnât au Roi ſouvent cette ſatisfaction, qu'on trouve néceſſairement dans la converſation d'un eſprit éclairé, juſte, & ſenſé. Le Roi témoigna à M. *de Brédow* beaucoup de ſatisfaction à ſon retour, de la façon dont il s'étoit acquitté de ſes ordres; il lui confia peu après LL. AA. RR. Meſſeigneurs les Princes *de Pruſſe* & *Henri*, pendant une abſence que fit M. *de Rittberg* leur Gouverneur; & s'étant convaincu qu'il joignoit à une connoiſſan- approfondie des Loix & des Coûtumes du Païs, une grande intégrité, & beaucoup de déſintéreſſement, il le chargeoit ſouvent de Commiſſions particulieres, quand il croyoit que les voyes ordinaires de la Juſtice examinoient ou décidoient les affaires avec trop de lenteur. La Droſtei de Ham, que M. *de Brédow* eut l'année 1738, fut une nouvelle marque de la bonté, & de l'affection, que le Roi avoit pour lui, & qu'il lui conſerva juſqu'à ſa mort. Il lui en donna pendant la maladie qui la précédoit, les preuves les plus fortes; il étoit de ceux que le Roi voyoit tous les jours, & il lui répétoit pluſieurs fois, que ſa mort prévenoit les récompenſes qu'il avoit deſtinées à ſon attachement & à ſes ſervices; que c'étoit un peu ſa faute parcequ'il n'avoit jamais ſçu demander, mais qu'il n'y perdroit rien, qu'il en laiſſoit le ſoin à ſon ſucceſſeur. Mr. *de Brédow* ne tarda pas de voir l'accompliſſement de ces aſſurances flatteuſes. Le Roi d'à préſent lui continua les mêmes bontés que le feu Roi avoit eues pour lui, & qu'il lui avoit déjà témoignées, étant Prince Royal. Il le fit d'abord Colonel de ſes Gardes, qu'il forma de celles du feu Roi, & de ſon Régiment, avec une penſion d'onze cens écus.

La guerre pour la ſucceſſion de l'Empereur *Charles VI* s'étant allumée peu après dans toute l'Europe, le Roi entra en Siléſie en 1741 ſur laquelle il reclama ſes droits; & M. *de Brédow* y marcha à la tête du ſecond & troiſieme Bataillon des Gardes; mais il ne put joindre l'armée qu'après la bataille de *Mollwitz*; il fut du Siege de *Brieg*: & quand le Roi entra l'hyver ſuivant en Moravie, il eut le Commandement d'*Olmütz*,

mütz, & fut chargé de la levée des contributions. Son humanité, ſa douceur, & ſon déſintéreſſement, lui mériterent l'approbation du Roi, & lui gagnerent l'eſtime & la conſidération de l'Ennemi.

Il fit enſuite la Campagne ſous le Roi en Boheme, fut de la bataille de *Czaslau*; & à la Paix qui la ſuivit, il ramena les deux bataillons des Gardes à *Potzdam*.

Le Baillage de *Schluſſelbourg*, le Régiment de *Perſode*, & le grade de Général-Major, furent des preuves que le Roi lui donna de la ſatisfaction qu'il avoit de ſes ſervices. Quand la guerre pour le ſoutien de l'Empereur *Charles VII* ſe rallume, M. *de Brédow* entra avec un Corps, de Siléſie en Boheme, & joignit l'Armée du Roi devant *Prague*.

L'Hyver qui ſuivit la Campagne, il eut le Commandement à *Jägerndorff*; il rejoignit le Roi quand il marcha contre les Autrichiens, qui par *Landshut* pénétrerent en Siléſie, fut de la Bataille de *Friedberg*, & ſuivit le Roi, quand, après cette glorieuſe Victoire, il rentra en Boheme.

Peu avant la bataille de *Sohr*, le Roi le détacha, pour renforcer l'Armée, qui, ſous le Commandement du Prince de *Deſſau*, s'oppoſa aux deſſeins de la Saxe; il fut bleſſé à la bataille de *Keſſelsdorff*, par une bale dans le bas ventre, qui le perça de part en part; il reſta à cheval jusqu'à la fin de la Bataille, & continua de commander: comme *Epaminondas*, qui garda le fer de la lance dont il étoit bleſſé, jusqu'à ce qu'il vit la victoire aſſurée. Le Roi le viſita lui-même, lui témoigna ſa ſatisfaction dans les termes les plus flatteurs, ſur cette valeur ferme & tranquille, & en fit mention de même dans la Lettre par laquelle il informa feu la Reine du gain de cette bataille.

Après la Paix qui ſuivit cette Campagne glorieuſe, ſignalée par trois Victoires déciſives, le Roi lui donna le Régiment vacant par la mort du Général *Marwitz*, en garniſon à *Halberſtadt*, & le chargea de l'arrangement des différents qui ſubſiſtoient encore avec l'Abbaye de *Quedlimbourg*, & d'autres affaires rélatives à cette Province.

Mais l'emploi que le Roi fit de M. *de Brédow* ne l'éloigna de ſa Perſonne, qu'autant que le ſervice l'exigeoit; cet éloignement même

ne

ne fut qu'une nouvelle occaſion, pour lui prouver la bonté perſonelle qu'il avoit pour lui. Il le fit revenir ordinairement l'hyver à *Potzdam*, pour être de la ſociété qu'il regarda comme la ſienne; & l'année 1747, il le fit Lieutenant-Général, & lui donna l'Ordre de l'Aigle Noir, avec le Gouvernement de *Colberg*.

L'Académie perdit l'année 1752, dans M. le Général *Still*, un Membre qu'elle regretta beaucoup, & qu'elle ne crut pouvoir remplacer mieux que par M. *de Brédow*. Il y fut auſſi ſenſible qu'un eſprit éclairé, & porté au bien comme le ſien, devoit l'être.

L'année 1755, il commanda le Camp qui fut formé auprès de *Magdebourg*. Il mourut au commencement de l'année ſuivante dans un âge, qui, avec une ſanté robuſte comme la ſienne, promettoit la plus longue vie.

Une trop grande abondance de ſang, & peut-être trop d'application, le rendoient ſujet depuis quelques années aux vertiges, & aux étourdiſſemens, qui parurent même influer ſur ſon caractere, & prendre ſur la facilité qu'il avoit pour l'étude, pour le travail, & les affaires.

Le Roi plein d'attention & de ſoins pour ceux qu'il honoroit de ſon amitié, l'avoit preſſé lui-même ſouvent de ſe faire ſaigner, & lui avoit envoyé des Médecins pour conſulter ſur les moyens d'en prévénir les ſuites; mais, ſoit que certains accidens de la machine humaine ſoyent ſans remede, ou que M. *de Brédow*, trop peu attaché à la vie, n'ait pas eu l'attention néceſſaire, ſe trouvant ſeul à *Halberſtadt*, devant une cheminée, le matin après la parade, un livre à la main, il lui prit un étourdiſſement qui le fit tomber dans le feu; &, avant qu'on pût venir à ſon ſecours, il eut la tête, le cou, & tout le côté gauche, extrêmement maltraités. Il ſupporta pendant ſix ſemaines des douleurs cruelles, avec cette égalité d'ame, & cet héroïſme, qui formoient ſon caractere, & parut même ſe rétablir; mais une attaque d'appoplexie qui ſurvint, finit ſa vie le 23 Fevrier 1756.

Le Roi témoigna les regrets, qui répondoient aux bontés qu'il avoit eu pour lui pendant ſa vie; je dois nous les rappeller tels, que ſon pinceau ſublime les peint lui-même dans l'Ouvrage immortel rendu public aujourdhui, & en orner la Tombe de M. *de Brédow*.

La Mort fond ſur BREDOW par des coups imprévus.
O Mort cruelle! arrête, épargne ſes vertus.

M.

M. *de Brédow* mourut ſans avoir été marié; ſa famille, ſon Régiment, & la Province de *Halberſtadt*, le regetterent, comme des enfans qui perdent leur pere; ſes vertus, ſa douceur, ſon déſintéreſſement, ne pouvoient que lui concilier l'eſtime & l'affection de ceux qui avoient à faire à lui. Le fond de ſon caractere étoit la probité, un grand amour de l'ordre, l'équité, & le déſintéreſſement. Des moeurs très unies & très ſimples, éloignées de tout ce qui s'appelle faſte & oſtentation, qui tenoient à ſon caractere, & que l'habitude & l'exemple du feu Roi n'avoient fait que fortifier, ne l'empêcherent pas de vivre avec la dignité & la bienſéance convenable à ſon état; & malgré des revenus aſſez conſidérables, il ne laiſſa à ſa mort que le patrimoine qu'il tenoit de ſa famille; il ne ménagoit rien, ni pour le ſervice du Roi, (ſon Régiment étoit un des plus beaux de l'Armée,) ni quand il s'agiſſoit de faire du bien.

La Cour à laquelle M. *de Brédow* avoit paſſé ſa vie, le commerce des Grands, & des Courtiſans, avoit fortifié en lui une réſerve, & une retenue anturelle; peut-être l'avoient-ils outré un peu. Franc, ouvert, & porté à la gayeté avec ſes Amis, il parut ſe tenir par une grande politeſſe à une certaine diſtance des hommes, de la méchanceté desquels il n'avoit peut-être fait que trop d'expérience; & au lieu de déclarer librement ſon ſentiment, d'approuver & de déſapprouver ſelon ſes lumieres, il ſe renferma ſouvent dans le ſilence, & parut préférer de s'en tenir au ſentiment des autres plutôt que d'examiner & de chercher celui qui devoit être le ſien. Il parut ſouvent que les moeurs du Siecle, une certaine hardieſſe à décider ſur tout, lui en impoſerent; il parut gêné, & embaraſſé; on remarqua l'effort qu'il faiſoit, pour cacher qu'il en étoit bleſſé. Avec un fond de droiture, incapable d'applaudir à ce qui étoit contraire à ſes principes; il oppoſa la douceur & le ſilence au vain étalage des manieres & des façons hardies, à l'impertinence d'un babil hazardé, & à la témérité des propos futiles. Incapable de tout ce qui s'appelle intrigue, & fortement occupé des devoirs de ſon emploi, il parut ſouvent étranger à la Cour, où il paſſa ſa vie, par l'ignorance abſolue de ce courant de précieuſes bagatelles, d'inepties, qui ſont l'occupation ſérieuſe de l'oiſiveté & du déſoeuvrement du Courtiſan ordinaire, qui, doué de ces beaux talens, fut ten-

té

té quelquefois de le regarder comme un eſprit borné, & de le taxer d'une auſtérité déplacée. La droiture, les moeurs ſimples telles qu'elles ſont, fondées ſur les vertus, n'ont de prix que pour l'homme doué de ces mêmes vertus; il paroit même aux yeux d'un eſprit leger & ſuperficiel, qu'un trop grand attachement à certains principes, rétrécit l'ame, & renferme l'eſprit dans des bornes étroites.

Le méchant paroit d'abord avec un air d'eſprit; les petites paſſions qui l'agitent continuellement, donnent à l'eſprit un dehors d'étendue, & une certaine activité; jugeant avec cela les hommes, dont le grand nombre, s'il n'eſt pas méchant, n'a que peu ou peu point de vertus, par lui-même, il paroit connoitre, & juger juſte. Voyez-le de près; c'eſt une ame bornée, un aveugle, qui ſe trompe le plus groſſierement ſur les choſes les plus claires, & ferme les yeux à la lumiere que la vérité & la vertu répandent dans le coeur de l'homme droit & vertueux. A quel point un *Néron*, un *Caligula*, ne doivent-ils pas avoir été ſtupides, & imbécilles? La méchanceté ne peut jamais être qu'une folie, un égarement, un aveuglement, un trouble de l'eſprit. Malgré la contrainte que M. *de Brédow* ſçut impoſer quelquefois à ſon caractere, il eut en averſion le dangereux talent d'adopter le ſentiment des autres, de le faire paroitre comme le ſien, & d'applaudir pour plaire. Si la plainte des Courtiſans a quelque fondement, que les Princes veulent être flattés; on peut dire avec plus de raiſon, que ce ſont eux qui rendent les Princes inacceſſibles à la vérité.

Les Hommes mettent leur caractere & leurs vices dans leur état; le Courtiſan, faux & perfide, eut été tel dans toute autre condition de la vie.

J'ai eu le bonheur de ſervir une grande Princeſſe, à laquelle on parloit avec plus de vérité, de franchiſe, & de liberté, qu'on ne parle aux hommes qui ne doivent exiger aucun ménagement. Peut-être ai-je tort de la citer; l'élévation de ſon ame, & ſes vertus, ne concluroient peut-être rien pour le reſte des Princes & des hommes.

Flatter les Grands, leur prêter des bonnes qualités qu'ils n'ont pas, pour qu'ils les ayent, des talents, une ame, un génie capable de faire de grandes choſes, pour les faire ſortir de leur léthargie ordinaire, pour

les porter à ſe prêter au bien qu'ils rejetteroient au lieu de le protéger; c'eſt peut-être le ſeul moyen pour les y conduire. Applaudir à leurs folies, à leurs méchancetés; colorer leurs travers, leurs mauvaiſes actions; c'eſt ce qu'on peut faire de plus déteſtable: c'eſt la manoeuvre perfide du Courtiſan ordinaire. „Nommer un Roi Pere du peuple, „dit un Ecrivain célébre, eſt moins faire ſon Eloge, que l'appeller par „ſon nom, ou lui dire ce qu'il doit être."

L'eſclavage, la crainte, & l'intérêt, aſſerviſſent l'eſprit, le rendent faux, & incapable de penſer; l'envie de plaire s'occupe plus de deviner le ſentiment des autres, que de chercher la vérité: elle peut avoir lieu dans les choſes indifférentes, elle doit ceſſer auſſitôt qu'il s'agit de décider entre le bien & le mal.

M. *de Brédow* jouiſſoit du précieux avantage de ſervir des Maitres, auxquels on ne plaiſoit que par la vérité & par l'exactitude à ſatisfaire à ſes devoirs; & il a eu le bonheur d'emporter à ſa mort une réputation pure & entiere, qui avoit fait celui de ſa vie.

Vous trouvâtes de la conſolation, *Tacite*, contre la perte d'*Agricola*, le meilleur des Peres, & le plus grand homme de ſon Siecle, en vous retraçant ſes vertus, & les tranſmettant à la Poſtérité; j'aurois le bonheur de jouir de la douceur de cette conſolation, lorsqu'en perdant un Oncle reſpectable par ſes vertus, je puis mêler mes regrets avec ceux de l'Académie, ſi, avec la vérité, & la force de votre éloquence, j'euſſe pu faire l'éloge de M. *de Brédow*, digne d'entrer dans les Mémoires de l'Académie, digne de ſes vertus, de vos regrets & des miens.

TABLE

TABLE.

CLASSE
de Philoſophie Expérimentale.

Des *effets du ſel commun ſur le régule d'Antimoine, par* M. MARGGRAF. pag. 3

Rapport *de quelques Expériences faites ſur la Pierre qu'on nomme* Lapis Lazuli, *par* M. MARGGRAF. 16

Examen Chymique *d'une Mine d'argent lamelleuſe, ou d'une eſpece de Liege minéral, qu'on trouve, quoiqu'en très petite quantité, dans les Mines de* Dorothée & Caroline, *ſur le haut Hartz, par* M. LEHMANN. 20

Recherches hiſtoriques & chymiques *ſur le Copal, tel que les Apoticaires & les Epiciers le vendent ordinairement ici, par* M. LEHMANN. 34

Obſervations Anatomico-Pathologiques *ſur l'enflure extraordinaire de l'Abdomen, procédant de diverſes cauſes, par* M. MECKEL. 58

Réponſe *à la Diſſertation de M. le Comte* Roncalli *ſur l'inoculation de la petite vérole, par M. le Comte* de REDERN. 71

Remarques abrégées *ſur quelques traces de conformité entre les corps du regne végétal & ceux du regne animal, par* M. GLEDITSCH. 89

Sur le bitume d'Alſace, par M. SPIELMANN. 105

CLASSE
de Mathématique.

Recherches *ſur la connoiſſance méchanique des Corps*, *par* M. EULER. 131

Du *mouvement de rotation des corps ſolides autour d'un axe variable*, *par* M. EULER. 154

Remarques générales *ſur le mouvement diurne des Planetes*, *par* M. EULER. 194

De *la Méthode des différences & de la ſommation des ſéries*, *par* M. WALMESLEY. 219

Maniere nouvelle *de trouver le terme général des ſéries récurrentes*, *par* M. WALMESLEY. 271

Recherches *des mouvemens d'un Globe ſur un plan horizontal*, *par* M. J. A. EULER. 284

Demonſtration *du Théoreme de* Harriot, *avec une Méthode de chercher ſi une équation algébrique a toutes les racines poſſibles ou non? par* M. AEPINUS. 354

CLASSE
de Philoſophie Spéculative.

Mémoire *ſur la découverte des Loix d'un Chifre de feu M. le Profeſſeur* Herman, *propoſé comme abſolument indéchifrable*, *par* M. BEGUELIN. 369

Sur *le ſens Moral*, *par* M. MERIAN. 390

Analyſe de la Raiſon, *par* M. SULZER. 414

De

De la *Notion de l'Infini : Diſcours mêlé de réflexions, amenées par le ſujet même, ſur les cas où l'uſage des Définitions ſe trouve en défaut, & ſur un Alphabet des penſées humaines, ſeul capable d'y ſuppléer ; par* M. de PREMONTVAL. 443

CLASSE
de Belles - Lettres.

Diſſertation *ſur* Joduta, *Idole de la Saxe & de la Marche, par* M. KUSTER. 463

Diſcours *pour l'anniverſaire de la Naiſſance du ROI, par* M. FORMEY. 471

Diſcours *ſur le véritable principe de la grandeur d'ame, par* M. FORMEY. 475

Eloge *de M. le Général de BREDOW, par* M. le Comte de REDERN. 485

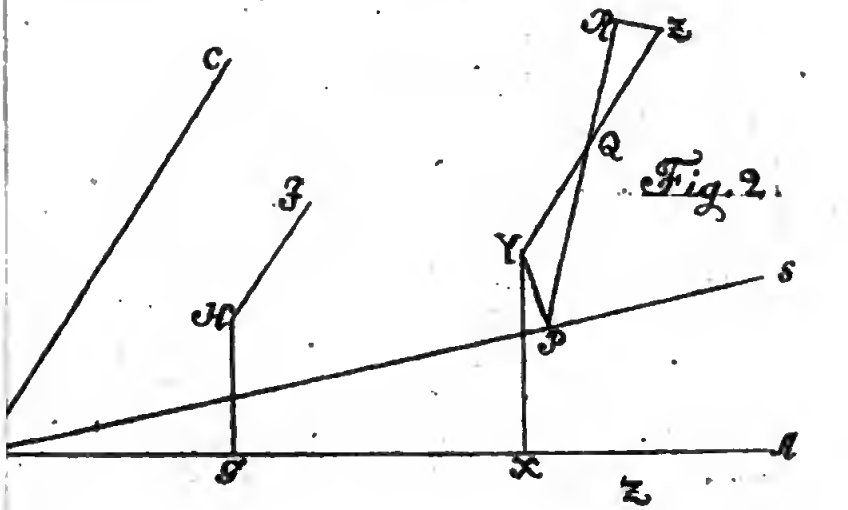


Fig. 2.

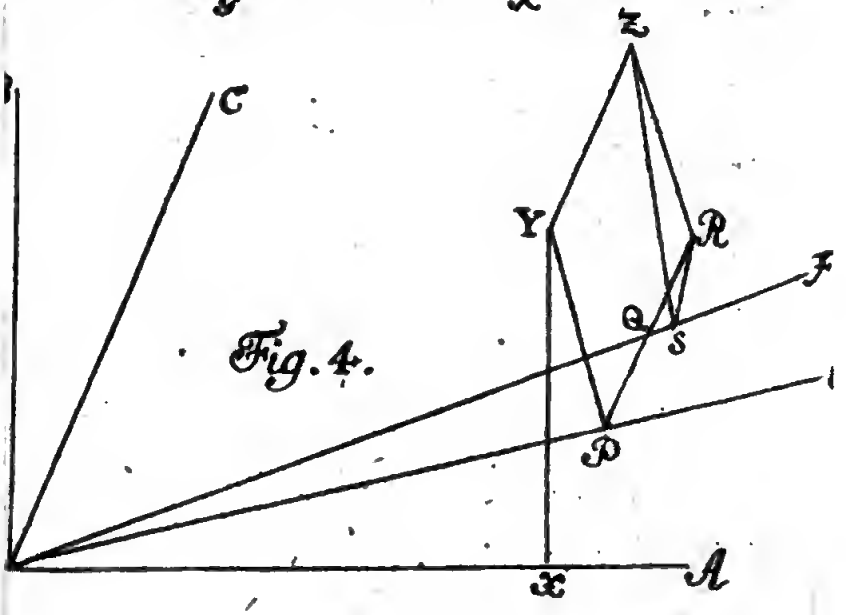
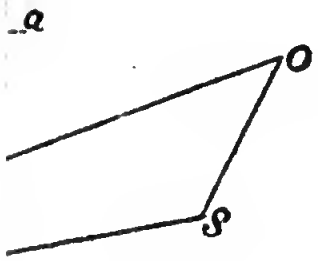


Fig. 4.

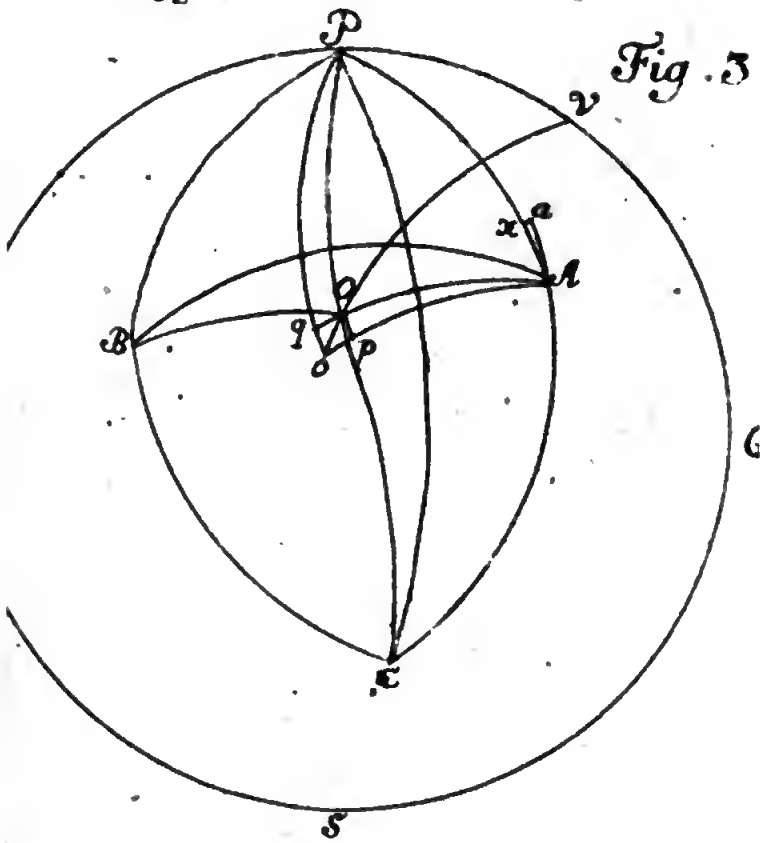
Tab. I. d. Math.

Fig. 1.



A

Fig. 3



Tab. II.

V. Cl. Mathem

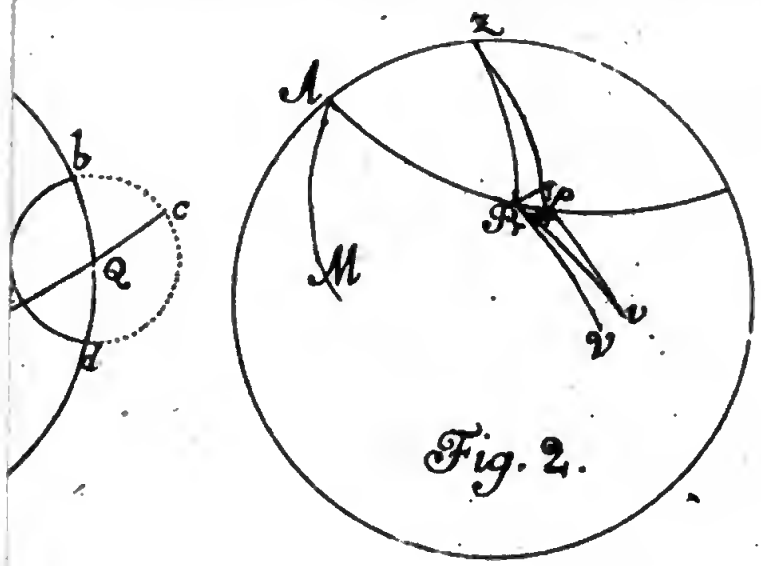


Fig. 2.

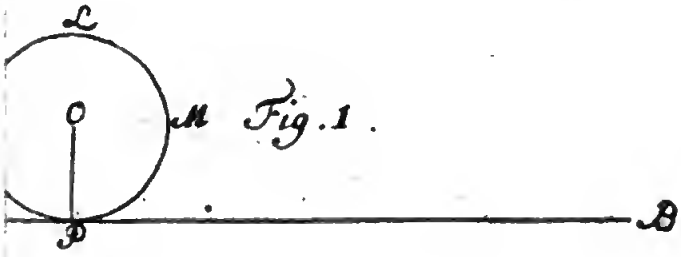


Fig. 1.

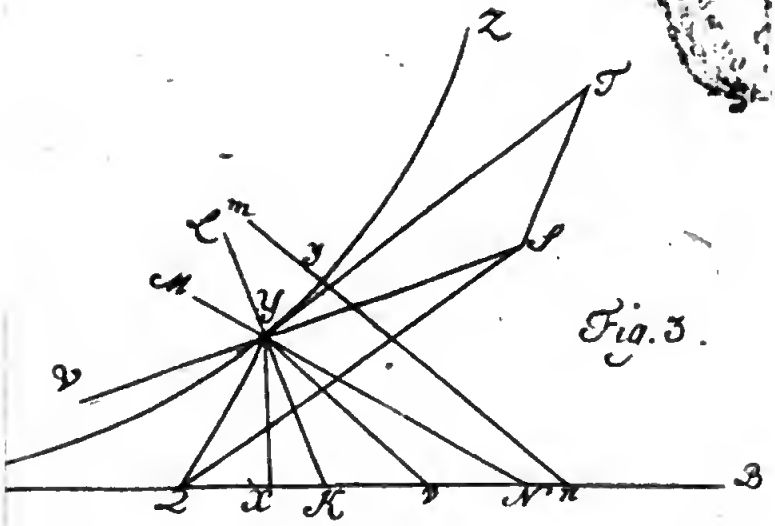
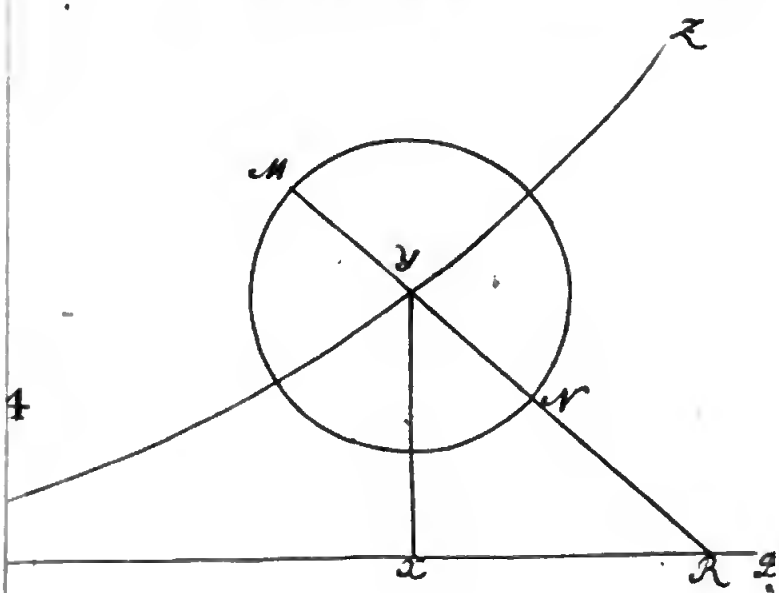


Fig. 3.



Tab. IV.
C. Mat

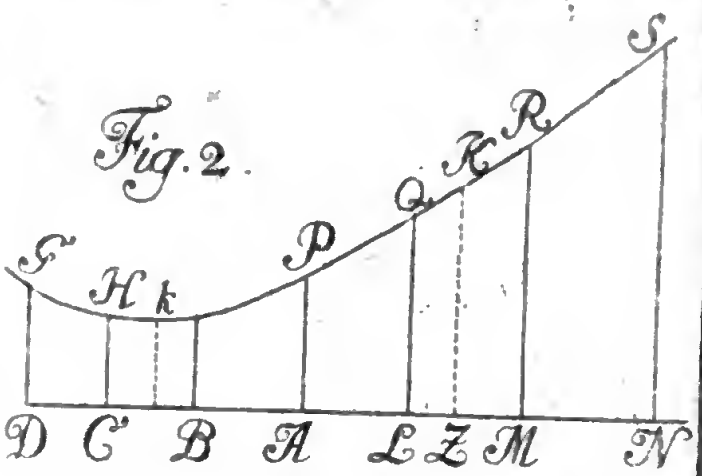


Fig. 2.

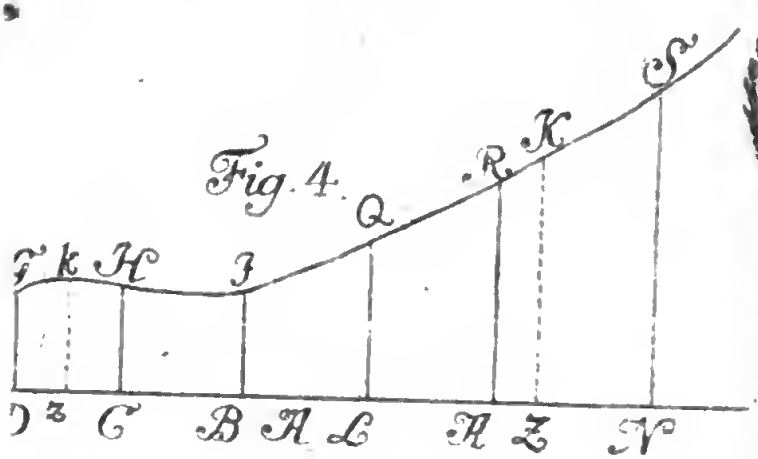


Fig. 4.

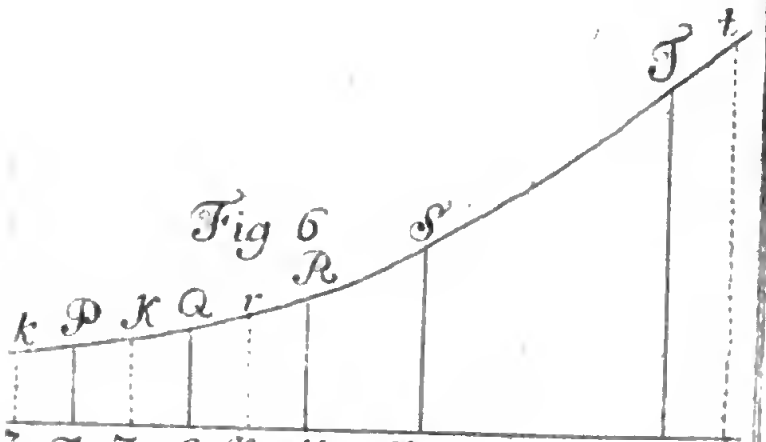
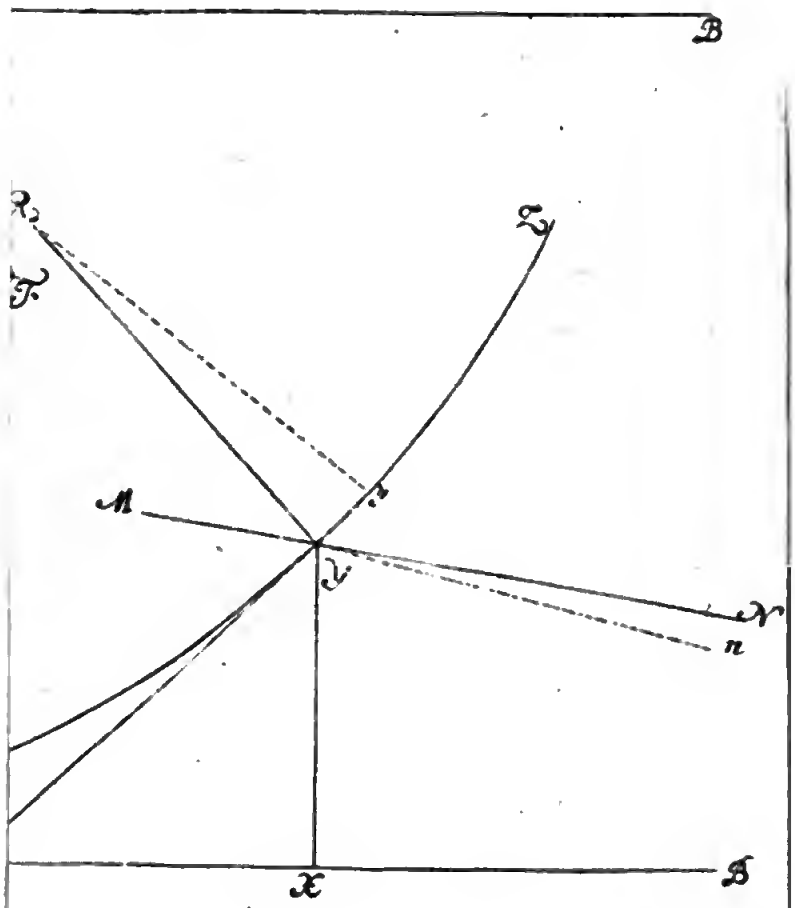
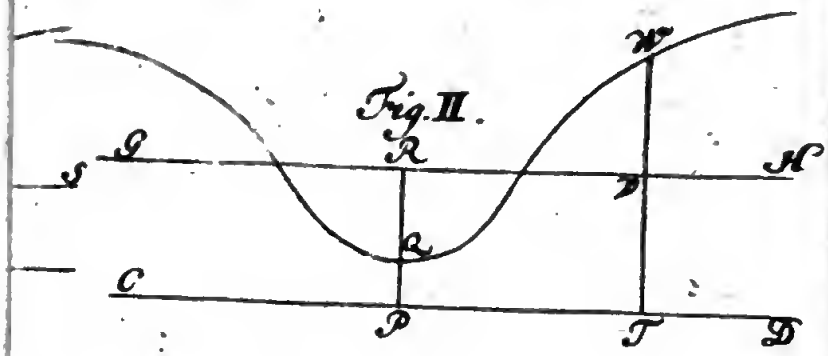


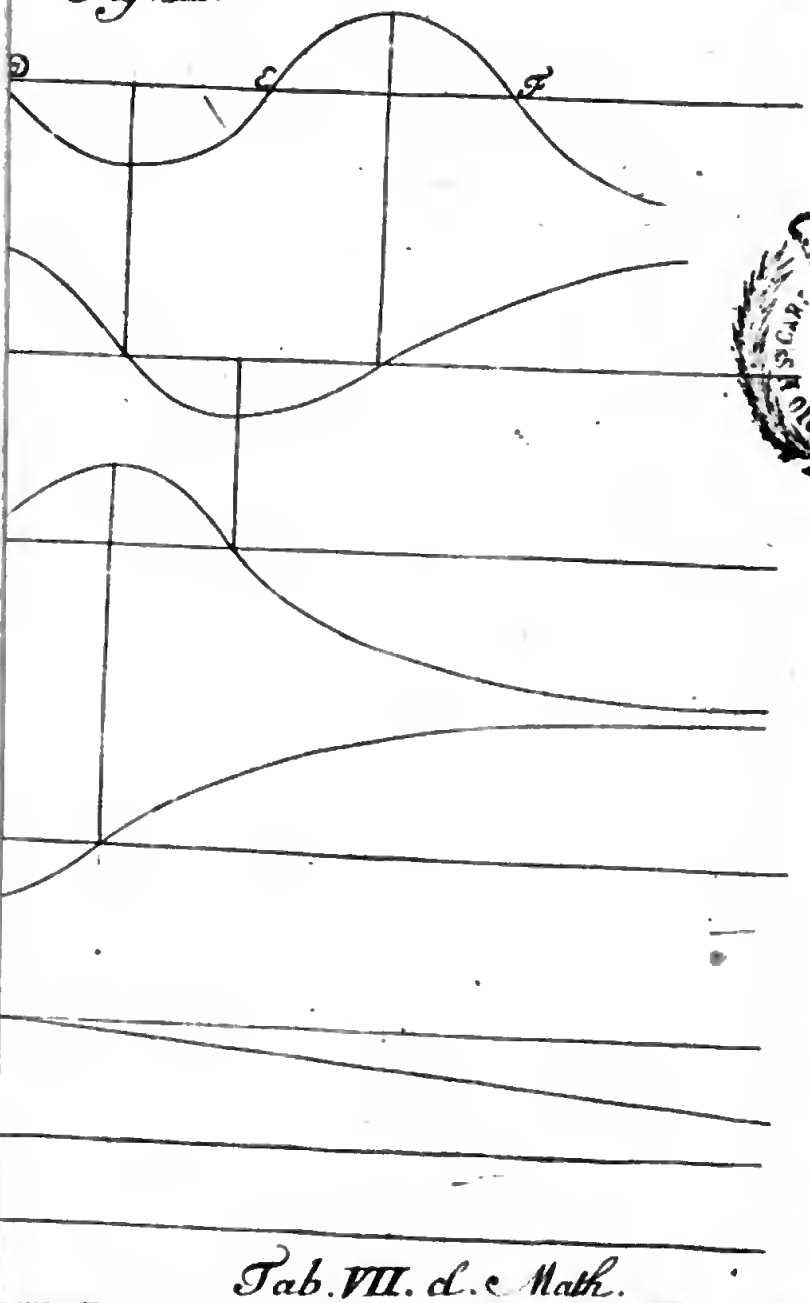
Fig 6

Tab. V.

Fig. 5.

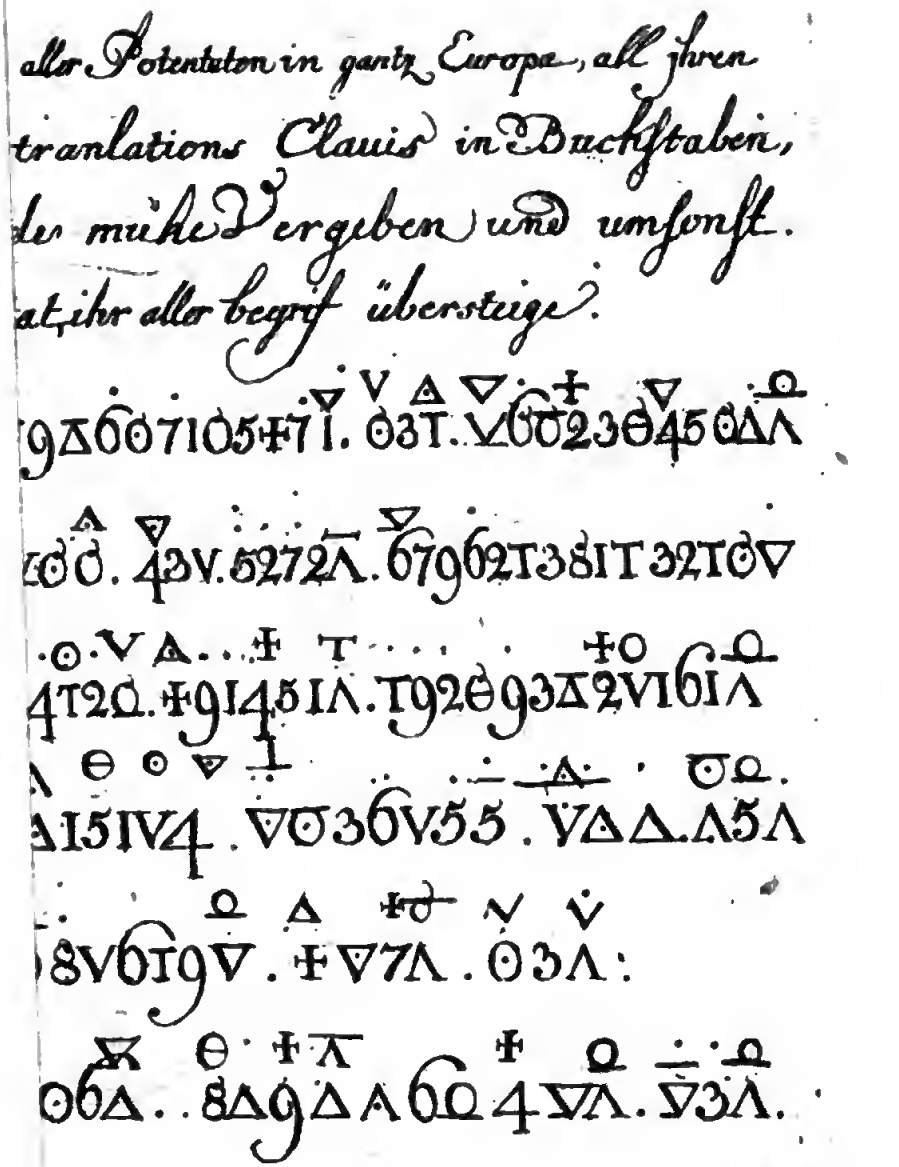






Tab. VII. d. Math.

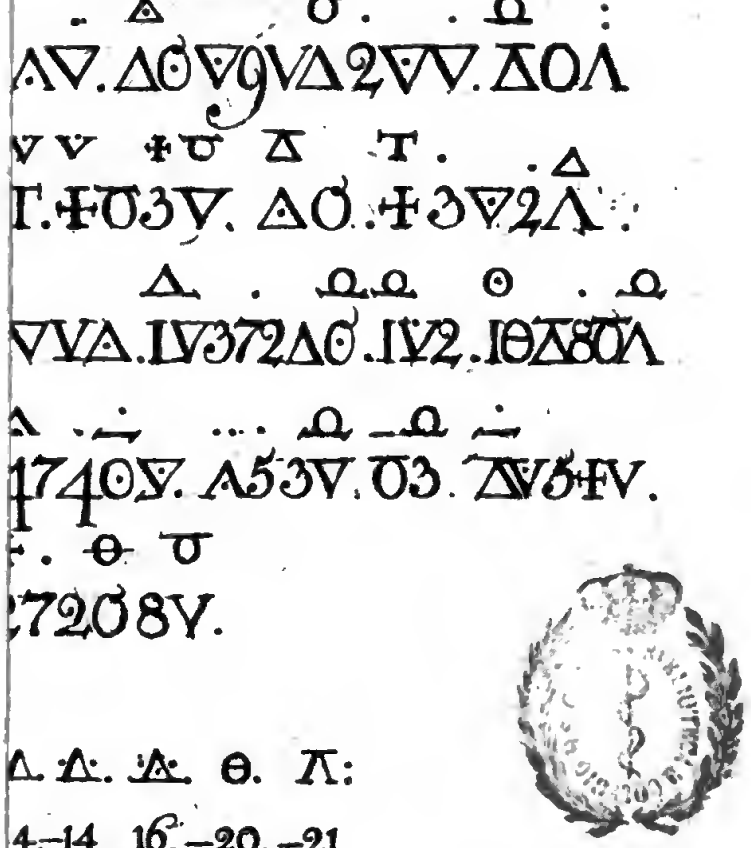
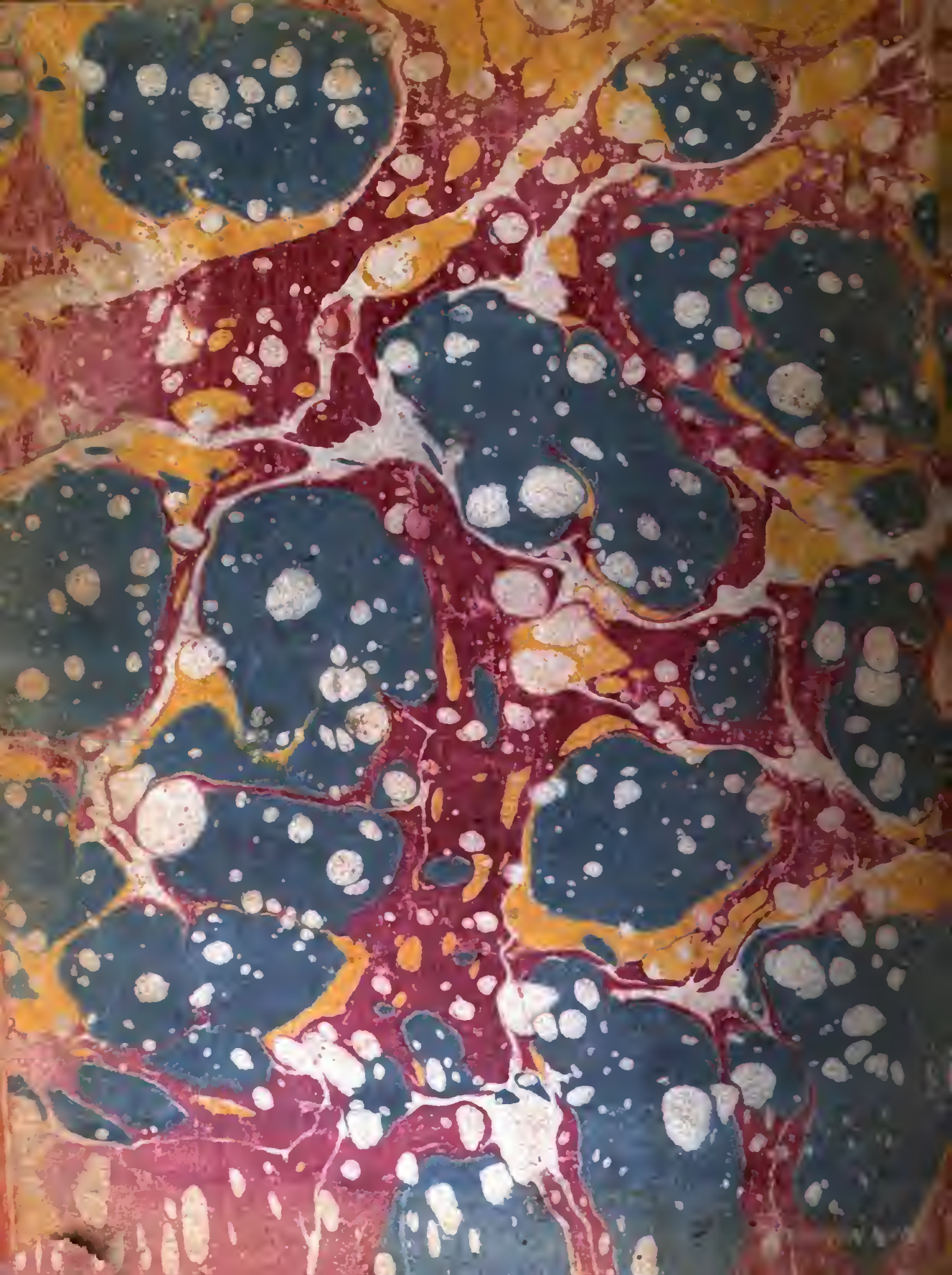
aller Potentaten in gantz Europa, all ihren
tranlations Clauis in Buchstaben,
der mühe Vergeben und umsonst.
at, ihr aller begrif übersteige.



Tab. VIII.

Digitized by Google

ed Caracterin zu schreiben und diese
ist ein musterpist Von einer so
mandtzu deterriren



Tab. IX.